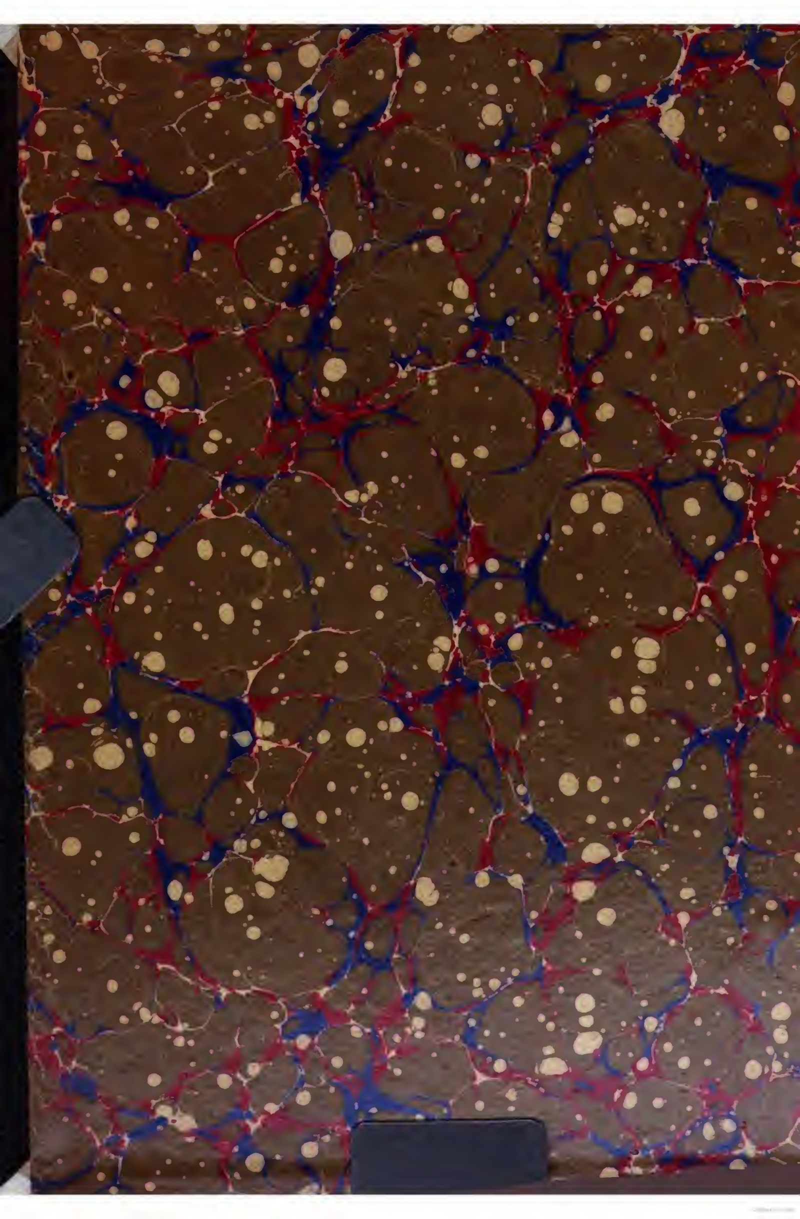

Stanford University Libraries
3 6105 025 498 291







ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

5. BAND. 1. UND 2. (DOPPEL-) HEFT.

MIT 21 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 7. APRIL 1903.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Recensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Straſse 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

FÜNFTER BAND.

MIT 20 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Über eine Aufgabe der Mechanik.

Von J. WEINGARTEN in Berlin.[1])

Die Frage nach denjenigen Kurven, welche die Eigenschaft haben, für die Bewegung eines materiellen Punktes, der auf ihnen zu bleiben gezwungen ist, und durch den Einfluß gegebener Kräfte bewegt wird, tautochron zu sein, hat ehemals das Interesse der Mathematiker auf sich gezogen, und eine Menge spezieller Aufgaben dieser Art haben daher ihre Erledigung gefunden. Mit einer solchen beschäftigt sich Abel im 1. Bde. des Crelleschen Journals (Lösung einer mechanischen Aufgabe), indem er die Gleichung der Kurve, welche die Zeit der Bewegung eines Punktes, der von einem beliebigen Punkt derselben bis zum tiefsten durch eine konstante Schwerkraft getrieben wird, zu einer gegebenen Funktion der durchfallenen Höhe macht, auf eine höchst elegante Weise bestimmt. Im 48. Bande jenes Journals wird dieselbe Frage von Meißel unter Voraussetzung des Newtonschen Attraktionsgesetzes auf eine von der Abelschen vollkommen verschiedene Weise behandelt, wobei jedoch das Endresultat eine wenig elegante Form annimmt.

Eine allgemeine Lösung jenes Problems für ein beliebiges Attraktionsgesetz läßt sich nach dem Vorgange Abels mit Hilfe eines bestimmten Integrals leicht geben. Um im folgenden nicht aufgehalten zu werden, will ich zuvörderst die Formel, aus welcher jene Lösung sofort abzulesen ist, entwickeln. Zu dem Ende mache ich Gebrauch von folgender, leicht geometrisch zu verifizierenden Gleichung:

$$\int_k^x da \int_k^a \varphi(a, r)\,dr = \int_k^x dr \int_r^x \varphi(a, r)\,da.$$

1) Die Arbeit stammt aus dem Jahre 1859 und ist aus äußeren Gründen unveröffentlicht geblieben. Sie dürfte auch jetzt noch durch die Eigenart der Methode das Interesse der Mathematiker erregen, obwohl inzwischen andere Arbeiten über Probleme des Tautochronismus veröffentlicht sind und insbesondere Somoff 1869 in seiner „Note sur la solution donnée par Abel d'un problème de mécanique“ (Bull. Acad. Pétersb. 13, 469) für eine Kraft, die ein Potential hat, die Lösung ebenfalls mit Hilfe von Doppelintegralen entwickelt hat. Red.

Substituiert man in dieselbe für die willkürliche Funktion $\varphi(a, r)$ die folgende:

$$\varphi(a, r) = \frac{\psi'(a)\frac{ds}{dr}}{(\psi(x)-\psi(a))^{1-n}(\psi(a)-\psi(r))^n},$$

so erhält man folgende Gleichheit zwischen zwei Doppelintegralen:

$$\int_k^x \frac{\psi'(a)da}{(\psi(x)-\psi(a))^{1-n}} \int_k^a \frac{\frac{ds}{dr}dr}{(\psi(a)-\psi(r))^n}$$

$$= \int_k^x \frac{ds}{dr}dr \int_r^x \frac{\psi'(a)da}{(\psi(x)-\psi(a))^{1-n}(\psi(a)-\psi(r))^n}.$$

Bemerkt man aber, daß das Integral:

$$\int_r^x \frac{\psi'(a)da}{(\psi(x)-\psi(a))^{1-n}(\psi(a)-\psi(r))^n}$$

durch die Substitution

$$\psi(a)-\psi(x) = \varpi\cdot(\psi(r)-\psi(x))$$

in folgendes übergeht:

$$\int_0^1 \varpi^{n-1}(1-\varpi)^{-n}d\varpi = (1-n, n),$$

und daß:

$$(1-n, n) = \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)},$$

so folgt, wenn man noch voraussetzt, daß die Funktion s von r für $r=k$ verschwindet:

$$\int_k^x \frac{\psi'(a)d(a)}{(\psi(x)-\psi(a))^{1-n}} \int_k^a \frac{\frac{ds}{dr}\cdot dr}{(\psi(a)-\psi(r))^n} = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}\cdot s_x,$$

eine Formel, welche mannigfache Dienste leisten kann, und in der k ganz willkürlich ist.

Für $k=0$ und $\psi(a)=a$ geht sie in die von Abel

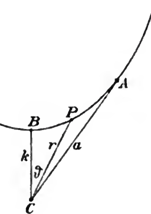
$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{ds}{(a-r)^n} = \Gamma(n)\Gamma(1-n)s$$

über.

Setzt man in der allgemeinen Formel $\frac{1}{2}$ für n, so folgt:

$$\frac{1}{\pi}\int_k^x \frac{\psi'(a)\cdot da}{\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}}\int_k^a \frac{\frac{ds}{dr}\cdot dr}{\sqrt{\psi(a)-\psi(r)}} = s_x.$$

Es sei nunmehr eine ebene Kurve betrachtet, auf welcher ein materieller Punkt beweglich ist. Derselbe werde von einem in der Ebene der Kurve liegenden anziehenden Zentrum C angezogen, mit einer nur von der Entfernung r von C wirkenden Kraft von der Größe $\psi'(r)$ pro Masseneinheit. Die Kurve selbst sei überall konvex gegen C.



Bezeichnet k die Entfernung des dem Punkte C zunächst gelegenen Punktes B der Kurve, a die Entfernung desjenigen Punktes A derselben Kurve, in welchem die Bewegung des materiellen Punktes ohne Geschwindigkeit beginnt, ferner r seine Entfernung von einem beliebigen Punkte, und schließlich s die von B anfangende nach A positiv gewählte Bogenlänge BP, so wird die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\psi'(r)\frac{dr}{ds}$$

und

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\psi(a)-\psi(r)}.$$

Hieraus ergibt sich die Zeit der Bewegung von A bis zu dem Punkte B zu:

$$\tau = \int_k^a \frac{\frac{ds}{dr}\cdot dr}{\sqrt{\psi(a)-\psi(r)}}.$$

Es wird verlangt, den Bogen s so als Funktion von r anzugeben, daß τ eine gegebene Funktion $\varphi(a)$ der anfänglichen Entfernung a werde. Zu dem Ende muß die Gleichung:

$$\varphi(a) = \int_k^a \frac{\frac{ds}{dr}\cdot dr}{\sqrt{\psi(a)-\psi(r)}}$$

identisch erfüllt werden. Multipliziert man auf beiden Seiten mit

$\frac{1}{\pi}\frac{\psi'(a)da}{\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}}$ und integriert zwischen den Grenzen k und x, so folgt mit Rücksicht auf die oben abgeleitete Formel

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_k^x \frac{\psi'(a)\,\varphi(a)\,da}{\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}} = s_x,$$

indem s für $x=k$ verschwindet. Man hat daher für s durch r ausgedrückt:

$$s = \frac{1}{\pi}\int\limits_k^r \frac{\psi'(a)\,\varphi(a)\,da}{\sqrt{\psi(r)-\psi(a)}},$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Für die Tautochrone wird $\varphi(a) = \alpha = \text{const.}$, woher für ihre Gleichung:

$$s = \frac{2\alpha}{\pi}\sqrt{\psi(r)-\psi(k)}\cdot$$

Aus dieser Gleichung ermittelt sich leicht die Polargleichung der Tautochrone für den Punkt C als Pol.

Berlin, 1859.

Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung.

Von WILHELM SCHELL in Karlsruhe.

1. *Die Kurven konstanten Abstandes der Schmiegungsebenen von einem Punkte.* — Es sei eine Kurve, als kontinuierliche Punktfolge $MM'M''M'''\ldots$ gedacht, durch die Bedingung bestimmt, daß ihre Schmiegungsebene von einem Punkte P den konstanten Abstand a habe. Durch P ziehen wir nach den Kurvenpunkten M die Strahlen PM; sie bilden eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkte P. Die Schmiegungsebene des Punktes M der Kurve geht durch M und die beiden folgenden Punkte M', M'' derselben, die Schmiegungsebene des folgenden Punktes M' durch M', M'', M'''. Beide Schmiegungsebenen schneiden sich in der Tangente des Punktes M', welche die Richtung des Bogenelementes $M'M''$ hat. Fällen wir von P auf die beiden Schmiegungsebenen $MM'M''$ und $M'M''M'''$ die Perpendikel PQ und PQ', so steht deren Ebene PQQ' auf beiden und mithin auf ihrer Durch-

schnittslinie, der Tangente des Punktes M', senkrecht. Lassen wir M' mit M zusammenfallen, so fallen beide Schmiegungsebenen in der Schmiegungsebene von M und beide Perpendikel in dem von P auf die Tangente von M gefällten Perpendikel PQ zusammen. Dies Perpendikel liegt in der Tangentenebene der Kegelfläche, welche diese längs PM berührt. Daher steht die Schmiegungsebene der zu bestimmenden Kurve auf der Tangentenebene der Kegelfläche in M senkrecht und geht durch die Normale dieser Fläche in M. Die Tangentenebene der Kegelfläche ist daher die rektifizierende Ebene der Kurve und die Kegelfläche ihre rektifizierende Fläche, durch deren Abwickelung sie in eine Gerade übergeht. Diese Betrachtung liefert daher den Satz:

Die Kurven konstanten Abstandes ihrer Schmiegungsebenen von einem Punkte P sind die kürzesten (geodätischen) Linien der Kegelflächen, welche den Punkt P zum Mittelpunkt haben.

Zwei aufeinanderfolgende rektifizierende Ebenen einer Kurve schneiden sich in der rektifizierenden Geraden derselben, und diese Gerade bildet mit der Tangente der Kurve einen Winkel H, für welchen $\operatorname{tg} H = r : \varrho$ ist, wenn ϱ und r den Krümmungs- und Torsionsradius der Kurve bedeuten.[1]) Beim Übergang eines Kurvenpunktes in den nächstfolgenden ändert sich der Winkel H um den unendlich kleinen Winkel der beiden aufeinanderfolgenden rektifizierenden Geraden. Für die geodätische Linie einer Kegelfläche ist die Erzeugungslinie dieser Fläche die rektifizierende Gerade, und man sieht leicht, daß H fortwährend wächst, während der beschreibende Punkt die Kurve durchläuft. In einem gewissen Punkte M_0 wird $H = \frac{1}{2}\pi$ und in ihm, dem Scheitel, steht die Tangente auf dem Strahle PM_0 in M_0 senkrecht und wird daselbst $PM_0 = a$, gleich dem konstanten Abstand der Schmiegungsebenen. Wickelt man nun die Kegelfläche ab, so erhält man das ebene Dreieck M_0MP, in welchem die Seite M_0M den vom Scheitel an gerechneten Kurvenbogen s darstellt, während an M der Winkel H liegt. Daher wird $\operatorname{tg} H = \frac{a}{s}$ und folglich mit Hilfe von $\operatorname{tg} H = r : \varrho$ auch $\varrho : r = s : a$; welche Gleichung die charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linie der Kegelflächen ausspricht, nämlich:

„Für die geodätische Linie der Kegelflächen ist das Verhältnis des Krümmungsradius ϱ zum Schmiegungsradius r dem Bogen s proportional, wenn derselbe vom Scheitel der Kurve an gerechnet wird.[2])

---

1) Vgl. meine allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. 2. Aufl., Leipzig 1898. Kap. VI, § 5.

2) Ebendas. Kap. IV, § 13, Satz XI, a. E.

2. *Die Kurven konstanten Abstandes der rektifizierenden Ebene von einem Punkte P.* — Die rektifizierende Ebene einer Kurve ist die Schmiegungsebene ihrer rektifizierenden Gratlinie, d. h. der Gratlinie der abwickelbaren Fläche, durch deren Abwickelung die Kurve in eine Gerade übergeht. Daher ist nach § 1 die Kurve eine Kurve konstanten Abstandes der rektifizierenden Ebene von einem Punkte P, wenn diese Gratlinie eine geodätische Linie einer Kegelfläche mit dem Mittelpunkte P ist. Diese Gratlinie ist aber gemeinschaftliche rektifizierende Gratlinie für alle geodätischen Linien ihrer Tangentenfläche, weil diese durch die Abwickelung ihrer Fläche in gerade Linien übergehen. Daher der Satz:

Die Kurven konstanten Abstandes ihrer rektifizierenden Ebenen von einem Punkte P sind die geodätischen Linien der abwickelbaren Fläche, deren Gratlinien geodätische Linien auf Kegelflächen sind, deren Mittelpunkt P ist. Die geodätischen Linien dieser Kegelfläche selbst sind insbesondere Kurven konstanten Abstandes ihrer rektifizierenden Ebene vom Abstande Null von P.

3. *Die Kurven konstanten Abstandes der Normalebene von einem Punkte P.* — Die Normalebene einer Kurve ist die Schmiegungsebene der Gratlinie der Fläche der Krümmungsachsen, welche Fläche von ihr in allen Lagen berührt wird. Diese Fläche ist gemeinschaftliche Fläche der Krümmungsachsen für alle Planevolventen der Normalebene.[1]) Sie ist deren Evolutenfläche und ihre Evoluten sind ihre geodätischen Linien. Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Planevolventen der Gratlinien aller abwickelbaren Flächen sind die Kurven konstanten Abstandes der Normalebene in einem Punkte P, wenn die Gratlinien geodätische Linien von Kegelflächen mit dem Mittelpunkte P sind.

Die Planevolventen der Normalebene sind zugleich Scharevolventen der geodätischen Linien der Fläche der Krümmungsachsen, daher kann der Satz auch in der Form ausgesprochen werden:

Die Evolventen der geodätischen Linien der abwickelbaren Flächen, deren Gratlinien geodätische Linien von Kegelflächen mit dem Punkt P als Mittelpunkt sind, sind die Kurven konstanten Abstands der Normalebene vom Punkt P.[2])

1) a. a. O. S. 46.

2) Eine analytische Behandlung der drei Probleme in Nr. 1, 2, 3 von Pirondini findet sich in Battaglinis Giornale di matematiche Jahrg. 26. (1888) in dessen Abhandlung: Sulle linee a doppia curvatura.

4. *Zur Theorie der Kurven konstanter Torsion.* — Das Problem der Kurven konstanter Torsion ist allgemein noch nicht gelöst. Es sind bis jetzt nur einzelne Arten und Gattungen dieser Kurvenfamilie bekannt, wie die Kurven konstanten Krümmungshalbmessers, die Verbiegungskurven eines Kreises, die Loxodromen des Kreiscylinders und ein spezieller kubischer Kegelschnitt. Die Lösung hängt eng mit den Umkehrungsproblemen der Krümmungshalbmesser und Hauptnormalen zusammen; es soll hier gezeigt werden, wie man aus einer gegebenen Kurve konstanter Torsion mit Hilfe dieser Umkehrungen ganze Scharen von Kurven dieser Familie ableiten kann. Durch jede solche Kurve lassen sich nämlich unendlich viele windschiefe Flächen legen, auf deren jeder noch eine zweite Kurve derselben Art gefunden werden kann.

Es sei $M, M', M'', \ldots$ die kontinuierliche Punktfolge einer Kurve (M) und $C, C', C'', \ldots$ die der Kurve (C) ihrer Krümmungsmittelpunkte. Durch die Tangenten $t, t', t'', \ldots$ von (C) legen wir nach irgend einem Gesetz eine kontinuierliche Folge von Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$; dieselben berühren eine abwickelbare Fläche F und schneiden sich paarweise aufeinanderfolgend in der Folge von Geraden $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$, den Erzeugungslinien dieser Fläche, welche ihrerseits durch ihre successiven Durchschnitte $K, K', K'', \ldots$ die Kurve (K) liefern, nämlich die Gratlinie der Fläche F, deren Schmiegungsebenen die Ebenen ε sind. Ziehen wir in den Ebenen ε durch die Punkte C zu den durch sie hindurchgehenden Geraden $\varkappa$ die Normalen n und legen durch die Punkte C, C', K Kreise, so werden diese die Kurve (C) in den Punkten C berühren und die Normalen n außer in C noch in Punkten M schneiden. Die Folge der Punkte M bildet eine Kurve (M), deren Krümmungsmittelpunkte die Punkte C, deren Normalebenen die Ebenen ε, deren Hauptnormalen die Geraden n, deren Krümmungsachsen die Geraden $\varkappa$ und deren Schmiegungskugelmittelpunkte die Punkte K sind.

Man erkennt dies, indem man die Ebene ε über die Fläche F berührend hingleiten läßt, wobei diese sich auf ε abwickelt und abbildet. Bei dieser Abwickelung rotiert die Ebene ε successive um die Geraden $\varkappa$ und beschreibt der Punkt M senkrecht zu ihr das Bogenelement MM' der Kurve (M), deren Normalebenen die verschiedenen Lagen von ε werden. Die Kurve (C) geht in eine ebene Kurve (γ), die Kurve (K) in eine ebene Kurve $(\varkappa)$ über. Die Normalen n werden zu Strahlen ν eines Punktes μ, welcher die Abbildung aller Punkte M der Kurve (M) ist; die Geraden $\varkappa$ bilden sich ab als die Tangenten $\varkappa$ der Kurve $(\varkappa)$ und stehen senkrecht auf den Geraden ν. Der Punkt μ wird der Pol, in Bezug auf welchen die Kurve (γ) die Fußpunktkurve von (γ) ist. Während die Ebene ε durch Rotation um die Geraden $\varkappa$

und $\varkappa'$ in die Lagen ε' und ε'' gelangt, beschreibt der Punkt μ die beiden Bogenelemente MM' und $M'M''$, deren Ebene senkrecht auf ε und ε'' und mithin auch auf deren Durchschnittslinie $\varkappa$ senkrecht steht; daher werden die Geraden n die Hauptnormalen und die Punkte C Krümmungsmittelpunkte, die Geraden $\varkappa$ Krümmungsaxen und der Punkt (K), Schmiegungskugelmittelpunkt von (M).

Durch die angegebene Konstruktion ist eine Kurve (M) gefunden, für welche die Fläche der Geraden n Fläche der Hauptnormalen ist. Nach dem Bertrandschen Satze über die Kurven gemeinsamer Hauptnormalen gibt es auf derselben Fläche noch eine zweite Kurve (M'), für welche sie zugleich Fläche der Hauptnormalen ist, wenn zwischen ihrer Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und Torsion $\frac{1}{r}$ eine lineare Relation $\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1$ besteht. Ist eine Kurve (C) gegeben, so kann daher mit Hilfe jeder durch sie hindurchzulegenden abwickelbaren Fläche F eine windschiefe Fläche gefunden werden, deren Erzeugungslinien die gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen zweier Kurven bilden. Bloß in dem Falle, daß diese Fläche ein windschiefes Helikoid ist, gibt es nicht zwei, sondern unendlich viele Kurven, welche sie zur gemeinsamen Fläche der Hauptnormalen haben, und sind diese Kurven Schraubenlinien eines Kreiszylinders.

Zwei Kurven (M) und (N) von gemeinschaftlicher Fläche der Hauptnormalen besitzen folgende hier in Betracht kommenden Eigenschaften[1]):

Es kreuzen sich die Tangenten in den Punkten M und N, in welchen sie dieselbe Hauptnormale treffen, unter konstantem Winkel α.

Beide Kurven haben konstanten Abstand a der Punkte von einander, welche auf derselben Hauptnormalen liegen.

Das Produkt der Torsionshalbmesser r, r' beider Kurven in den Punkten derselben Hauptnormalen ist konstant, nämlich $rr' = \left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2$.

Für die Kurven *konstanter Torsion* ergibt sich hieraus, *daß zu jeder solchen Kurve auf der Fläche ihrer Hauptnormalen eine zweite Kurve gleichfalls von konstanter Torsion gefunden werden kann in konstantem Abstande a von der ersteren und von konstantem Kreuzungswinkel α ihrer Tangenten in entsprechenden Punkten.*

Die Lage der beiden Kurven (M) und (N) konstanter Torsion auf der gemeinsamen Fläche ihrer Hauptnormalen ist unmittelbar ersichtlich. Ihre Schnittpunkte M und N mit der Erzeugungslinie g der Fläche liegen zu beiden Seiten des Zentralpunktes C_0 von g im gleichen Ab-

1) a. a. O. VIII. Kap. § 7. 8. 9. 10.

stande $\frac{1}{2}a$ von diesen; es sind die Tangenten von (M) und (N) in diesen Punkten senkrecht zu g und bilden die Schmiegungsebenen daselbst mit der Zentralebene gleiche Winkel, so daß die Torsionswinkel ebenfalls gleich sind; außerdem sind auch die Bogenelemente gleich. Daher besitzen die Kurven (M) und (N) gleiche Torsion in M und N. Da die Folge der Ebenen ε willkürlich ist, so gibt es durch jede Kurve (C) unendlich viele windschiefe Flächen, deren jede gemeinsame Fläche der Hauptnormalen für zwei Kurven ist. Ist die eine konstanter Torsion, so ist es auch die andere. *Zu jeder Kurve konstanter Torsion kann also eine unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven von gleichfalls konstanter Torsion gefunden werden.*

Karlsruhe, den 23. Dezember 1902.

Über einen vermeintlich richtigen Satz von Gergonne.

Von R. STURM in Breslau.

Einer Abhandlung, welche Steiner in Gergonnes Annales de Mathématiques Bd. 19 S. 1 veröffentlicht hat und an deren Schlusse er zu dem Satze gelangt: Wenn zwei Flächen 2. Grades die Kanten eines Tetraeders berühren, so liegen die 12 Berührungspunkte auf einer Fläche 2. Grades, hat der Herausgeber Gergonne einen analogen Satz hinzugefügt, dessen Richtigkeit er für wahrscheinlich hielt:

Die 12 Berührungspunkte von drei Flächen 2. Grades, welche demselben Tetraeder eingeschrieben sind, liegen auf einer Fläche 2. Grades.[1])

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß dieser Satz nicht richtig ist.

Wenn A, B, C drei Punkte auf einer Fläche 2. Grades und α, β, γ ihre Berührungsebenen sind, so besteht zwischen ihnen eine Beziehung: Das Dreieck ABC und das von seiner Ebene aus dem Dreiflache $\alpha\beta\gamma$ ausgeschnittene, ihm umgeschriebene Dreiseit sind perspektiv, und dasselbe gilt für das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ und den Dreikant aus seinem Scheitel nach A, B, C.

Sind daher A, B, C, α, β gegeben, so ist die Spur von γ in der Ebene ABC eindeutig bestimmt. Man hat die Verbindungslinie von (BC, α) und (CA, β) mit AB zu schneiden; die Gerade von diesem Schnitte nach C ist die gesuchte Gerade c_1, die wir auch als Tangente, in C, des Kegelschnitts bezeichnen können, der durch A, B, C geht

1) Steiners Gesammelte Werke Bd. 1 S. 188, wo der Gergonnesche Satz auch mitgeteilt wird.

und in A, B die Ebenen α, β berührt. Durch diese Gerade c_1 muß γ gehen; aber auch jede beliebige (von ABC verschiedene) Ebene durch c_1 genügt der Beziehung.

Sind hingegen α, β, γ, A, B gegeben, so ist der Ort von C in γ eine bestimmte, durch $\alpha\beta\gamma$ gehende Gerade c. Man schneide die Ebenen $(A, \beta\gamma)$, $(B, \gamma\alpha)$ und dann γ mit der Ebene aus $\alpha\beta$ nach ihrer Schnittlinie in c; diese Gerade c ist Berührungskante, mit γ, des Kegels 2. Grades, welcher α, β, γ berührt und zwar α, β längs der durch A, B gehenden Kanten aus $\alpha\beta\gamma$.

Haben die drei Punkte A, B, C und die drei Ebenen α, β, γ die vorgeschriebene Lage, so existiert ein Kegelschnitt, welcher α, β, γ in A, B, C berührt und, perspektiv zu ihm, ein Kegel 2. Grades aus $\alpha\beta\gamma$. Alle Flächen 2. Grades, welche diesem Kegel längs jenes Kegelschnittes eingeschrieben sind, und bekanntlich sowohl einen Büschel als eine Schar bilden, berühren α, β, γ in A, B, C.

Nunmehr seien 7 beliebige Punkte A, B, C, A', B', A'', B'' gegeben[1]); durch A, A', A'' sei die Ebene α, durch B, B', B'' die Ebene β gelegt. Zu A, B, C, α, β bestimmen wir die oben beschriebene Gerade c_1, und γ sei eine beliebig durch sie gelegte Ebene (die nicht durch den achten assoziierten Punkt jener 7 Punkte geht). Sodann werde zu $\alpha, \beta, \gamma, A', B'$ der Ort c' der Punkte C' konstruiert und auf ihm ein beliebiger Punkt C' gewählt, und ebenso zu α, β, γ, A'', B'' der Ort c'' der Punkte C'' konstruiert und auf ihm ein beliebiger Punkt C'' gewählt. Der Punkt C' ist nicht der achte associierte zu A, B, C, A', B', A'', B''; also geht durch diese 8 Punkte nur eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art. Sie hat mit γ vier Punkte gemein, darunter C, C'. Der beliebig auf c'' gewählte Punkt C'' ist von diesen Punkten verschieden, bestimmt daher in dem Büschel durch die Kurve eine einzige Fläche 2. Grades. Folglich liegen die 9 Punkte A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' auf einer einzigen Fläche 2. Grades. Ist weiter D ein dieser Fläche nicht angehöriger Punkt, so sei δ die Berührungsebene der durch ihn gehenden Fläche der Büschel-Schar, die zu α, β, γ; A, B, C gehört, und D', D'' seien ihre Berührungspunkte mit den sie berührenden Flächen aus den zu α, β, γ; A', B', C' und α, β, γ; A'', B'', C'' gehörigen Büschel-Scharen. Von diesen 12 Berührungspunkten befinden sich schon die 10 Punkte A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', D nicht auf derselben Fläche 2. Grades.

Breslau, Januar 1903.

---

1) Diese Vervollkommnung des Beweises, daß von 7 *beliebigen* Punkten ausgegangen wird, verdanke ich Teilnehmern an meinen Seminarübungen.

Über Umformungen von Maximal- und Minimalfiguren.

Von Rudolf Sturm in Breslau.

Bei Gelegenheit einer früheren Beschäftigung mit den Steinerschen Aufsätzen über Maxima und Minima, welche zu meinen Abhandlungen im Journal für Mathematik Bd. 96 und 97 geführt hat, stieß ich auf eine, wie es schien, noch wenig beachtete Umformung von Maximal- und Minimalfiguren; ich lenkte Bd. 97 S. 58 die Aufmerksamkeit auf dieselbe und habe sie selbst nicht aus dem Auge gelassen. Dem damals ausgesprochenen Wunsch, daß man mehr solche Umformungen sammele, will ich im folgenden selbst entsprechen, indem ich aus meiner Sammlung einige Beispiele mitteile, wobei ich die a. a. O. gefundenen der Vollständigkeit halber mit aufnehme.

1. Ich beginne mit einem schon dem Altertum angehörenden Problem, das ich in Lorias Monographie[1]): Le scienze esatte nell' antica Grecia, IV, Nr. 38, kennen gelernt habe. Serenus von Antissa behandelt in seiner Schrift über den Schnitt des Kegels[2]) die dreieckigen Schnitte eines Rotationskegels mit Ebenen, welche durch die Spitze gehen. Es sei r der Radius des Grundkreises, h die Höhe und $2c$ die aus dem Grundkreise geschnittene Sehne. Dann ist, vorausgesetzt, daß $h < r$ ist, der Inhalt des ausgeschnittenen Dreiecks am größten, wenn $2c^2 = r^2 + h^2$; wenn $h = r$ ist, wird dies maximale Dreieck der Achsenschnitt, und es bleibt der Achsenschnitt, wenn $h > r$ ist.

2. Die Steinersche Betrachtung über zwei rechtwinklige Dreiecke (Ges. Werke, Bd. II, S. 280, Nr. 42) hat mich zu folgenden Sätzen geführt:

In dem einen von zwei rechtwinkligen Dreiecken seien a_1, b_1 die Katheten, c_1 die Hypotenuse, im andern a_2, b_2; c_2.

Es seien erstens a_1, a_2 einzeln gegeben: $a_1 \geqq a_2$, und die Differenz der Hypotenusen gleich γ. Dann ergibt sich das Minimum der Differenz der Katheten b_1, b_2, wenn die Dreiecke ähnlich sind, so lange $\gamma \geqq a_1 - a_2$. Ist $\gamma = a_1 - a_2$, so schrumpfen die Dreiecke beim Minimum in gerade Linien zusammen: $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $b_1 = b_2 = 0$. Das Gleichsein von b_1 und b_2 bleibt nun Kennzeichen des Minimums, wenn $\gamma < a_1 - a_2$

1) Memorie della Regia Accademia di Scienze, Lettere et Arti di Modena. Sezione di Scienze Ser. II Vol. X, XI, XII (1893, 1895, 1900, 1902).

2) Deutsch von Nizze, Stralsund 1861.

ist. Oder: c_1, c_2 seien einzeln gegeben: $c_1 \geqq c_2$, und die Differenz der Katheten a_1, a_2 gleich α; die Differenz von b_1, b_2 ist dann am kleinsten, wenn die Dreiecke ähnlich sind, so lange $\alpha \leqq c_1 - c_2$. Die Gleichheit von b_1, b_2, im Grenzfalle $\alpha = c_1 - c_2$ in der Form $b_1 = b_2 = 0$ erhalten, bleibt Kennzeichen des Minimums, wenn $\alpha > c_1 - c_2$ geworden ist.

3. Es seien s_1, s_2 die kleinsten Halbsehnen, die, wenn zwei Kreise K_1, K_2 gegeben sind, von denen $K_1 \geqq K_2$ ist, zu einem gemeinsamen inneren Punkte gehören, wofern ein solcher vorhanden ist, t_1, t_2 die Tangenten von einem gemeinsamen äußeren Punkt; ferner seien D_1, E_1; D_2, E_2 die Durchmesser-Endpunkte auf der Zentrale und zwar E_1, E_2 die je dem Mittelpunkte des anderen Kreises näheren Endpunkte, endlich A der äußere, J der innere Ähnlichkeitspunkt.

Wenn K_1 von K_2 umschlossen wird, so ist A Minimumspunkt für den absoluten Wert $|s_1 - s_2|$ der Differenz. Berührt K_1 den K_2 von innen, so wird dieser Minimumspunkt der Berührungspunkt und als solcher Fußpunkt der Potenzlinie. Schneiden sich K_1 und K_2, so breitet sich der Minimumspunkt über den ganzen inneren Teil der Potenzlinie aus. Er reduziert sich wiederum auf den Fußpunkt oder Berührungspunkt und Ähnlichkeitspunkt J, wenn Berührung von außen statthat. Das Maximum von $|s_1 - s_2|$ ergibt sich in E_2, so lange es noch gemeinsame innere Punkte gibt.

Für $s_1 + s_2$ ist J Maximumspunkt in allen Fällen, in denen es gemeinsame innere Punkte gibt; Minimumspunkt für $s_1 + s_2$ ist im Falle, wo K_2 von K_1 umschlossen wird, der Punkt D_2, der sich, wenn K_2 den K_1 von innen berührt, mit E_1 vereinigt. Nun bleibt E_1 Minimumspunkt.

Bei zwei aus einander liegenden Kreisen befindet sich der Minimumspunkt für $t_1 + t_2$ in E_2 und kommt bei der äußeren Berührung in den gemeinsamen Punkt. Während die Kreise sich schneiden, repräsentiert jeder der beiden Schnitte den Minimumspunkt; tritt die Berührung von innen ein, so fallen sie wieder in den Berührungspunkt, und E_1, der in demselben liegt, bleibt Minimumspunkt, wenn K_1 den K_2 umschließt.

Maximumspunkt für $|t_1 - t_2|$ ist D_1 in allen Fällen.

Der Maximalwert von $t_1 + t_2$ wird ersichtlich im Unendlichen erreicht, der Minimalwert von $|t_1 - t_2|$ auf der Potenzlinie, so weit sie außerhalb liegt.

4. Wir betrachten den absoluten Wert des Produkts der Abschnitte auf den Strahlen eines Büschels vom Scheitel bis zu den Schnitten mit einer Kurve (Steiner, Ges. Werke, Bd. II S. 663). Liegt z. B.

eine Ellipse vor, so liefert die Parallele zur großen Achse das Maximum, die zur kleinen Achse das Minimum. Wird die Kurve eine Parabel, so wird das Maximum, auf der Parallelen zur Achse, unendlich groß, das Minimum liegt auf der Senkrechten zur Achse. Jenes liegt also auf der Geraden nach dem unendlich fernen Punkte der Parabel. Geht man nun zur Hyperbel über, so bleibt das Maximum so, wie es sich im Übergangsfalle herausgestellt hat, aber es kommt auf zwei Geraden zu stande, den Parallelen zu den Asymptoten; zu dem bisherigen Minimum ist noch ein zweites gekommen: die Produkte auf den Parallelen zu beiden Achsen sind Minima.

5. Von allen einem spitzwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken hat dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Ecken in den Fußpunkten der Höhen liegen.

Wird das gegebene Dreieck rechtwinklig, so geht dies Dreieck über in die doppelte Höhe auf die Hypotenuse. Und wenn das Dreieck stumpfwinklig wird, so bleibt die Minimumsfigur so, wie sie sich im Übergangsfalle gestaltet hat: sie ist die doppelte Höhe auf der größten Seite.

Wenn ein Kreisviereck $ABCD$ gegeben ist, so erhält man das Minimum des Umfangs eingeschriebener Vierecke folgendermaßen. Schließt das Viereck den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises ein, so seien aus dem Schnitte der Diagonalen die Lote auf die Seiten gefällt. Das Viereck der Fußpunkte, welche sämtlich auf den Seiten zwischen den Ecken liegen, hat den kleinsten Umfang. Aber es sind unendlich viele Parallelvierecke zu diesem Vierecke möglich, innerhalb des gegebenen Vierecks gelegen; sie haben alle denselben Umfang, wie dies Viereck der Fußpunkte.

Ist eine Seite des gegebenen Vierecks, etwa CD, Durchmesser des Kreises geworden, so ist ein Winkel dieses Fußpunkt-Vierecks flach geworden, und es ist in ein Dreieck übergegangen, das zwei Ecken in A und B, die dritte auf CD hat; Minimum des Umfangs der eingeschriebenen Vierecke ist der Umfang dieses Dreiecks.

Und diese Gestalt behält die Minimumsfigur wiederum bei, wenn das Viereck $ABCD$ den Mittelpunkt des Kreises ausschließt. Ist CD die Sehne, in deren kleinerem Segment das Viereck sich befindet, so ist das Minimum des Umfangs der des Dreiecks ABG, wo G so auf CD liegt, daß $AG + BG$ ein Minimum ist.

Dies habe ich im Journal f. Math. Bd. 96 S. 64 erörtert. Auf S. 71 habe ich dann für das beliebige Viereck folgendes Resultat erhalten, das ich hier etwas anders anordnen und aussprechen will:

In dem beliebigen Vierecke $ABCD$ sei $A + C > 180^0$ und $\sphericalangle A$ sei stumpf; von den beiden anderen Gegenwinkeln sei D der kleinere, jedenfalls spitze. Hinsichtlich des Winkels B unterscheiden wir die drei Fälle: $B <, =, > ACD + 90^0$. Nur im ersten Falle kann C ein rechter oder stumpfer Winkel sein. Von diesem ersten Falle gehen wir aus. Es seien $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die Spiegelbilder von A in Bezug auf die Seiten BC, CD, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ die Fußpunkte der Lote auf diesen Seiten. Die Verbindungslinie $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ schneide die Seiten in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, sodaß der dreiteilige Zug $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}A$, von A ausgehend und in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ an den Seiten BC, CD gespiegelt, nach A zurückkehrt. Die Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen in unserm Falle, so lange C spitz ist, auf den Seiten selbst. Und der Umfang des Dreiecks $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist die untere Grenze des Umfangs aller dem gegebenen Vierecke eingeschriebenen Vierecke.

Wir lassen erstens $B = ACD + 90^0$ werden. Dann rückt $\mathfrak{B}$ in die Ecke B, während $\mathfrak{C}$ noch auf der Seite CD bleibt. Untere Grenze ist der Umfang von $AB\mathfrak{C}$ und dabei bleibt es, wenn $B > ACD + 90^0$ wird; wir haben also in diesem Falle den Strahl von B zu ziehen, der, in $\mathfrak{C}$ an CD gespiegelt, nach A geht. Zweitens lassen wir, wieder $B > ACD + 90^0$ voraussetzend, $C = 90^0$ werden; dann geht $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ durch C, und in diesem Punkte vereinigen sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; und untere Grenze ist ACA, die doppelte Diagonale. Und dabei bleibt es wiederum, wenn $C < 90^0$ wird. Das Viereck hat dann zwei stumpfe Gegenwinkel, und die Diagonale zwischen ihnen, doppelt, ist die untere Grenze des Umfangs der eingeschriebenen Vierecke.

6. Wenn zwei Punkte A, B und eine Gerade g gegeben sind, so ist, wofern A, B auf derselben Seite von g liegen, derjenige Punkt auf g, welcher die kleinste Entfernungssumme von A und B besitzt, der Berührungspunkt, mit g, der Ellipse, welche A und B zu Brennpunkten hat und g berührt, oder einfacher der Schnitt der Verbindungslinie des einen der beiden Punkte mit dem Spiegelbilde des anderen in Bezug auf g.

Fällt A auf g, so wird A, der Schnittpunkt von AB mit g, der Minimumspunkt, die Ellipse ist in das Punktepaar (A, B) ausgeartet; dieser Schnittpunkt (AB, g) bleibt Minimumspunkt, wenn A auf der anderen Seite von g liegt, als B.

7. Betrachten wir den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten und begnügen wir uns mit den einfacheren Fällen von 3 und 4 Punkten. Wenn drei Punkte ein Dreieck bilden, in welchem alle Winkel kleiner als 120^0 sind, so liegt der Minimumspunkt im Innern und zwar so, daß die 3 Halbstrahlen nach den Ecken einen regel-

mäßigen Dreistrahl bilden, d. h. zu je zweien den Winkel 120° einschließen.

Ist einer der Dreieckswinkel 120°, so fällt der Minimumspunkt in seinen Scheitel; und bei dieser Form der Minimalfigur bleibt es, wenn der Winkel > 120° ist: der Scheitel dieses größten Winkels gibt das Minimum.

Sind vier Punkte in einer Ebene gegeben, so mögen sie zunächst so liegen, daß keiner von ihnen innerhalb des Dreiecks der andern liegt. In diesem Falle ist der Diagonalen-Schnittpunkt der Minimumspunkt. Kommt eine Ecke auf eine Seite des Dreiecks der andern Ecken zu liegen und zwar zwischen den Ecken, dann ist diese Ecke Diagonalenschnitt und Minimumspunkt. Und rückt nun die Ecke in das Innere des Dreiecks der andern Ecken, so bleibt sie Minimumspunkt.

Von einer dreikantigen Ecke, deren zugehöriges sphärisches Dreieck ein Viertel der Oberfläche der Kugel ist (der Exzeß beträgt dann 180°), kann man sagen, daß sie ein Viertelraum sei (ähnlich wie man die Worte Halbstrahl, Halbebene gebraucht und den Winkel 120° eine Drittelebene nennen kann).

Liegt nun ein Tetraeder vor, von dem alle Ecken kleiner als ein Viertelraum sind, so ist der Minimumspunkt ein im Innern gelegener Punkt, bei welchem die vier Halbstrahlen nach den Eckpunkten vier dreikantige Ecken bilden, die sämtlich gleich einem Viertelraum sind.

Ist eine Ecke des Tetraeders selbst gleich einem Viertelraum, so ist sie dieser Minimumspunkt, und wenn das Tetraeder eine Ecke bekommt, welche größer ist als ein Viertelraum, so ist deren Scheitel der Minimumspunkt.

Und ähnliche Umformungen finden statt bei mehr gegebenen Punkten.[1])

Auch, wenn es sich um die Entfernungen von gegebenen *Geraden* handelt, kommen solche Umformungen der Minimumsfigur vor.

Das Gemeinsame der besprochenen Umformungen ist, daß beim Übergange von einem allgemeinen Falle zu einem andern die bisherige

1) Journal f. Mathem. **97**, 49. — Zu der Literatur dieses bis ins 17. Jahrhundert (Fermat, Cavalieri, Torricelli) zurückgehenden Problems der kleinsten Entfernungssumme möchte ich noch erwähnen, daß Gauß und Schumacher 1836 in mehreren Briefen (Bd. III des Briefwechsels) mit diesem Problem für 4 Punkte einer Ebene sich beschäftigt haben, ohne jedoch ein befriedigendes Resultat zu erzielen.

charakteristische Eigenschaft der Maximums- oder Minimumsfigur aufhört und an ihre Stelle eine andere Eigenschaft tritt, welche sie im Übergangsfall erhalten hat.

8. Etwas anders scheint die Umformung zu sein, welche der Sector als Maximalfigur erleidet.

Wenn ein Winkel vorliegt, welcher $\leq 180^0$ ist, so schließt von allen Linien gegebener Länge, welche zwei beliebige Punkte der Schenkel verbinden, der Kreisbogen um den Scheitel des Winkels die größte Fläche ein.

Ich habe im Journal f. Math. Bd. 96, S. 48 ff. die Steinerschen Beweise besprochen und erörtert, daß das nicht mehr richtig ist, wenn der Winkel $> 180^0$ ist. Auf der Grenze 180^0 ist die Maximalfigur ein Halbkreis, und ein Halbkreis ist sie auch, wenn die Grenze überschritten ist, aber doch in etwas anderer Lage, als er sich auf der Grenze ergeben hat. Wenn nämlich der Winkel $> 180^0$ ist, so ist Maximalfigur derjenige Halbkreis, dessen Bogen die gegebene Länge hat, und dessen Durchmesser auf dem einen Schenkel des Winkels mit dem einen Endpunkte im Scheitel liegt, also nicht mit dem Mittelpunkt. —

Ich wiederhole, was ich schon im Journal f. Math. Bd. 97, S. 59 gesagt habe, daß es mir zweifelhaft erscheint, ob der analoge Satz im Raume:

„Unter allen Körpern, welche von einer gegebenen körperlichen Ecke (oder Kegel) durch eine der Größe nach gegebene Fläche abgeschnitten werden, ist derjenige ein Maximum, bei welchem diese Fläche einer Kugel um den Scheitel der Ecke angehört“[1]),
für alle Größen der Ecke gilt.

Breslau, Dezember 1902.

---

1) Steiner, Ges. Werke Bd. II, S. 306 Nr. 73 IV. Der Schluß des zweiten Steinerschen Aufsatzes über Maximum und Minimum enthält noch viele unberührte Probleme; die Aufgabe des Steiner-Preises für 1900 hat auf sie hingewiesen.

Über höhere Kongruenzen.

Von A. Hurwitz in Zürich.

Die Frage nach der Anzahl der Wurzeln einer Kongruenz

$$a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \cdots + a_{p-1} \equiv 0 \pmod p,$$

wobei der Modul p eine Primzahl ist, läßt sich nach einem Satze von Herrn König[1]) mit Hilfe der aus den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ gebildeten cyklischen Matrix vollständig beantworten. Ist nämlich $p-1-h$ der Rang dieser Matrix modulo p, so ist h die gesuchte Anzahl. Eine ganz anders geartete Antwort auf dieselbe Frage will ich in den folgenden Zeilen entwickeln und daran einige weitere auf höhere Kongruenzen bezügliche Betrachtungen anknüpfen.

1. Den Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildet die einfache Bemerkung, daß nach dem Fermatschen Satze

$$1 - k^{p-1} \equiv 1 \quad \text{oder} \quad 0 \pmod p)$$

ist, je nachdem k durch p teilbar ist oder nicht. Hieraus folgt sofort, daß, wenn N die Anzahl der Glieder der Zahlenreihe

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

bezeichnet, welche durch p teilbar sind, die Kongruenz

$$(1) \qquad N \equiv (1 - k_1^{p-1}) + (1 - k_2^{p-1}) + \cdots + (1 - k_n^{p-1}) \pmod p$$

besteht. Durch diese Kongruenz ist die Zahl N unzweideutig bestimmt, sobald man von ihr weiß, daß sie nicht größer als $p-1$ sein kann.

Wenn nun die Kongruenz

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \equiv 0 \pmod p$$

vorliegt, so wird die Anzahl N ihrer von Null verschiedenen Wurzeln nichts anderes sein, wie die Anzahl der durch p teilbaren Glieder der Reihe

$$f(1), \quad f(2), \ldots, f(p-1).$$

1) Siehe G. Rados, Zur Theorie der Kongruenzen höheren Grades, Crelles Journal **99**, 258; L. Kronecker, Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen, ib. p. 363. Vgl. auch mehrere Arbeiten von Gegenbauer in den Bänden **95**, **98**, **99**, **102** und **110** der Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien.

Folglich ist N bestimmt durch die Kongruenz

$$(3) \qquad N \equiv \sum_{x=1}^{p-1} \{1 - [f(x)]^{p-1}\} \equiv -1 - \sum_{x=1}^{p-1} [f(x)]^{p-1} \pmod p.$$

Um diese Kongruenz weiter zu entwickeln, setze ich

$$(4) \qquad [f(x)]^{p-1} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r)^{p-1}$$
$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots = \sum C_\mu x^\mu.$$

Dann kommt

$$(5) \qquad \sum_{x=1}^{p-1} [f(x)]^{p-1} = \sum C_\mu (1^\mu + 2^\mu + \cdots + (p-1)^\mu)$$
$$\equiv -(C_0 + C_{p-1} + C_{2(p-1)} + \cdots) \pmod p,$$

da bekanntlich

$$1^\mu + 2^\mu + \cdots + (p-1)^\mu \equiv -1 \quad \text{oder} \quad 0 \pmod p$$

ist, je nachdem μ durch $p-1$ teilbar ist oder nicht.

Aus der Kombination der Kongruenzen (3) und (5) folgt nun zunächst der Satz:

Satz I. Wenn

$$[f(x)]^{p-1} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

ist, so wird die Anzahl N der von Null verschiedenen Wurzeln der Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod p$$

aus der Kongruenz

$$N + 1 \equiv C_0 + C_{p-1} + C_{2(p-1)} + \cdots \pmod p$$

gefunden.

Wir beachten jetzt weiter, daß die $(p-1)^{\text{ste}}$ Potenz von

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r$$

die Entwickelung

$$[f(x)]^{p-1} = \sum a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_{p-1}} x^{s_1 + s_2 + \cdots + s_{p-1}}$$

besitzt, wo $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ unabhängig von einander die Werte $0, 1, 2, \ldots, r$ zu durchlaufen haben. Daher ist

$$(6) \qquad C_0 + C_{p-1} + C_{2(p-1)} + \cdots = \sum a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_{p-1}},$$

wobei die Summation über alle Systeme $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ zu erstrecken ist, für welche die Summe $s_1 + s_2 + \cdots + s_{p-1}$ durch $p-1$ teilbar

ist. Indem man die rechte Seite der Gleichung (6) nach den Potenzprodukten von $a_0, a_1, \ldots, a_r$ anordnet, erhält man

$$(6') \qquad C_0 + C_{p-1} + C_{2(p-1)} + \cdots = (p-1)! \sum \frac{a_0^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{a_r^{\alpha_r}}{\alpha_r!},$$

wo nunmehr die Summe rechter Hand auszudehnen ist auf alle Systeme nicht negativer ganzen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, welche den beiden Bedingungen

$$(7) \; \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = p - 1, \; \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r \equiv 0 \pmod{p-1}$$

genügen. Hiernach läßt sich der Satz I auch in folgende Fassung bringen:

Satz II. Die Anzahl N der von Null verschiedenen Wurzeln der Kongruenz

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \equiv 0 \pmod{p}$$

ist durch die Kongruenz

$$N + 1 \equiv (p-1)! \sum \frac{a_0^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{a_r^{\alpha_r}}{\alpha_r!} \pmod{p}$$

bestimmt, wo die Summation den Bedingungen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = p - 1, \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r \equiv 0 \pmod{p-1}$$

gemäß auszuführen ist.

Nach dem Wilsonschen Satze kann man auch den Faktor $(p-1)!$ durch -1 ersetzen.

Durch den Satz II wird die Bestimmung der Anzahl der Wurzeln einer Kongruenz zurückgeführt auf die Berechnung einer gewissen ganzen ganzzahligen Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der linken Seite der Kongruenz.

2. Diese ganze ganzzahlige Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ besitzt gewisse Invarianteneigenschaften, zu deren Darlegung ich mich nun wende. Dabei ist es zweckmäßig, statt der einen Unbekannten x zwei homogene Unbekannte $x_1 : x_2$ einzuführen und also an Stelle der Kongruenz (2) die folgende

$$(8) \quad f(x_1, x_2) = a_0 x_1^r + a_1 x_1^{r-1} x_2 + a_2 x_1^{r-2} x_2^2 + \cdots + a_r x_2^r \equiv 0 \pmod{p}$$

zu betrachten. Zwei Paare ganzer Zahlen (x_1, x_2) und (x_1', x_2'), welche beide die Kongruenz (8) befriedigen, sind stets und nur dann als nicht verschiedene Lösungen der Kongruenz anzusehen, wenn es eine ganze Zahl ϱ gibt, welche den Kongruenzen

$$x_1' \equiv \varrho x_1, \quad x_2' \equiv \varrho x_2 \pmod{p}$$

genügt. Sind ferner x_1 und x_2 zwei durch p teilbare Zahlen, so befriedigt das Zahlenpaar (x_1, x_2) die Kongruenz (8); ein solches Zahlenpaar wird aber nicht als Lösung der Kongruenz gezählt. Diesen Festsetzungen zufolge ist, wie leicht zu sehen, die Anzahl A der Lösungen der Kongruenz (8) nichts anderes, wie die Anzahl derjenigen unter den $(p+1)$ Zahlenpaaren

$$(x_1, x_2) = (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), \ldots, (1, p-1),$$

welche die Kongruenz (8) befriedigen.

Wenn also, wie oben, N die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln der Kongruenz

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \equiv 0 \pmod p$$

bedeutet, so hat man

$A = N$, wenn weder a_0 noch $a_r \equiv 0 \pmod p$,
$A = N + 1$, wenn einer der beiden Koeffizienten a_0 und $a_r \equiv 0 \pmod p$,
$A = N + 2$, wenn beide Koeffizienten a_0 und $a_r \equiv 0 \pmod p$.

In jedem Falle ist daher

$$A + a_0^{p-1} + a_r^{p-1} \equiv N + 2 \pmod p.$$

Hiernach kann der Satz II auch so formuliert werden:

Satz III. Die Anzahl A der Lösungen der Kongruenz

$$(8) \qquad a_0 x_1^r + a_1 x_1^{r-1} x_2 + a_2 x_1^{r-2} x_2^2 + \cdots + a_r x_2^r \equiv 0 \pmod p$$

befriedigt die Kongruenz

$$(9) \quad A - 1 \equiv \sum \frac{(p-1)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} - a_0^{p-1} - a_r^{p-1} \pmod p,$$

wobei die Summation zu erstrecken ist auf alle Exponentensysteme $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, welche den Bedingungen

$$(10) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = p - 1, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r \equiv 0 \pmod{p-1}$$

genügen.

Die auf der rechten Seite der Kongruenz (9) stehende Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ möge in der Folge mit $A(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ bezeichnet werden. Dieselbe ist eine ganze homogene Funktion $(p-1)^{\text{sten}}$ Grades.

Dies vorausgeschickt, betrachte ich nun eine ganze ganzzahlige lineare Substitution

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2, \end{cases}$$

deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht durch p teilbar ist. Durch diese Substitution gehe die Kongruenz (8) in

$$(12) \qquad b_0 y_1^r + b_1 y_1^{r-1} y_2 + b_2 y_1^{r-2} y_2^2 + \cdots + b_r y_2^r \equiv 0 \pmod p$$

über. Da nun vermöge (11) jedem Zahlenpaare $(y_1, y_2) \pmod p$ ein bestimmtes Zahlenpaar $(x_1, x_2) \pmod p$ entspricht und umgekehrt, so haben die Kongruenzen (8) und (12) genau dieselbe Anzahl von Lösungen Also folgt:

Satz IV. Geht die Form

$$(13) \qquad f(x_1, x_2) = a_0 x_1^r + a_1 x_1^{r-1} x_2 + a_2 x_1^{r-2} x_2^2 + \cdots + a_r x_2^r$$

durch die Substitution (11) *in die Form*

$$(14) \qquad \varphi(y_1, y_2) = b_0 y_1^r + b_1 y_1^{r-1} y_2 + b_2 y_1^{r-2} y_2^2 + \cdots + b_r y_2^r$$

über, so gilt die Kongruenz

$$(15) \qquad A(b_0, b_1, \ldots, b_r) \equiv A(a_0, a_1, \ldots, a_r) \pmod p.$$

In dieser Kongruenz sind $b_0, b_1, \ldots, b_r$ homogene lineare ganzzahlige Funktionen der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$, und die Kongruenz findet statt für jedes System ganzzahliger Werte, welches man den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ beilegen mag. Nun läßt sich aber zeigen, daß die Kongruenz (15) in den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ sogar *identisch* stattfindet, d. h. daß die Differenz

$$A(b_0, b_1, \ldots, b_r) - A(a_0, a_1, \ldots, a_r),$$

wenn man sie als Funktion der unabhängig veränderlich gedachten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ ansieht, den Zahlenfaktor p besitzt.

Es gilt nämlich der Satz[1]):

„Wenn die ganze ganzzahlige Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in keiner der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von höherem als dem $(p-1)^{\text{sten}}$ Grade ist und wenn für jedes ganzzahlige System dieser Variabeln die Kongruenz

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$$

stattfindet, so besitzt die Funktion den Zahlenfaktor p."

Für den Fall *einer* Variabeln folgt dieser Satz unmittelbar aus der Tatsache, daß eine Kongruenz $(\text{mod } p)$ nicht mehr Wurzeln besitzen kann, als ihr Grad angibt, es sei denn, daß sie identisch besteht. Nimmt man nun an, der Satz sei für den Fall von $n-1$ Variabeln

---

1) Siehe K. Hensel, Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler einer Gattung. Crelles Journal **113**, 145.

schon bewiesen, so ergibt sich leicht, daß er auch für jede Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Variabeln gilt. Man ordne die Funktion nämlich nach der Variabeln x_1, wodurch sie die Gestalt

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{p-1} G_1 + x_1^{p-2} G_2 + \cdots + G_p$$

erhält, unter $G_1, G_2, \ldots, G_p$ Funktionen der Variabeln $x_2, \ldots, x_n$ verstanden. Legt man letzteren irgend ein System ganzzahliger Werte bei, so hat die Kongruenz

$$x_1^{p-1} G_1 + x_1^{p-2} G_2 + \cdots + G_p \equiv 0 \pmod p$$

nach Voraussetzung die p Wurzeln $x_1 = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ und ist folglich identisch erfüllt. Es finden also die Kongruenzen

$$G_1 \equiv 0, \quad G_2 \equiv 0, \ldots, G_p \equiv 0 \pmod p$$

für jedes System ganzzahliger Werte $x_2, x_3, \ldots, x_n$ statt; folglich besitzen $G_1, G_2, \ldots, G_p$ und daher auch $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Zahlenfaktor p, w. z. b. w.

Wenn man nun die Differenz $A(b_0, b_1, \ldots, b_r) - A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ als Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ ansieht, so sind für diese Funktion die Voraussetzungen des soeben bewiesenen Satzes erfüllt, und es gilt demnach in der Tat die Kongruenz (15) *identisch* in den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$. Nunmehr führe ich folgende Definition ein: Es liege vor eine ganzzahlige Substitution

$$\text{(S)} \qquad x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2.$$

Vermöge derselben gehe die Form

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^r + a_1 x_1^{r-1} x_2 + a_2 x_1^{r-2} x_2^2 + \cdots + a_r x_2^r,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ unabhängige Variable sind, über in die Form

$$\varphi(y_1, y_2) = b_0 y_1^r + b_1 y_1^{r-1} y_2 + b_2 y_1^{r-2} y_2^2 + \cdots + b_r y_2^r.$$

Wenn nun die ganze ganzzahlige Funktion $F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ der Kongruenz

$$F(b_0, b_1, \cdots, b_r) \equiv F(a_0, a_1, \cdots, a_r) \pmod p$$

identisch genügt (so daß $F(b_0, b_1, \ldots, b_r) - F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ eine Funktion der Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ vorstellt, die den Zahlenfaktor p besitzt), so soll $F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ eine *Invariante der Form* $f(x_1, x_2)$ *modulo* p *bezüglich der Substitution* S heißen. Gleichbedeutend damit seien die Redewendungen $F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ verhalte sich „invariant" oder besitze „Invarianteneigenschaft" (mod p) bezüglich der Substitution S.

Dieses festgesetzt, läßt sich der Satz IV nun vollständiger und kürzer so aussprechen:

Satz V. Die Funktion $A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ ist eine Invariante der Form $f(x_1, x_2)$ modulo p bezüglich jeder ganzzahligen linearen Substitution, deren Determinante nicht durch p teilbar ist.

3. Es ist eine interessante Frage, ob sich die Funktion $A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ durch einfachere invariante Bildungen ausdrücken läßt. Diese Frage erledigt sich leicht, und zwar in bejahendem Sinne, in dem einfachsten Falle $r = 2$, also in dem Falle einer quadratischen Form

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2. \tag{16}$$

Kürze halber werde der Fall $p = 2$ ausgeschlossen, so daß also hier p als eine beliebige ungerade Primzahl vorausgesetzt wird.

Es handelt sich jetzt um die Funktion

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sum \frac{(p-1)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} - a_0^{p-1} - a_2^{p-1}, \tag{17}$$

wobei die Summation rechter Hand gemäß den Bedingungen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = p - 1, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 \equiv 0 \pmod{p-1} \tag{18}$$

auszuführen ist. Wenn man von den Exponentensystemen

$$\alpha_0 = p-1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = p-1$$

absieht, so sind die Bedingungen (18) nur dann erfüllt, wenn

$$\alpha_2 = \alpha_0, \quad \alpha_1 + 2\alpha_0 = p - 1$$

ist. Daher kommt

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sum_{\alpha_0=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{\alpha_0!\,\alpha_0!\,(p-1-2\alpha_0)!} (a_0 a_2)^{\alpha_0} a_1^{p-1-2\alpha_0}. \tag{19}$$

Nun ist ferner

$$\frac{(p-1)!}{\alpha_0!\,(p-1-2\alpha_0)!} = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-2\alpha_0)}{\alpha_0!}$$

$$= 2^{\alpha_0} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{p-2\alpha_0+1}{2}\right) \cdot \frac{(p-2)(p-4)\ldots(p-2\alpha_0)}{1 \cdot 2 \ldots \alpha_0}$$

$$\equiv (-1)^{\alpha_0} \cdot 4^{\alpha_0} \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-3}{2}\right) \cdots \left(\frac{p-2\alpha_0+1}{2}\right) \pmod{p}.$$

Folglich wird

$$A(a_0, a_1, a_2) \equiv \sum \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{p-2\alpha_0+1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \ldots \alpha_0} (-4a_0 a_2)^{\alpha_0} a_1^{p-1-2\alpha_0} \pmod{p},$$

oder endlich

$$A(a_0, a_1, a_2) \equiv (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}. \tag{20}$$

Die Funktion $A(a_0, a_1, a_2)$ *stimmt also mit der* $\frac{p-1}{2}^{\text{ten}}$ *Potenz der Diskriminante* $a_1^2 - 4a_0a_2$ *überein.* Der Satz III gibt für die Anzahl A der Lösungen der Kongruenz

$$a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

die Bestimmung

$$A - 1 \equiv (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

und enthält also die bekannte Tatsache, daß diese Anzahl $A = 2$, 0 oder 1 beträgt, je nachdem die Diskriminante $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ quadratischer Rest oder Nichtrest $(\mathrm{mod}\, p)$ oder durch p teilbar ist.

4. Unter einer „Invariante einer Form $f(x_1, x_2)$ nach dem Modul p" ohne weiteren Zusatz will ich jetzt eine ganzzahlige Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ von $f(x_1, x_2)$ verstehen, welche nach der oben gegebenen Definition sich invariant $(\mathrm{mod}\, p)$ verhält bezüglich jeder Substitution, deren Determinante $\equiv 1 \pmod{p}$ ist. Aus einer derartigen Substitution und einer Substitution von der Gestalt

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \varrho y_2 \tag{21}$$

läßt sich modulo p *jede* ganzzahlige Substitution, deren Determinante nicht durch p teilbar ist, zusammensetzen. Eine Funktion, die sich, wie $A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$, invariant mod. p bezüglich jeder Substitution verhält, deren Determinante nicht durch p teilbar ist, läßt sich daher charakterisieren als eine Invariante, die auch bezüglich jeder Substitution der Gestalt (21) modulo p Invarianteneigenschaft besitzt. Liegt nun die ganze Funktion

$$F = \sum C a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} \tag{22}$$

vor, so verhält sich dieselbe invariant modulo p bezüglich der Substitution (21), wenn identisch

$$\sum C \varrho^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} \equiv \sum C a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} \pmod{p}$$

ist. Soll letztere Kongruenz für jedes nicht durch p teilbare ϱ bestehen, so muß für diejenigen Terme von F, deren zugehörige Zahlenkoeffizienten C nicht durch p teilbar sind, die Bedingung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r \equiv 0 \pmod{p-1} \tag{23}$$

erfüllt sein. Da man Glieder von F, deren Koeffizient C durch p teilbar ist, unterdrücken darf, so folgt also:

Diejenigen Invarianten (und nur sie) verhalten sich modulo p bezüglich sämtlicher Substitutionen mit mod p nicht verschwindender Determinante invariant, welche isobar vom Gewichte 0 *modulo* $p-1$ *sind.* Hiermit ist die invariantentheoretische Bedeutung der zweiten im Satze III auftretenden Summationsbedingung (10) klar gelegt.

5. Die allgemeine Theorie der Invarianten nach einem Primzahlmodul p hat, soviel ich weiß, bislang keine eingehende Bearbeitung erfahren. Sie bietet eine erhebliche Schwierigkeit dar, auf die ich hier noch hinweisen möchte.

Es liege vor eine Gruppe homogener ganzzahliger modulo p betrachteter linearer Substitutionen, die sich auf die Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ beziehen. Die einzelne Substitution S der Gruppe stellt die neuen Variabeln $b_0, b_1 \ldots, b_r$ dar als homogene ganzzahlige lineare Funktionen der alten Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$, was durch die Schreibweise

$$(b_0, b_1, \ldots, b_r) = S(a_0, a_1, \ldots, a_r) \tag{S}$$

angedeutet werde. Die Determinante jeder Substitution S der Gruppe soll modulo p von Null verschieden vorausgesetzt werden. Die Anzahl der Substitutionen einer solchen Gruppe ist eine endliche Zahl n.

Als „Invarianten der Gruppe" sollen nun diejenigen ganzen ganzzahligen Funktionen $F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ der Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ bezeichnet werden, welche für jede Substitution S der Kongruenz

$$F(b_0, b_1, \ldots, b_r) \equiv F(a_0, a_1, \ldots, a_r) \pmod p \tag{24}$$

identisch in den Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ genügen.

Eine der Hauptfragen der Theorie dieser Invarianten ist nun die, ob sich dieselben sämtlich als ganze ganzzahlige Funktionen einer endlichen Anzahl unter ihnen darstellen lassen. Auf Grund eines bekannten fundamentalen Satzes von Hilbert[1]) hat es nun freilich keine Schwierigkeit, diese Frage, und zwar in bejahendem Sinne, zu erledigen für den Fall, daß die Ordnung n der Gruppe nicht durch p teilbar ist. Betrachtet man nämlich das System aller Invarianten, so kann man nach jenem Satze aus diesem Systeme eine endliche Zahl Invarianten $F_1, F_2, \ldots, F_k$ so herausgreifen, daß *jede* Invariante F sich linear in der Form

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_k F_k \tag{25}$$

---

1) D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen, Mathem. Annalen **36**, 485.

darstellen läßt, unter $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ganze ganzzahlige Funktionen von $a_0, a_1, \ldots, a_r$ verstanden. Die Gleichung (25) betrachte man jetzt $(\text{mod}\, p)$ und wende auf dieselbe jede der n Substitutionen der Gruppe an. Durch Addition der entstehenden n Kongruenzen und darauf folgende Division durch n entsteht eine Kongruenz

$$(26) \qquad F \equiv F_1' \cdot F_1 + F_2' \cdot F_2 + \cdots + F_k' \cdot F_k \; (\text{mod}\, p),$$

in welcher nun $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ ebenfalls Invarianten sind. Da auf diese letzteren dieselbe Betrachtung anwendbar ist, die soeben für F angestellt wurde u. s. f., so erkennt man, daß F sich als ganze ganzzahlige Funktion von $F_1, F_2, \ldots, F_k \; (\text{mod}\, p)$ ausdrücken läßt. Diese Schlußweise ist aber nicht mehr anwendbar, sobald die Ordnung n der Gruppe durch p teilbar ist, weil dann die Division durch $n \; (\text{mod}\, p)$ nicht zulässig ist. Die Frage der Endlichkeit der Invarianten für eine Gruppe, deren Ordnung den Faktor p besitzt, bleibt also eine offene, und es scheint, daß dieselbe mit den bekannten Hilfsmitteln nicht leicht erledigt werden kann.

6. Zu einer neuen Darstellung der im Satze III auftretenden Invariante $A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ gelangt man durch folgende Betrachtung:

Bezeichnet $k_0, k_1, \ldots, k_r$ ein System ganzzahliger Werte, so besitzt zufolge des Fermatschen Satzes die Funktion

$$(27) \quad \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_r | k_0, k_1, \ldots, k_r) = [1-(a_0-k_0)^{p-1}][1-(a_1-k_1)^{p-1}] \cdots [1-(a_r-k_r)^{p-1}]$$

die Eigenschaft, für

$$a_0 \equiv k_0, \quad a_1 \equiv k_1, \; \ldots \; a_r \equiv k_r \; (\text{mod}\, p)$$

den Wert 1 $(\text{mod}\, p)$ anzunehmen, dagegen für jedes andere System ganzzahliger Werte, welches man den Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ modulo p beilegen mag, nach dem Modul p zu verschwinden.

Hiernach ist es leicht, die folgende Interpolationsaufgabe zu lösen:

„Man soll eine ganze ganzzahlige Funktion der Variabeln $a_0, a_1, \ldots, a_r$ bilden, welche in keiner der Variabeln von höherem als dem $(p-1)^{\text{sten}}$ Grade ist und für jedes System ganzzahliger Werte $k_0, k_1, \ldots, k_r$ der Variabeln modulo p einen dem betreffenden System beliebig zugeordneten Rest $A_{k_0, k_1, \ldots, k_r}$ annimmt."

Offenbar wird nämlich die Funktion

$$(28) \quad F(a_0, a_1, \ldots, a_r) \equiv \sum A_{k_0, k_1, \ldots, k_r} \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_r | k_0, k_1, \ldots, k_r) \; (\text{mod}\, p)$$

der gestellten Aufgabe genügen, wobei die Summation über alle p^{r+1} verschiedenen Wertsysteme $k_0, k_1, \ldots, k_r \; (\text{mod}\, p)$ auszudehnen ist.

Die Aufgabe gestattet neben der Lösung (28) keine andere modulo p von dieser verschiedene Lösung. Denn ist $F'(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ eine zweite, den gestellten Bedingungen genügende Funktion, so muß nach dem in No. 2 herangezogenen Hilfssatze die Differenz $F'(a_0, a_1, \ldots, a_r) - F(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ nach dem Modul p identisch verschwinden.

Nun hat die Funktion

$$(29)\quad 1 + A(a_0, a_1, \ldots, a_r) = 1 + \sum \frac{(p-1!)}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} - a_0^{p-1} - a_r^{p-1}$$

die Eigenschaft, für $a_0 \equiv a_1 \equiv \cdots \equiv a_r \equiv 0 \pmod p$ den Wert $1 \pmod p$, dagegen für jedes andere System ganzzahliger Werte

$$a_0 \equiv k_0, \quad a_1 \equiv k_1, \cdots, a_r \equiv k_r \pmod p$$

den Wert $A \pmod p$ anzunehmen, unter A die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$(30)\qquad k_0 x_1^r + k_1 x_1^{r-1} x_2 + \cdots + k_r x_2^r \equiv 0 \pmod p$$

verstanden.

Es ergibt sich daher aus dem Vorstehenden unmittelbar der Satz:

Die Funktion (29) *ist nach dem Modul p kongruent der Funktion*

$$(31)\quad \sum A_{k_0, k_1, \ldots, k_r} [1-(a_0-k_0)^{p-1}][1-(a_1-k_1)^{p-1}] \ldots [1-(a_r-k_r)^{p-1}]$$

wobei $A_{0,0,\ldots,0} = 1$ und jeder andere Koeffizient $A_{k_0, k_1, \ldots, k_r}$ bezüglich gleich der Anzahl der Lösungen der Kongruenz (30) *ist.*

Der Vergleich der Koeffizienten in den beiden Darstellungen der Funktion $1 + A(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ ergibt eigentümliche Kongruenzen, denen die Anzahlen $A_{k_0, k_1, \ldots, k_r}$ genügen.

Zürich, im September 1902.

Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface;

Par M. T. Levi-Civita à Padoue.

1. *Remarques préliminaires. Lacune que la rigueur mathématique impose de combler.* — Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface S (que je suppose fixe pour simplifier) sur laquelle est assujetti à rester un point matériel P sollicité par une force donnée (F).

Soient:

X, Y, Z les composantes de (F) suivant les axes coordonnés;

F_T et F_n les valeurs absolues de ses composantes tangentielle et normale dans un point quelconque de la surface S;

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à S, ayant choisi comme direction positive celle pour laquelle

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = F_n.$$

Prenons comme unité de masse la masse de P: dès qu'on suppose sa vitesse différente de zéro, les équations du mouvement seront

$$\begin{cases} x'' = X + N\alpha - f\,|N|\,\dfrac{x'}{v}, \\ y'' = Y + N\beta - f\,|N|\,\dfrac{y'}{v}, \\ z'' = Z + N\gamma - f\,|N|\,\dfrac{z'}{v}. \end{cases} \tag{2}$$

Il est à peine nécessaire de dire que f désigne le coefficient de frottement et N la réaction normale (inconnue auxiliaire, que le système (1), (2) lui-même sert à déterminer).

Si l'on a $v = 0$, la loi empirique du frottement au repos apprend à distinguer deux cas: ou bien, dans la position envisagée M, la composante tangentielle F_T de la force active ne dépasse pas fF_n; ou bien

$$F_T > fF_n.$$

Dans le premier cas le point matériel reste en équilibre, et il s'ensuit la définition du frottement comme une force exactement opposée à la composante tangentielle de la force active (F).

Dans le second cas le point commence à glisser. Après un temps infiniment petit dt sa vitesse n'est plus nulle et les équations (2) s'appliquent.

L'expérience nous fait ainsi prévoir ce fait analytique:

Il existe, sous la condition

$$F_T > fF_n,$$

une solution du système différentiel (1), (2) déterminée par la condition initiale que le mobile sort d'un point donné de la surface avec une vitesse nulle.

Voilà une question d'existence, dont il ne semble pas qu'on se soit préoccupé jusqu'ici au point de vue mathématique. Il s'agit, bien entendu, d'un cas, qui ne rentre pas dans le théorème général de Briot et Bouquet, puisque le système (2) ne se comporte pas régulièrement pour $v = 0$.

Il faut donc examiner la chose de plus près.

C'est ce que je vais faire en transformant d'abord le système différentiel (1), (2). Après cela un petit artifice me permettra de démontrer très simplement, par la méthode classique des limites, l'existence des intégrales dans lesdites conditions initiales.

Je n'ai pas profité des résultats récemment acquis dans l'étude des singularités des équations différentielles[1]), parce que, une fois transformé le système (1), (2), la démonstration directe est presque immédiate. On pourrait s'en passer en appliquant au système (III) (auquel on sera enfin conduit) une remarque de M. Picard.[2])

2. *Transformation des équations du mouvement.* — Je suppose (ce qui est essentiel pour la démonstration du numéro suivant) que la surface S et la loi de la force active soient analytiques.

Je suppose en outre (pour plus de netteté) que la force (F) ne dépende pas de la vitesse du mobile.

Soit M un point régulier pour S et pour le champ de force. La composante tangentielle de (F) enveloppe sur S une congruence de lignes (régulières au voisinage de M), que j'appellerai lignes 1.

Désignons par α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que les tangentes à ces lignes (dans la direction de la force) forment avec les axes coordonnés; par s_1 l'arc (compté dans le même sens); par r_1 le rayon (absolu) de courbure.

---

1) Voir notamment Picard: „Traité d'analyse", T. III, Chap. I, II.

2) Loco citato; pag. 22, remarque finale.

Envisageons encore, sur la surface S, les trajectoires orthogonales 2 des lignes 1 et appelons α_2, β_2, γ_2; s_2; r_2 les éléments qui correspondent à α_1, . . ., r_1 (la direction positive étant d'ailleurs fixée arbitrairement).

Comme les cosinus directeurs de la normale principale à 1 sont

$$r_1 \frac{d\alpha_1}{ds_1}, \qquad r_1 \frac{d\beta_1}{ds_1}, \qquad r_1 \frac{d\gamma_1}{ds_1},$$

on voit que la courbure géodésique g_1 de 1 (projection sur la ligne 2 de la courbure absolue $\frac{1}{r_1}$, dirigée suivant la normale principale) est donnée par la somme

$$\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds_1} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds_1};$$

d'une façon plus concise

$$g_1 = \Sigma\, \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1}, \tag{3}$$

le symbole Σ indiquant une somme de termes semblables en α, β, γ.

De même

$$g_2 = \Sigma\, \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2} \tag{4}$$

représente la courbure géodésique des lignes 2.

Ceci posé, reprenons les équations (2). Pour toute solution régulière (réelle), les coordonnées x, y, z pourront être censées fonctions de t par l'intermédiaire de l'arc s de la trajectoire. En convenant de prendre pour direction positive de s celle du mouvement, on aura

$$\frac{ds}{dt} = v \geqq 0.$$

Soit ϑ l'angle (compté sur le plan tangent à S dans le sens 1, 2) que la direction s forme avec 1.

On a

$$\cos\,(\widehat{1\,s}) = \cos\vartheta, \; \cos\,(\widehat{2\,s}) = \sin\vartheta,$$

et en outre, pour toute fonction des points de S,

$$\frac{d}{ds} = \cos\vartheta\, \frac{d}{ds_1} + \sin\vartheta\, \frac{d}{ds_2}\,. \tag{5}$$

En appliquant cette identité, on obtient

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta\, \frac{dx}{ds_1} + \sin\vartheta\, \frac{dx}{ds_2} = \alpha_1 \cos\vartheta + \alpha_2 \sin\vartheta,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = (-\,\alpha_1 \sin\vartheta + \alpha_2 \cos\vartheta)\, \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds} \cos\vartheta + \frac{d\alpha_2}{ds} \sin\vartheta,$$

avec des formules analogues pour y et z.

Comme

$$x' = v\frac{dx}{ds}, \quad x'' = \frac{d}{dt}\left(v\,\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds} + v^2\,\frac{d^2x}{ds^2}, \text{ etc.,}$$

les équations (2) deviennent

$$(2')\begin{cases} \frac{dv}{dt}(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) \\ \qquad + v^2\left\{(-\alpha_1\sin\vartheta + \alpha_2\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds}\cos\vartheta + \frac{d\alpha_2}{ds}\sin\vartheta\right\} \\ \qquad = X + N\alpha - f\,|\,N\,|\,(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Multiplions ces équations par les cosinus directeurs α, β, γ de la normale et ajoutons. En tenant compte de ce que

$$\Sigma\alpha\alpha_1 = \Sigma\alpha\alpha_2 = 0; \quad \Sigma\alpha^2 = 1,$$

il reste simplement

$$N = -F_n + v^2\,\text{Ъ},$$

ayant posé, pour abréger,

$$\text{Ъ} = \cos\vartheta\,\Sigma\alpha\,\frac{d\alpha_1}{ds} + \sin\vartheta\,\Sigma\alpha\,\frac{d\alpha_2}{ds}\cdot$$

D'après (5) et en profitant de l'identité

$$\Sigma\alpha\,\frac{d\alpha_2}{ds_1} = \Sigma\alpha\,\frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

on peut écrire

$$(7)\qquad \text{Ъ} = \cos^2\vartheta\,\Sigma\alpha\frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin^2\vartheta\,\Sigma\alpha\frac{d\alpha_2}{ds_2} + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\,\Sigma\alpha\,\frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

où chacune des trois sommes possède une interprétation géométrique bien simple (courbure normale de la ligne 1, courbure normale de la ligne 2, valeur commune, au signe près, de la torsion géodésique). Mais cela n'a pas d'importance pour notre but.

Achevons la transformation des (2′) en les multipliant une première fois par

$$\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta,\ \beta_1\cos\vartheta + \beta_2\sin\vartheta,\ \gamma_1\cos\vartheta + \gamma_2\sin\vartheta,$$

une seconde fois par

$$-\alpha_1\sin\vartheta + \alpha_2\cos\vartheta,\ -\beta_1\sin\vartheta + \beta_2\cos\vartheta,\ -\gamma_1\sin\vartheta + \gamma_2\cos\vartheta,$$

et en les ajoutant chaque fois.

Si l'on a égard aux relations

$$\Sigma\alpha_1^2 = 1,\ \Sigma\alpha_2^2 = 1,\ \Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0$$

et à leurs conséquences

$$\Sigma\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} = 0,\quad \Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{ds} = 0,\quad \Sigma\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds} + \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds}\right) = 0,$$

on trouve de suite

$$\frac{dv}{dt} = F_T \cos\vartheta - f\,|\,F_n\,|,\qquad v^2\left(\frac{d\vartheta}{ds} + \Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds}\right) = F_T \sin\vartheta.$$

Or

$$v\,\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

tandis que, d'après (5),

$$\Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} = \cos\vartheta\,\Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin\vartheta\,\Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

ou, en remarquant que

$$\Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} = g_1,\ \Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2} = -\,\Sigma\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2} = -\,g_2,$$

$$\Sigma\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} = g_1 \cos\vartheta - g_2 \sin\vartheta.$$

Il résulte ainsi

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = F_T \cos\vartheta - f\,|\,N\,|, \\ v\,\dfrac{d\vartheta}{dt} = -\,v^2\,(g_1 \cos\vartheta - g_2 \sin\vartheta) - F_T \sin\vartheta. \end{cases}$$

Pour aller plus loin, imaginons de rapporter la surface S à un système de coordonnées curvilignes q_1, q_2, ayant les 1, 2 pour lignes coordonnées (et croissant, sur ces lignes, dans le sens positif).

L'expression du carré de l'élément linéaire sera de la forme

$$H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2,$$

H_1 et H_2 étant des fonctions de q_1, q_2, positives et régulières en tout point régulier M de la surface.

Il en est de même, quant à la régularité, pour les coefficients b_{rs} de la seconde forme fondamentale

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\,dq_r\,dq_s,$$

qui n'est autre que la forme

$$\alpha\,d^2x + \beta\,d^2y + \gamma\,d^2z,$$

exprimée par les q.

On a évidemment

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dx}{dq_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dy}{dq_1}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{H_1}\frac{dz}{dq_1};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dx}{dq_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dy}{dq_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{H_2}\frac{dz}{dq_2};$$

et l'on vérifie sans peine, d'après (3), (4) et (7) (en tenant compte des expressions bien connues des coefficients des deux formes fondamentales) que

$$(9) \qquad \begin{cases} g_1 = -\dfrac{1}{H_1 H_2}\dfrac{dH_1}{dq_2}, \quad g_2 = -\dfrac{1}{H_1 H_2}\dfrac{dH_2}{dq_1}, \\ \mathfrak{b} = \dfrac{b_{11}\cos^2\vartheta + b_{22}\sin^2\vartheta + 2b_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta}{H_1 H_2}. \end{cases}$$

Je signale en passant ces formules, auxquelles il faudrait avoir recours dans les applications concrètes. Ce qu'il nous faut retenir ici, c'est que g_1, g_2, les b, ainsi que F_T, F_n, f sont des fonctions holomorphes de q_1, q_2 en tout point régulier M (q_1^0, q_2^0).

Pour $v = 0$, l'équation (6) donne

$$N = -F_n.$$

F_n étant positif, on voit que, pour v assez petit, l'on a

$$|N| = F_n - v^2\mathfrak{b}.$$

La forme définitive des équations du mouvement s'obtient en associant aux (8) celles qui définissent les dérivées de q_1 et q_2.

Or on a

$$\frac{dq_1}{dt} = v\frac{dq_1}{ds},$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{dq_1}{dt} = v\left(\cos\vartheta\frac{dq_1}{ds_1} + \sin\vartheta\frac{dq_1}{ds_2}\right) = v\frac{\cos\vartheta}{H_1}.$$

D'une façon analogue

$$\frac{dq_2}{dt} = v\frac{\sin\vartheta}{H_2}.$$

On est ainsi conduit au système du quatrième ordre

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = v\dfrac{\cos\vartheta}{H_1}, \quad \dfrac{dq_2}{dt} = v\dfrac{\sin\vartheta}{H_2}, \\ \dfrac{dv}{dt} = F_T\cos\vartheta - f(F_n - v^2\mathfrak{b}), \\ v\dfrac{d\vartheta}{dt} = -v^2(g_1\cos\vartheta - g_2\sin\vartheta) - F_T\sin\vartheta, \end{cases}$$

les fonctions inconnues étant q_1, q_2, v et ϑ.

Au voisinage des valeurs q_1^0, q_2^0 (quels que soient d'ailleurs v et ϑ) tout est régulier dans les seconds membres. F_T, $F_T - fF_n$ sont essentiellement positifs.

3. *Existence d'une solution holomorphe correspondante aux valeurs initiales* $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, $v = 0$. — En prenant les équations du mouvement sous la forme (I), notre tâche revient évidemment à démontrer l'existence d'une solution holomorphe correspondante aux valeurs initiales $q_1 = q_1^0, q_2 = q_2^0$, $v = 0$, celle de ϑ n'étant pas donnée à priori.

La dernière des équations (I) montre d'abord que, si une telle solution existe, la valeur initiale de ϑ doit annuler $\sin\vartheta$; d'où $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$.

La seconde hypothèse est à rejeter, puisqu'elle donnerait, pour l'instant initial,

$$\frac{dv}{dt} = - F_T - fF_n;$$

v irait donc en décroissant, ce qui est impossible, parce que sa valeur initiale est nulle.

On a donc initialement $\vartheta = 0$, ce qui était à prévoir, le mouvement devant bien commencer dans la direction de la force.

En éliminant dt et en posant, pour abréger,

$$D = F_T \cos\vartheta - f(F_n - v^2 Ъ),$$

on tire de (I)

$$\text{(II)} \quad \frac{dq_1}{dv} = v\frac{\cos\vartheta}{H_1 D}, \quad \frac{dq_2}{dv} = v\frac{\sin\vartheta}{H_2 D}, \quad v\frac{d\vartheta}{dv} = -v^2\frac{g_1\cos\vartheta - g_2\sin\vartheta}{D} - \frac{F_T}{D}\sin\vartheta.$$

On remarquera que les seconds membres sont des fonctions holomorphes des arguments q_1, q_2, ϑ, v au voisinage des valeurs q_1^0, q_2^0, 0, 0, puisque D ne s'annule pas pour ce système de valeurs ($D = F_T - fF_n$).

Il est bien clair après cela qu'on peut se borner à démontrer l'existence de trois intégrales holomorphes q_1, q_2, ϑ de (II), se réduisant respectivement à q_1^0, q_2^0, 0 pour $v = 0$.

En développant $-\frac{F_T}{D}\sin\vartheta$ suivant les puissances de $q_1 - q_1^0$, $q_2 - q_2^0$, ϑ et en appelant c la valeur essentiellement positive du rapport

$$\frac{F_T}{F_T - fF_n}$$

au point M (q_1^0, q_2^0), on peut écrire

$$-\frac{F_T}{D}\sin\vartheta = -c\vartheta + \ldots,$$

les termes omis étant du second ordre au moins.

Posons maintenant

$$(10) \qquad q_1 = q_1^0 + v\tau_1, \quad q_2 = q_2^0 + v\tau_2, \quad \vartheta = v\tau$$

et remarquons que les seconds membres de (II), qui sont des fonctions régulières de q_1, q_2, ϑ, v dans le domaine des valeurs $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, $\vartheta = 0$, $v = 0$, deviennent, d'après la substitution (10), des fonctions régulières de τ_1, τ_2, τ, v pour la valeur zéro de tous ces arguments. Les termes du second ordre, par rapport aux arguments primitifs, obtiennent le facteur v^2 lorsqu'on les exprime par les nouvelles variables.

Après cela on reconnaît sans peine que la substitution (10) permet de présenter le système (II) sous la forme

$$(\text{III}) \quad v\frac{d\tau_1}{dv} + \tau_1 = v\mathfrak{P}_1, \quad v\frac{d\tau_2}{dv} + \tau_2 = v\mathfrak{P}_2, \quad v\frac{d\tau}{dv} + (c+1)\,\tau = v\mathfrak{P},$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ désignant des fonctions de τ_1, τ_2, τ, v régulières pour des valeurs assez petites de ces variables.

Démontrer l'existence des intégrales holomorphes de (II), qui se réduisent à q_1^0, q_2^0, 0 pour $v = 0$, équivaut évidemment à démontrer l'existence d'un système d'intégrales de (III) holomorphe pour $v = 0$.

Les valeurs initiales de τ_1, τ_2, τ, qui ne restent pas déterminées par la transformation (10), le sont par les équations (III) elles-mêmes, qui donnent, pour $v = 0$,

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0.$$

En les dérivant, par rapport à v, $n + 1$ fois et en posant ensuite $v = 0$, on obtient

$$(11) \quad (n+1)\frac{d^n\tau_1}{dv^n} = \ldots, \quad (n+1)\frac{d^n\tau_2}{dv^n} = \ldots, \quad (n+c)\frac{d^n\tau}{dv^n} = \ldots,$$

les seconds membres ne dépendant que de τ_1, τ_2, τ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ au plus.

Le système détermine donc les valeurs des fonctions inconnues (supposées holomorphes) et de toutes leurs dérivées, pour $v = 0$.

Tout se réduit désormais à vérifier la convergence des séries de Taylor construites avec ces valeurs.

Appliquons le calcul des limites et comparons notre système (III) avec le système

$$(\text{IV}) \quad v\frac{d\tau_1}{dv} + \tau_1 = v\mathfrak{M}_1, \quad v\frac{d\tau_2}{dv} + \tau_2 = v\mathfrak{M}_2, \quad v\frac{d\tau}{dv} + (c+1)\,\tau = v\mathfrak{M},$$

qui en résulte en remplaçant dans les seconds membres $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ par des *fonctions majorantes* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}$.

Les dérivées successives des intégrales de (IV) (supposées holomorphes et nulles pour $v = 0$) sont déterminées par des systèmes

$$(12)\quad (n+1)\frac{d^n\tau_1}{dv^n} = \ldots,\quad (n+1)\frac{d^n\tau_2}{dv^n} = \ldots,\quad (n+c)\frac{d^n\tau}{dv^n} = \ldots,$$

de même forme que (11), les seconds membres étant toutefois remplacés par des expressions majorantes.

Les dérivées successives, calculées ainsi, sont donc essentiellement positives et supérieures en valeur absolue à celles qui s'obtiennent de (11) pour le système proposé.

La constante c étant positive, on augmente encore cette valeur si, pour $n > 0$, on remplace les premiers membres de (12) par

$$n\frac{d^n\tau_1}{dv^n},\qquad n\frac{d^n\tau_2}{dv^n},\qquad n\frac{d^n\tau}{dv^n},$$

en gardant, pour $n = 0$, les conditions $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$.

Les valeurs, ainsi modifiées, correspondent au système

$$v\frac{d\tau_1}{dv} = v\mathfrak{M}_1,\quad v\frac{d\tau_2}{dv} = v\mathfrak{M}_2,\quad v\frac{d\tau}{dv} = v\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire au système

$$(\mathrm{V})\qquad \frac{d\tau_1}{dv} = \mathfrak{M}_1,\quad \frac{d\tau_2}{dv} = \mathfrak{M}_2,\quad \frac{d\tau}{dv} = \mathfrak{M},$$

qui n' a plus de singularités pour $v = 0$.

Or le théorème classique de Briot et Bouquet nous assure de la convergence des séries intégrales de (V), sous les conditions initiales

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$$

pour $v = 0$.

On peut donc affirmer la convergence (pour v assez petit) des séries de Taylor donnant les intégrales du système (III).

L'existence des intégrales holomorphes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système primitif (1), (2) (sous la condition que le mobile sorte initialement d'une position régulière M avec une vitesse nulle) est ainsi démontrée. Évidemment ce système intégral holomorphe est unique.

Remarque. — La démonstration s'étend d'elle-même au cas où la force (F) dépendrait de la vitesse (ses composantes restant holomorphes pour $v = 0$).

En effet, on est encore conduit à un système de la forme (III).

Si la surface S varie avec le temps, il faut modifier la mise en équation, et en outre on ne peut plus éliminer t (ce qui arrive aussi lorsque la force dépend de t).

Il suffit toutefois de considérer comme variable indépendante la vitesse relative du point par rapport aux éléments matériels de la surface S pour que la démonstration puisse être achevée, substantiellement, comme ci-dessus.

Padoue, le 5 septembre 1902.

Brief von Leverrier an Jacobi.

Mitgeteilt von Herrn E. JAHNKE in Berlin.[1])

Paris le 24 Janvier 1848.

Monsieur et très-illustre Confrère,

J'ai reçu avec un grand bonheur la lettre que vous avez bien voulu m'adresser sur l'observatoire de Königsberg. Habitué que je suis à ne pas compter dans vos mémoires les *grands événements* qui nous imposent la douce obligation de vous admirer, j'ai lu avec respect ces pages de notre grand géomètre, pages que je destine à mes archives de famille. Ce n'est pas non plus sans émotion que j'ai pu jouir de ces détails empruntés à l'intimité de l'illustre Bessel, et dans lesquels respirent à la fois et votre entier dévoument à la science et les sentiments de l'amitié.

Que ne puis-je vous donner un avis sur la haute question que vous soulevez? Mais je ne suis qu'un astronome calculateur; et en pareille matière on tiendrait sans doute peu de compte de mon opinion. Je suis loin de dire qu'on aurait tort. Struve, Encke, Airy sont nos maîtres et je dois m'en rapporter à leur témoignage.

Permettez-moi donc, mon illustre confrère, de ne point aborder la question des *procédés* d'observation, mais bien la valeur des observations elles-mêmes. Sur ce point je ne me récuse pas; car en discutant les observations, j'ai appris à les connaître, peut-être mieux quelquefois que ceux qui les avaient faites; et c'est pourquoi je prends la liberté d'en parler. Si ma manière de voir à ce sujet cadre avec vos vues,

---

1) Bezüglich der Herkunft des Briefes vergleiche die Anmerkung 2) auf S. 268 des vierten Bandes dieses Archivs.

ou si elle s'en éloignera, je l'ignore. Ce sera à vous d'établir la relation entre vous et moi, et je m'en rapporte à vos déductions. Je réclamerai seulement que vous veuillez bien me les faire connaître. J'y gagnerai à la fois de m'instruire par votre discussion et de continuer des relations dont vous ne voudriez pas me priver après m'en avoir fait une première fois apprécier le charme.

Plus d'un astronome a soutenu cette thèse qu'il fallait faire beaucoup, beaucoup d'observations! Bonnes ou mauvaises? Oh, c'était à peine si cela importait suivant eux. On prendrait la moyenne, et l'on ne saurait manquer d'obtenir ainsi la vérité.

Sans-doute, personne n'oserait aujourd'hui s'exprimer avec une pareille netteté sur une aussi détestable théorie. Et cependant elle représente, avec exagération si on le veut, l'esprit des astronomes qui se refuseraient à suivre ceux de leurs confrères qui auraient été assez heureux pour ouvrir aux observations la voie d'une plus grande perfection. La science ne s'inquiète en aucune façon que les observations qui lui serviront de base soient anglaises, prussiennes, russes ou françaises. Il n'y a que leur exactitude qui lui importe. Et je ne crois pas me tromper en prédisant que dans un avenir éloigné, lorsque les intérêts particuliers auront disparu, il ne survivra réellement que la mémoire d'un établissement représentant à chaque époque le degré d'avancement de la science d'observation. Ce sera l'observatoire de Maskeline à la fin du dernier siècle, celui de Bradley en 1760, celui de Bessel vers 1820, celui de ..... permettez-moi de ne pas poursuivre cette énumération. Il est donc déjà, suivant moi, d'un grand intérêt national pour un pays d'avoir chez lui l'observatoire le plus avancé dans la science de l'observation; puisqu'il s'assure par là d'être le représentant de son époque aux yeux de la postérité, qui ne manquera pas de regarder, dans sa juste critique, les autres établissements comme étant en arrière de l'état de la civilisation.

L'opinion qu'on peut se contenter d'observations, moitié bonnes, moitié mauvaises et nombreuses! C'est celle des médiocrités qui n'osent affronter les difficultés des déterminations précises: c'est celle des paresseux qui ne peuvent voir sans effroi Bessel leur proposer de faire des observations en huit points de son cercle. Eh Messieurs, il ne s'agit ni de votre amour-propre ni de votre peine; mais bien de savoir si cela est indispensable à la rigueur des observations. Car s'il en est ainsi, et que vous persistiez dans une opinion qui place vos travaux au-dessous de ceux des autres, et les frappe ainsi de nullité dans l'avenir, j'ajoute: c'est l'opinion des gens peu honnêtes, qui laissent tomber par leur mollesse les établissements que le pays leur a confiés.

On commande une lunette méridienne à Munich (ou à Paris du temps que Gambey vivait), on se munit d'un cercle méridien et d'une horloge. Puis les mains, derrière le dos, on vient, au moment fixé par l'Ephéméride de Berlin, constater le moment du passage d'une étoile par un fil et observer sa bissection par un autre. On est astronome en moins de temps qu'il n'en faut à un musicien pour apprendre à battre la mesure.

Je vous le dis franchement, mon illustre confrère, je ne vois pas que l'astronomie puisse avoir maintenant rien à gagner avec des observations de cette espèce. Voici mes raisons, que vous pèserez.

On prend, par exemple, quatre mille observations du soleil pour étayer sa théorie. On y applique la méthode des moyennes ou celles des moindres quarrés, peu importe; on s'en remet au grand nombre des observations pour faire disparaître les erreurs dont elles sont affectées individuellement. Or il peut se faire qu'il y ait des erreurs systématiques, communes à plusieurs observatoires, venant de ce que le procédé d'observation y est le même, et qui ne disparaissent pas du tout en prenant les moyennes. L'accumulation des observations ne peut servir qu'à mieux constater l'écart, sans donner en aucune façon une position plus précise pour l'astre considéré. Il n'y a qu'un moyen de sortir de là: c'est d'étudier avec une profonde attention toutes les causes d'erreurs, surtout les erreurs systématiques, et de chercher les moyens d'en atténuer l'effet. Dans les circonstances où l'on a été assez heureux pour y parvenir on a bientôt reconnu qu'il n'était pas besoin de milliers d'observations pour arriver à la vérité, et qu'un petit nombre suffisait réellement. Conclusion qui me paraît de la plus haute importance.

Un résultat déduit de milliers d'observations est en effet presque indiscutable. S'il cadre partout avec les observations, cela est bien. Mais dans le cas contraire, vous vous trouvez en présence d'anomalies dont vous ne pouvez démêler ni le sens ni la cause, et vous êtes réduit à dire avec Bessel lui-même: Non eos fecit progressus theoria solis, quos polliceri videbatur, et ingens numerus et bonitas observationum, sans en pouvoir déduire aucune conséquence précise sur la constitution de notre système solaire. Cette phrase, sous la plume d'un aussi grand critique que Bessel, dans la bouche d'un homme qui ne reculait pas devant les grandes conceptions, est la condamnation des théories basées sur un très-grand nombre d'observations. Je ne doute pas que Bessel ne fût arrivé, au moyen d'un petit nombre d'observations à des résultats tout aussi précis que ceux qu'il nous a donnés. Et peut-être alors, il aurait pu démêler la cause des anomalies dont il a été réduit à déplorer l'existence.

N'allez pas m'objecter que j'ai moi-même fondé des théories sur de très-grands nombres d'observations. On n'arrive guère à la vérité que par le chemin de l'erreur, et après en avoir essuyé tous les ennuis. C'est donc pour en avoir éprouvé tous les inconvénients et toute l'inutilité que je dis adieu aux théories basées sur un „ingens numerus observationum", bien résolu, dans de nouvelles recherches que j'ai entreprises, et auxquelles je travaille avec ardeur, à ne faire concourir qu'un petit nombre de positions, dont je saurai apprécier le degré de précision. Par là, et par là seulement, les résultats deviendront discutables, et nous pourrons savoir s'il y a dans le monde des causes agissantes dont l'existence ne nous a pas encore été révélée d'une manière certaine.

Où prendrai-je ce petit nombre d'observations excellentes? J'ai compté, je vous le déclare, et je compterai toujours sur l'observatoire de Königsberg, pour une partie de ce dont j'aurai besoin. Si vos tristes prévisions devaient se réaliser, ce qu'à Dieu ne plaise, je porterais avec vous non seulement le deuil de l'observatoire de Königsberg, mais encore celui d'une partie de mes plus légitimes espérances, dans les faibles services que j'espère rendre à l'astronomie. Mais il n'en saurait être ainsi; que le futur directeur de l'observatoire de Königsberg soit un élève d'Encke ou de Bessel, Galle ou Busch. L'un et l'autre comprendront sans doute qu'ils ont pour premier devoir de compléter l'œuvre du maître; et qu'en acceptant la survivance de Bessel ils contracteront envers l'astronomie de nouvelles et immenses obligations. J'ai confiance dans l'élève de Bessel. J'ai confiance aussi dans Galle, le *seul* astronome que j'ai pu décider, *malgré de très-vives instances faites en plus d'un lieu*, à chercher la planète dans le ciel.

Excusez-moi, mon illustre confrère, si j'ai emprunté le secours d'une plume étrangère. Ma vue exige en ce moment ces ménagements. Je vous ai écrit en grande confiance que vous ne laisseriez pas passer cette lettre sous les yeux de ceux qu'elle pourrait contrarier, ce que mon ignorance des vues personnelles de vos hommes éminents aurait pu produire. Je vous ai exposé des vues générales sans aucune application personnelle.

Veuillez offrir mes compliments à M. Encke, à qui j'écrirai sous peu de jours pour la question astronomique dont je lui ai parlé.

Agréez, Monsieur et illustre confrère, l'expression de mon profond et affectueux respect.

5, rue St. Thomas d'Enfer. M. E. Leverrier.

Brief von Liouville an Jacobi.

Mitgeteilt von Herrn E. Jahnke in Berlin.[1])

Paris, 1er juin 1846.

Monsieur et cher ami.

Nous voici arrivés à la séance solemnelle, le scrutin est ouvert, et dès à présent je suis certain que vous allez être proclamé associé étranger de notre Académie. Permettez-moi de me féliciter d'avoir pu contribuer pour ma faible part à cet heureux résultat, comme membre de la Commission que l'Académie avait nommée pour préparer une liste de candidats. C'est par les noms de Newton et de Leibnitz que s'ouvre notre liste d'associés; les noms de Gauss et de Jacobi figureront dignement à côté. Vous seul pouviez nous consoler de la perte si grande que nous avons faite par le décès de M. Bessel.

Jouissez, mon cher ami, jouissez longtemps de votre gloire, et conservez avec soin cette bonne santé que vous avez enfin retrouvée. Adieu, je vous écris à la hâte; le Secrétaire vous préviendra officiellement de votre nomination, mais j'ai voulu vous l'annoncer de suite. Si vous avez la bonté de m'écrire quelques mots d'ici à quatre mois, adressez-moi votre lettre à Toul (en Lorraine) où je vais aller passer quelque temps près de mon père. Je serai là voisin de M. Hermite qui habite ordinairement Nancy; nous relirons vos ouvrages, et peut-être y puiserons-nous bientôt quelque occasion scientifique de vous écrire. — Peloure se rappelle à votre souvenir. — Mille amitiés à notre excellent Dirichlet et à MM. Steiner et Crelle.

Votre dévoué confrère
J. Liouville.

P.S. On vient de dépouiller le scrutin; il y avait 47 votants; vous avez obtenu 46 voix; à *une* voix près, l'unanimité.

1) Über die Herkunft des Briefes vergleiche die Anmerkung 2) auf S. 268 des vierten Bandes dieses Archivs.

Über die Auflösung der transcendenten Gleichung

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(2\lambda+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Von Hans R. G. Opitz in Berlin.

Zu denjenigen analytischen Funktionen, welche wegen ihrer vielseitigen praktischen Verwendung dem Mathematiker geradezu unentbehrlich geworden sind, gehören bekanntlich die Transcendenten

$$\int_0^x e^{-x^2}\, dx \text{ und } \int_x^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

deren Bedeutung nicht überschätzt erscheint, wenn Hr. J. W. L. Glaisher dieselben ihrer Wichtigkeit nach gleich hinter den Logarithmen und den trigonometrischen Funktionen rangiert.[1]) Man hatte deshalb auch schon frühzeitig die genannten und in enger Beziehung zu ihnen stehenden Funktionen in Tafeln gebracht, um ihre Werte für die durch die Anwendungen gegebenen Argumente stets bereit zu halten.[2])

1) Philosophical Magazine **42**, 294 u. 421, London, July — December 1871: On a Class of Definite Integrals. — Es fehlt zur Zeit noch immer sowohl an einer einheitlichen Bezeichnung als auch an einem allgemein angenommenen Namen für diese Funktionen. Die von Glaisher vorgeschlagenen Namen Error-function und Error-function-complement und die Bezeichnungen

$$\int_x^\infty e^{-u^2} du = \operatorname{Erf} x, \quad \int_0^x e^{-u^2} du = \operatorname{Erfc} x$$

haben wenig Verbreitung in Deutschland gefunden. Bei Abfassung der Schrift „Die Kramp-Laplacesche Transcendente und ihre Umkehrung" (Berlin, Osterprogramm 1900 des Königstädt. Realgymn.) ist mir weder der Name noch die Bezeichnung bekannt gewesen. Ich habe dort das Zeichen $\Phi(x)$ benutzt, um die Funktion, welche Gauß mit $\theta(x)$ bezeichnet hatte, einzuführen; dasselbe schien in der neueren deutschen Litteratur allgemein angenommen worden zu sein. Ich sehe aber, daß einige Autoren wieder zu dem Gaußischen Zeichen zurückkehren. Vgl. z. B. E. Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, wo auch Erf gebraucht wird, und H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1900/1901.

2) Über die Tafeln vgl. Glaisher a. a. O. — Jos. Burgess: On the definite Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \varepsilon^{-t^2} dt$, with extended tables of values. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 39, 1900, issued separately 25th March 1898. — Encyklopädie der mathem. Wissensch., Leipzig 1901, Bd. I. 6 pag. 757 u. 775.

Wenn aber C. F. Gauß, um von dem Gange der Funktion

(1) $$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx$$

eine Vorstellung zu geben[1]), das Täfelchen

$$\begin{aligned}
0{,}500\,0000 &= \theta(0{,}476\,9363)\\
0{,}600\,0000 &= \theta(0{,}595\,1161)\\
0{,}700\,0000 &= \theta(0{,}732\,8691)\\
0{,}800\,0000 &= \theta(0{,}906\,1939)\\
0{,}842\,7008 &= \theta(1)\\
0{,}900\,0000 &= \theta(1{,}163\,0872)\\
0{,}990\,0000 &= \theta(1{,}821\,3864)\\
0{,}999\,0000 &= \theta(2{,}327\,6754)\\
0{,}999\,9000 &= \theta(2{,}751\,0654)\\
1 &= \theta(\infty)
\end{aligned}$$

konstruiert, so hat er damit zugleich das Problem der Umkehrung der genannten Funktion gestellt; denn bedient man sich des Funktionszeichens Ω, so würde das Täfelchen besser

$$\Omega(0{,}5) = 0{,}476\,9363$$

u. s. w.

geschrieben werden.

Trotzdem man auf dieses Umkehrungsproblem vielfach gestoßen war, hatte man dennoch eine direkte Lösung desselben nicht unternommen. Th. v. Oppolzer behauptete sogar[2]), daß die Gleichung

(2) $$\int_0^x e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

„nur durch Versuche gelöst werden kann, etwa in der Weise, daß man sich eine Integraltafel für das vorliegende Integral mit dem Argument 'obere Grenze' entwirft und jenen Wert des Arguments durch Interpolation zu finden sucht, der der Relation (2) genügt“.

---

1) Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift f. Astron. u. verw. Wiss., hrsgb. v. B. v. Lindenau u. J. G. F. Bohnenberger, **1**, 185, 1816 = Ges. Werke **4**, 110.

2) Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Leipzig 1880, **2**, 292.

Auf einen anderen „Versuch“, die Gleichung (2) zu lösen, wird man durch die Entwickelung der Transcendente in eine Potenzreihe hingewiesen:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(2\lambda+1)}.$$

Das bereits bei A. Meyer[1]) und G. Hagen[2]) angedeutete indirekte Verfahren der successiven Annäherung des Wertes dieser Reihe an die gegebene Größe ist vor kurzem in ausgiebigster Weise von Hrn. Jos. Burgess benutzt worden, um den Wert $x = \varrho$, welcher der Gleichung

$$(3)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(2\lambda+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

genügt, auf 24 Dezimalstellen zu berechnen[3]), während Th. v. Oppolzer einen 10-stelligen Wert gegeben hatte[4]), der — wie er sagt — „nur um wenige Einheiten der zehnten Dezimale unrichtig sein kann“. Hr. Burgess hat übrigens aus der von ihm neu berechneten Tafel für das Integral (1) durch einfache Interpolation auch das Gaußische Täfelchen noch auf die Werte 0,1 bis 0,4 des Arguments erweitert.

Eine direkte Methode zur Auflösung der Gleichung

$$(4)\qquad 2\cdot\int_0^x e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\cdot a,$$

wo a eine gegebene zwischen 0 und 1 liegende Größe bezeichnet, läßt sich aus der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades

$$(5)\qquad (1-\sigma)\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = \frac{\pi}{2}$$

herleiten[5]), indem man zuvörderst die Funktion

$$(6)\qquad \sigma = \Psi(\tau)$$

1) Vorl. über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch bearb. v. E. Czuber, Leipzig 1879, pag. 251.

2) Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, III. Aufl. Berlin 1882, S. 78.

3) a. a. O. S. 277, vgl. oben Fußnote 2.

4) a. a. O. S. 295, vgl. oben Fußnote 4. Th. v. Oppolzer hat für seine Zwecke eine besondere Tafel für das Integral $\int_0^t e^{-t^2}dt$ berechnet.

5) Man vgl. II. Teil des Osterprogr. 1900 des Königstädt. Realgymn. zu Berlin.

unter der näheren Bestimmung

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(1) = 1,$$

(6a) $$\Psi'(0) = 0, \quad \Psi''(0) = \frac{\pi}{2}$$

aufstellt. Setzt man dann

(7) $$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\pi} \cdot \Omega(\tau),$$

so ist $x = \Omega(a)$ eine Lösung der vorgelegten transcendenten Gleichung (4). Die Funktion $\Psi(\tau)$ läßt sich in Form einer Potenzreihe

$$\Psi(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{2\lambda} \cdot \tau^{2\lambda}$$

darstellen, deren Koeffizienten der Rekursionsformel

(8) $$\alpha_{2\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1} \frac{2\lambda(2\lambda-1)}{2\varkappa(2\varkappa-1)} \alpha_{2\lambda} \alpha_{2\varkappa-2\lambda}$$

genügen; dabei ist $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ zu setzen.

Hiernach läßt sich die Reihe

(9) $$\sqrt{\pi} \cdot \Omega(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \beta_{2\lambda-1} \tau^{2\lambda-1}$$

leicht bilden. Will man in den Koeffizienten die Irrationalitäten absondern, so erhält man

(10) $$x = \Omega(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \omega_{2\lambda-1} \tau^{2\lambda-1},$$

wobei

(10a) $$\sqrt{\pi} \cdot \omega_{2\lambda-1} = 2 \cdot \frac{C_{2\lambda} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\lambda}}{(\lambda-1)! \prod_{\mu=1}^{\lambda} (2\mu-1)}$$

die Größen $\omega_{2\lambda-1}$ bestimmt. Die Größen $C_{2\lambda}$, deren Zusammenhang mit den Koeffizienten $\alpha_{2\varkappa}$ durch die Relation

(10b) $$(2\varkappa)!\, \alpha_{2\varkappa} = C_{2\varkappa} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{2\varkappa}$$

gegeben wird, haben die ganzzahligen Werte

$C_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$
$C_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$
$C_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$
$C_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 127$
$C_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4\,369$
$C_{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 243\,649$
$C_{14} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 20\,036\,983$
$C_{16} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\,280\,356\,863$
$C_{18} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 343\,141\,433\,761$
$C_{20} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 65\,967\,241\,200\,001$
$C_{22} = \ldots\ldots\ldots\ldots 15\,773\,461\,423\,793\,767$
$C_{24} = \ldots\ldots\ldots 4\,591\,227\,123\,230\,945\,407$
$C_{26} = \ldots\ldots 1\,598\,351\,733\,247\,609\,852\,849$
$C_{28} = \ldots 655\,782\,249\,799\,531\,714\,375\,489$
$C_{30} = 313\,160\,393\,864\,973\,852\,338\,669\,783$

u. s. w.

Die Auswertung der Funktion $\Omega(\tau)$ z. B. nach der Formel (9) ist nicht mehr beschwerlich, sobald man einmal die Koeffizienten der betreffenden Reihe berechnet hat. Um den Wert $\varrho = \Omega(\frac{1}{2})$ auf 10 Dezimalen genau zu bestimmen, sind 16 Glieder der Reihe zu berücksichtigen, während bekanntlich die Berechnung der Basis e der natürlichen Logarithmen mit demselben Grad der Genauigkeit nur zwei Glieder weniger erfordert. Die Rechnung mit solchen Potenzreihen bietet aber ganz besonders den Vorteil, daß man die Fehlergrenzen genau anzugeben im stande ist. Der Wert $x = \varrho$, welcher der Gleichung (2) genügt, bestimmt sich auf diese Weise zu 0,476 9362 762, $F < 0{,}5 \cdot 10^{-10}$. Th. v. Oppolzer hat — wie oben erwähnt — mit Hilfe seiner Tafel die zehnte Stelle nicht genau angeben können; dagegen stimmt der nach unserer Methode gefundene Wert mit demjenigen überein, welchen Hr. Burgess berechnet hat:

$$\varrho = 0{,}476\,936\,276\,204\,469\,873\,383\,506;$$

jedoch fehlt auch hier die genaue Abschätzung des Fehlers.

Endlich bleibt noch zu erwähnen, daß bei der Berechnung einer Tafel für die Funktion $\Omega(\tau)$ alle Bequemlichkeiten, welche eine einfache Potenzreihe dem Rechner darbietet, von nicht zu unterschätzendem Vorteil sind.

Berlin, im August 1901.

Von der Periodizität der Kettenbrüche, in welche sich Irrationale zweiten Grades entwickeln lassen.

Von L. MATTHIESSEN in Rostock.

Über die Verwandlung der irrationalen Wurzeln quadratischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten in periodische Kettenbrüche sind bereits früher von Serret[1]) mehrere wichtige Theoreme aufgefunden, zu denen im folgenden einige neue Sätze hinzugefügt und bewiesen werden sollen.

Eine rationale Größe, welche die Form

$$\frac{b \pm \sqrt{-\overline{D}_2}}{a}$$

hat, und in welcher $-\overline{D}_2$ positiv, jedoch nicht eine Quadratzahl ist, heißt eine Irrationale zweiten Grades. Sie kann als die Wurzel der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = (a, b, c)\widehat{\ }(x, 1)^2 = 0$$

angesehen werden, deren Koeffizienten a, b, c ganze positive oder negative Zahlen sind von der Beschaffenheit, daß die Diskriminante

$$\overline{D}_2 = ac - b^2$$

negativ, also die als positiv vorausgesetzte Größe

$$-\overline{D}_2 = b^2 - ac = A$$

kein vollständiges Quadrat ist. Da es uns nur darauf ankommt, die absoluten Werte der Wurzeln in einen Kettenbruch zu verwandeln, so gehen wir aus von der allgemeinen Form

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D}, \quad A = E^2 + DD_{-1}, \tag{1}$$

$$Dx^2 - 2Ex - D_{-1} = 0, \tag{2}$$

---

1) A. Serret: Sur le développement en fraction continue de la racine quarrée d'un nombre entier. Liouville, Journ. Math. **12.** 1847.

—— Cours d'algèbre supérieure. Sect. I. Chap. II. Edit. II. Paris 1854.

Rottok: Von den Kettenbrüchen und ihrer Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen zweiten Grades. § 19. Rendsburg 1860.

Man vergl. auch Legendre: Essai sur la théorie des nombres.

wo A, E, D und D_{-1} ganze Zahlen, E, D und D_{-1} positive oder negative Zahlen sind. Da man durch Tâtonnement im stande sein wird, den größten ganzen Wert von $\sqrt{A}$ anzugeben, so erhält man unmittelbar mittels Division des Dividenden $E + \sqrt{A}$ durch D die größte ganze in x enthaltene Zahl a_0, so daß man hat in fortschreitender Entwicklung

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} \quad \text{u. s. f.}$$

Dabei nennt man die ganzzahligen Partialnenner $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die *unvollständigen* und die irrationalen Partialnenner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die *vollständigen* Quotienten. Aus den Kettenbrüchen folgt

$$x_1 = \frac{D}{\sqrt{A} - (Da_0 - E)} = \frac{(Da_0 - E) + \sqrt{A}}{2Ea_0 - Da_0^2 + D_{-1}} = \frac{E_1 + \sqrt{A}}{D_1},$$

$$x_2 = \frac{D_1}{\sqrt{A} - (D_1 a_1 - E_1)} = \frac{(D_1 a_1 - E_1) + \sqrt{A}}{2E_1 a_1 - D_1 a_1^2 + D} = \frac{E_2 + \sqrt{A}}{D_2},$$

. . . .

$$x_n = \frac{D_{n-1}}{\sqrt{A} - (D_{n-1}a_{n-1} - E_{n-1})} = \frac{(D_{n-1}a_{n-1} - E_{n-1}) + \sqrt{A}}{2E_{n-1}a_{n-1} - D_{n-1}a_{n-1}^2 + D_{n-2}} = \frac{E_n + \sqrt{A}}{D_n}.$$

In diesen Quotienten sind E_n und D_n immer ganze Zahlen, wie sich leicht erweisen läßt. Man braucht nur zu zeigen, daß allgemein D_{n-1} ein Faktor von dem Ausdrucke

$$A - (E_{n-1} - D_{n-1}a_{n-1})^2$$

ist. Es war vorausgesetzt

$$E^2 + DD_{-1} = A. \tag{3}$$

Daraus folgt

$$\frac{A - (E - Da_0)^2}{D} = 2Ea_0 - Da_0^2 + D_{-1} = D_1.$$

Es ist nun weiter

$$E_1^2 = D^2a_0^2 - 2DEa_0 + E^2 = -D(2Ea_0^2 - Da_0^2 + D_{-1}) + A,$$

also

$$E_1^2 + D_1 D = A.$$

Durch Fortsetzung dieser Ableitungen findet man allgemein

$$\frac{A - (E_{n-1} - D_{n-1}a_{n-1})^2}{D_{n-1}} = D_n; \tag{4}$$

$$E_n^2 + D_n D_{n-1} = A. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$(6) \qquad E_n + D_{n-1}a_{n-1} - E_{n-1};$$

und weiter die Gleichungen der unvollständigen Quotienten

$$(7) \qquad D_{n-1}a_{n-1}^2 - 2E_{n-1}a_{n-1} - D_{n-2} = -D_n,$$

$$(8) \qquad (E_{n-1} - E_n)a_{n-1} + D_{n-2} = D_n,$$

und die Gleichung der vollständigen Quotienten

$$(9) \qquad D_n x_n^2 - 2E_n x_n - D_{n-1} = 0.$$

Serret macht nun die Bemerkung, daß die drei ganzen Zahlen D_{n-1}, E_n, D_n keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor δ enthalten könnten, weil er sonst auf Grund der Gleichungen (6) und (8) in rekurrierender Reihenfolge auch ein Divisor der Größen D_{-1}, E, D sein, und A den quadratischen Faktor δ^2 haben müßte. Man könne also von vorn herein in dem vorgelegten Ausdrucke

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D}$$

diesen Faktor eliminieren.

Dagegen muß bemerkt werden, daß Fälle vorkommen, in denen E^2 und A den gemeinschaftlichen und quadratischen Divisor D haben, welcher in dem ersten Quotienten x nicht durch Verkleinerung gehoben werden darf, wenn die obigen Sätze Geltung behalten sollen. Denn sei $D = \delta^2$ und allgemein

$$\delta^2 x^2 - \delta \cdot \varepsilon x - \zeta = 0,$$

also

$$x = \frac{\varepsilon\delta + \delta\sqrt{\alpha}}{\delta^2} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\alpha}}{\delta} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \delta\delta_{-1}}}{\delta},$$

so müßte in dieser abgekürzten Form der Quotient

$$\frac{\alpha - \varepsilon^2}{\delta} = \delta_{-1}$$

eine Ganze sein, was durchaus nicht der Fall ist. Dann sei z. B.

$$x = \frac{4 + \sqrt{47}}{7}.$$

Dieser Quotient genügt nicht den angegebenen Bedingungen. Es ist aber x eine Wurzel der Gleichung

$$49x^2 - 56x - 31 = 0,$$

und wenn bei der Kettenbruchentwicklung E_n und D_n immer ganze Zahlen bleiben sollen, so muß man ausgehen von der Form

$$x = \frac{28 + \sqrt{47 \cdot 7^2}}{49},$$

also der quadratische Faktor δ^2 muß in A bleiben.

Bezeichnen wir die Näherungswerte des Kettenbruches mit

$$\frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n},$$

so ist bekanntlich

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Die Theoreme, die Serret aufführt, sind die folgenden:

I. Entwickelt man eine Irrationale zweiten Grades in einen Kettenbruch, so wird von einer bestimmten Stelle an die Reihe der vollständigen und der unvollständigen Quotienten periodisch. (Lagrange.)

II. Der Wert eines periodischen Kettenbruches läßt sich durch eine Irrationale zweiten Grades ausdrücken, d. h. er ist die Wurzel einer bestimmten quadratischen Gleichung.

III. Die beiden Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten, welcher ein gegebener periodischer Kettenbruch genügt, haben entgegengesetzte Vorzeichen, wenn der Kettenbruch *rein periodisch* ist; sie haben gleiche Vorzeichen, wenn mehrere Glieder der Periode vorangehen.

IV. Entwickelt man die irrationalen Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit ganzen Koeffizienten in Kettenbrüche, so ist die Periode der unvollständigen Quotienten des einen die Umkehrung der Periode des anderen.

V. Bildet man für jede der irrationalen Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten die Gleichungen der vollständigen Quotienten, so ist die Periode derselben bei beiden die umgekehrte.

Wir wollen zu diesen Theoremen zwei neue hinzufügen:

VI. Wenn innerhalb der Periode eines Kettenbruches, welcher durch die Entwicklung einer Irrationalen zweiten Grades entsteht, in der Gleichung der vollständigen Quotienten (9) $2E_n$ *durch* D_n *teilbar wird, so ist der Quotient gleich dem unvollständigen Quotienten* a_n*, die Periode symmetrisch und* a_n *der Anfang oder die Mitte derselben.*

Zum Beweise betrachten wir nur den Fall, wo die Periode gleich im Anfang beginnt. Ist die Anzahl der Terme $n+1$, so ist $x_{n+1} = x$ und wegen der Relation

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}},$$

$$q_n x_{n+1}^2 - (p_n - q_{n-1}) x_{n+1} - p_{n-1} = 0,$$

$$q_n x^2 - (p_n - q_{n-1}) x \quad - p_{n-1} = 0.$$

Für den letzten vollständigen Partialnenner oder Quotienten x_n ist dann wie in (9)

$$D_n x_n^2 - 2 E_n x_n - D_{n-1} = 0.$$

Da wir immer x als positiv und größer als 1 voraussetzen können, so ist für den Fall $D_n < E_n$ auch

$$D_n < 2 E_n + D_{n-1}.$$

Für den Fall $D_n > E_n$ hat man die Ungleichung der positiven Größen

$$\sqrt{E_n^2 + D_n D_{n-1}} > D_n - E_n,$$

oder quadriert

$$E_n^2 + D_n D_{n-1} > E_n^2 - 2 D_n E_n + D_n^2,$$

also ebenfalls

$$D_n < 2 E_n + D_{n-1}.$$

Da aber zugleich

$$D_{n-1} < 2 E_n + D_n$$

ist, weil nach dem V. Theorem in der Entwicklung der beiden Wurzeln immer *zwei* Gleichungen

$$D_n x_n^2 - 2 E_n x_n - D_{n-1} = 0,$$

$$D_{n-1} x_1'^2 - 2 E_n x_1' - D_n = 0$$

zusammen bestehen, so ist

$$D_n D_{n-1} < 2 E_n D_n + D_n^2,$$

$$E_n^2 + D_n D_{n-1} = A < (E_n + D_n)^2,$$

$$\sqrt{A} < E_n + D_n.$$

Da nun

$$x_n = \frac{E_n + \sqrt{A}}{D_n} \text{ und } \sqrt{A} \gtreqless E_n$$

ist, so wird für den Fall, daß $2E_n$ ein ganzes Vielfaches von D_n ist,

$$x_n = \frac{2E_n}{D_n} + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Wir substituieren diesen Wert in die Gleichung

$$D_n x_n^2 - 2E_n x_n - D_{n-1} = 0,$$

und die Gleichung kehrt sich um in

$$D_{n-1} x_{n+1}^2 - 2E_n x_{n+1} - D_n = 0.$$

Es wird demnach

$$D_{n+1} = D_{n-1}, \quad E_{n+1} = E_n.$$

Es läßt sich aber leicht erweisen und folgt auch aus dem V. Theoreme daß, wenn die Substitution

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$$

die obige Gleichung in x_n ergibt, auch die Substitution

$$x_{n+1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_{n+2}}$$

die Gleichung

$$D_{n-2} x_{n+2}^2 - 2E_{n-1} x_{n+2} - D_{n-1} = 0$$

zur Folge hat. Es ist demnach

$$D_{n+1} = D_{n-1}, \quad E_{n+1} = E_n,$$
$$D_{n+2} = D_{n-2}, \quad E_{n+2} = E_{n-1} \text{ u. s. f.}$$

und die aufeinander folgenden Partialnenner (unvollständige Quotienten) bilden die symmetrische Periode

$$\ldots \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad \frac{2E_n}{D_n} = a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2}, \quad \ldots$$

d. h. die Periode hat *ein* mittleres Glied.

Da nun innerhalb einer ganzen Periode zwei Mittelpunkte der Symmetrie vorhanden sein müssen und für den zweiten dieselben oder ähnliche Bedingungen bestehen, wie für den ersten, so gibt es in jeder Periode entweder noch eine zweite Gleichung

$$D_m x_m^2 - 2E_m x_m - D_{m-1} = 0,$$

für welche

$$x_m = \frac{2E_m}{D_m} + \frac{1}{x_{m+1}} = a_m + \frac{1}{x_{m+1}}$$

den Anfang oder das Ende derselben bezeichnet, oder eine Gleichung, welche *zwei* mittlere Glieder liefert (vergl. das VII. Theorem).

Wenn demnach eine quadratische Gleichung von der Form

$$ax^2 - amx + c = 0$$

mit irrationalen Wurzeln in einen Kettenbruch verwandelt wird und dabei

$$am < \sqrt{a^2m^2 - 4ac} < am + 2a$$

ist, so wird die Periode symmetrisch und beginnt mit dem ersten Partialnenner, falls die Wurzel $x > 1$ ist.

Ist speziell $a = 1$, m gerade und gleich $2u$, also

$$x^2 - 2ux + c = 0$$

und zugleich

$$u < \sqrt{u^2 - c} < u + 1,$$

also c negativ, so ist

$$\sqrt{u^2 - c} = \sqrt{A}$$

irrational und der erste Partialnenner $a_0 = 2u$, die Periode

$$2u,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ 2u,\ a_1,\ a_2,\ \ldots.$$

Substituiert man $x - u = y$, so wird

$$y^2 - (u^2 - c) = y^2 - A = 0,$$

und wenn man die Wurzel $y_1 = \sqrt{A}$ in einen Kettenbruch verwandelt, die symmetrische Periode der unvollständigen Quotienten:

$$u,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ 2u,\ a_1,\ a_2,\ \ldots.$$

VII. Wenn innerhalb der Periode eines Kettenbruches, welcher durch die Entwicklung der irrationalen Wurzel einer quadratischen Gleichung entsteht, D_n gleich D_{n-1} wird, so ist die Periode symmetrisch und besitzt zwei gleiche mittlere Glieder und umgekehrt.

Um dies zu beweisen, betrachten wir der Einfachheit wegen nur den Fall, wo die Periode gleich vom Anfang beginnt. Dies ist nach dem VI. Theorem immer der Fall, wenn in der vorgelegten Gleichung

$$Dx^2 - 2Ex - D_{-1} = 0$$

$2E$ ein ganzes Vielfaches von D ist und

$$E < \sqrt{E^2 + DD_{-1}} < E + D.$$

Es seien nun drei aufeinander folgende Gleichungen der vollständigen Quotienten

$$D_{n-1}x_{n-1}^2 - 2E_{n-1}x_{n-1} - D_{n-2} = 0,$$
$$D_n\ x_n^2\ - 2E_n\ x_n\ - D_{n-1} = 0,$$
$$D_{n+1}x_{n+1}^2 - 2E_{n+1}x_{n+1} - D_n\ = 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß $D_n = D_{n-1}$ ist, wird sein

$$\text{I.}\quad D_n\ x_{n-1}^2 - 2E_{n-1}x_{n-1} - D_{n-2} = 0,$$
$$\text{II.}\quad D_n\ x_n^2\ - 2E_n\ x_n\ - D_n\ = 0,$$
$$\text{III.}\quad D_{n+1}x_{n+1}^2 - 2D_{n+1}x_{n+1} - D_n\ = 0.$$

Es läßt sich erweisen, daß

$$D_{n+1} = D_{n-2},\quad E_{n+1} = E_{n-1},$$
$$D_{n+2} = D_{n-3},\quad E_{n+2} = E_{n-2},\ \text{u. s. f.}$$

Es ist nämlich

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

also nach I.

$$D_n\left(a_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right)^2 - 2E_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right) - D_{n-2} = 0.$$

Durch Entwicklung und Ordnung nach Potenzen von x_n ergibt sich

$$-(D_n a_{n-1}^2 - 2E_{n-1}a_{n-1} - D_{n-2})x_n^2 - 2(D_n a_{n-1} - E_{n-1})x_n - D_n = 0,$$

und weil diese Gleichung identisch werden muß mit

$$D_n x_n^2 - 2E_n x_n - D_n = 0,$$

so ist

$$D_n = D_{n-1} = -D_n a_{n-1}^2 + 2E_{n-1}a_{n-1} + D_{n-2}$$

und

$$E_n = D_n a_{n-1} - E_{n-1}.$$

Man setze nun auch die Relation

$$x_n = a_{n-1} + \frac{1}{x_{n+1}}$$

in die Gleichung II. ein, so geht dieselbe unter Berücksichtigung der Relationen für D_n und E_n über in

$$D_{n-2}x_{n+1}^2 - 2E_{n-1}x_{n+1} - D_{n-1} = 0.$$

Da diese Gleichung eine positive Wurzel hat, weil sie identisch ist mit

$$D_{n-2}x_2'^2 - 2E_{n-1}x_2' - D_{n-1} = 0,$$

so ist sie auch identisch mit der Gleichung

$$D_{n+1}x_{n+1}^2 - 2E_{n+1}x_{n+1} - D_n = 0,$$

woraus folgt

$$D_{n+1} = D_{n-2}, \quad E_{n+1} = E_{n-1}.$$

Man kann nun weiter substituieren

$$x_{n+1} = a_{n-2} + \frac{1}{x_{n+2}},$$

und gelangt in derselben Weise zu den Relationen

$$D_{n+2} = D_{n-3}, \quad E_{n+2} = E_{n-2} \text{ u. s. f.}$$

Das symmetrische System der Partialgleichungen nebst den daraus hervorgehenden unvollständigen Quotienten ist demnach:

$$\begin{aligned}
x_{n-2} &= a_{n-2} + \frac{1}{x_{n-1}}, & D_{n-1}x_{n-1}^2 - 2E_{n-1}x_{n-1} - D_{n-2} &= 0,\\
x_{n-1} &= a_{n-1} + \frac{1}{x_n}, & D_{n-1}x_n^2 - 2E_n\, x_n - D_{n-1} &= 0,\\
x_n &= a_{n-1} + \frac{1}{x_{n+1}}, & D_{n-2}x_{n+1}^2 - 2E_{n-1}x_{n+1} - D_{n-1} &= 0,\\
x_{n+1} &= a_{n-2} + \frac{1}{x_{n+2}}, & D_{n-3}x_{n+2}^2 - 2E_{n-2}x_{n+2} - D_{n-2} &= 0,\\
&\text{u. s. f.} & &\text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Die symmetrische Periode hat zwei mittlere Glieder a_{n-1}.

Zahlenbeispiel: $5x^2 - 15x - 13 = 0$. Periode: a_m: 3, 1, 2, 2, 1, 3 ... Dasselbe paßt auch zum Theorem VI.

Die symmetrische Periode kann übrigens auch *ein* oder *zwei* Endglieder haben, z. B. $5x^2 - 11x - 5 = 0$.

Die Periode ist: 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ...

Wenn $D = D_{n-1}$ und $2E$ ein ganzes Vielfaches von D ist, so sind alle unvollständigen Quotienten gleich $2E : D$, weil die Periode *ein* mittleres und zugleich *zwei* mittlere Glieder haben muß.

Rostock, 30. Juli 1901.

Über ein in der Vektor-Analysis auftretendes System partieller Differentialgleichungen I. Ordnung.

Von E. Naetsch in Dresden.

Bekanntlich wird in verschiedenen physikalischen Theorien gelegentlich von der Vorstellung Gebrauch gemacht, daß nach einem bestimmten Gesetze jedem Punkte des Raumes, oder doch wenigstens jedem Punkte eines gewissen begrenzten Raumgebietes, eine gerichtete Größe — Vektorgröße, oder kurzweg Vektor — zugeordnet sei, welche sich alsdann durch eine von dem betreffenden Punkt ausgehende Strecke von bestimmter Richtung und Länge veranschaulichen läßt. Das Gesetz dieser Zuordnung kann in bequemer Weise analytisch formuliert werden, sobald man sich eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedient und jeden Punkt durch seine drei Koordinaten x, y, z, die ihm zugeordnete Strecke aber durch ihre in die Richtungen der drei Koordinatenachsen fallenden Komponenten X, Y, Z fixiert; dann müssen vermöge jenes Zuordnungs-Gesetzes X, Y, Z Funktionen von x, y, z sein. Durch Angabe dieser drei Funktionen aber ist offenbar eine analytische Darstellung der betreffenden Vektorgröße erreicht. — Andrerseits ist klar, daß auch umgekehrt durch drei gegebene Funktionen

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z)$$

der drei von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z, welche — wenigstens innerhalb eines gewissen Bereichs — für reelle Werte von x, y, z ebenfalls reelle Werte besitzen, stets eine Vektorgröße bestimmt ist; denn es können ja x, y, z als Koordinaten eines veränderlichen Raumpunktes, X, Y, Z als die entsprechenden Komponenten einer von ihm ausgehenden gerichteten Strecke angesehen werden.

Diese beiden Prinzipien — die analytische Darstellung einer Vektorgröße durch ein System von drei Funktionen dreier Variablen, und die Veranschaulichung eines Systems von drei Funktionen dreier Variablen durch eine Vektorgröße — bilden die Grundlage der sogenannten Vektor-Analysis[1]), welche, obschon sich ihre Entstehung

1) Man vergleiche Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, I. Band. — Die hier in Frage kommende Theorie wird im 10. Abschnitt (siehe insbesondere die §§ 85, 87 und 94) auseinandergesetzt, durch dessen Lektüre der Verfasser die Anregung zu den nachstehenden Betrachtungen erhielt.

und Entwickelung durchaus unter dem Einfluß physikalischer Theorien vollzogen hat, doch sehr wohl einer rein mathematischen Behandlung zugänglich ist und auf manches mathematisch interessante Problem führt. Einem solchen Problem sollen die folgenden Zeilen gewidmet sein.

Dasselbe bietet sich dar, wenn der für die Anwendungen der Vektor-Analysis wichtige Begriff des *Curls* eingeführt wird. Unter dem Curl eines gegebenen Vektors versteht man einen zweiten Vektor, dessen Komponenten

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z)$$

mit den Komponenten

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z)$$

des ersteren Vektors durch die Relationen

$$P = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

zusammenhängen. Nun ist unmittelbar ersichtlich, wie man, sobald irgend ein Vektor vorgelegt ist, dessen Curl finden kann; denn die Funktionen P, Q, R werden vermöge der obigen Relationen mittels bloßer Differentiationen erhalten, sobald die Funktionen X, Y, Z gegeben sind. Dagegen ist keineswegs ohne weiteres klar, wie man, sobald etwa der Curl eines unbekannten Vektors gegeben ist, diesen Vektor selbst ermitteln kann; denn die genannten Relationen bilden, wenn die Funktionen P, Q, R gegeben, die Funktionen X, Y, Z aber unbekannt sind, ein System partieller Differentialgleichungen I. Ordnung; und aus dem gleichen Grunde läßt sich auch nicht auf den ersten Blick übersehen, unter welchen Bedingungen ein gegebener Vektor überhaupt der Curl eines andern Vektors sein kann. Sollen diese beiden Fragen beantwortet werden, so ist vielmehr das folgende Problem zu lösen:

Welche zugleich notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die drei gegebenen Funktionen $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ erfüllen, wenn sich aus den drei partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R$$

die drei unbekannten Funktionen $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ bestimmen lassen sollen? Und wie können, wenn die fraglichen Bedingungen erfüllt sind, die letzteren drei Funktionen gefunden werden?

Im folgenden soll eine Lösung dieses Problems entwickelt werden, welche einerseits die Lehre vom Jacobischen Multiplikator, und andrer-

seits die Theorie des Pfaffschen Problems in drei Veränderlichen benutzt.[1]) Die diesen beiden Gebieten entnommenen Hilfsbetrachtungen sind in Nr. **1** und Nr. **2** enthalten, die eigentliche Lösung des Problems wird in Nr. **3** gegeben.

1. *Hilfsbetrachtungen aus der Theorie des Jacobischen Multiplikators.* — Wenn $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ und $R(x, y, z)$ drei gegebene Funktionen der drei von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z sind, und unter f eine unbekannte Funktion derselben Veränderlichen verstanden wird, so ist die Relation

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

eine lineare partielle Differentialgleichung I. Ordnung. Dieselbe hat bekanntlich die Eigenschaft, daß stets zwei von einander unabhängige Lösungen vorhanden sind, und daß, wenn die beiden Funktionen

$$\varphi(x, y, z) \text{ und } \psi(x, y, z)$$

zwei derartige Lösungen sind, jede weitere Lösung sich als bloße Funktion von φ und ψ darstellen lassen muß. Ferner muß alsdann, wie aus dem Bestehen der beiden identischen Gleichungen

$$P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + R\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv 0,$$
$$P\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \psi}{\partial y} + R\frac{\partial \psi}{\partial z} \equiv 0$$

sofort folgt, ein — im allgemeinen von x, y, z abhängiger — Faktor λ existieren, welcher so beschaffen ist, daß

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \lambda \cdot P, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \lambda \cdot Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \lambda \cdot R, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

und infolgedessen der Ausdruck

$$\lambda \cdot \left(P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

---

1) In dem vorhin citierten Werke (siehe daselbst § 94) wird das Problem zurückgeführt auf die Integration mehrerer partieller Differentialgleichungen II. Ordnung mit je einer unbekannten Funktion. — Übrigens bedingt die daselbst angewandte Methode, daß die drei Funktionen X, Y, Z noch einer vierten Differentialgleichung I. Ordnung, nämlich der Relation $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ Genüge zu leisten haben.

gleich der Funktional-Determinante der drei Funktionen f, φ, ψ wird; diesen Faktor λ nennt man bekanntlich einen Jacobischen Multiplikator der Differentialgleichung (1). Zu zwei von einander unabhängigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung von der Form (1) gehört also stets ein bestimmter Jacobischer Multiplikator dieser Gleichung. Aus den drei Gleichungen (2) folgt die Relation

$$\frac{\partial(\lambda \cdot P)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \cdot Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda \cdot R)}{\partial z} = 0,$$

welche offenbar auch

$$P \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = 0 \tag{3}$$

geschrieben und mithin als eine lineare partielle Differentialgleichung I. Ordnung angesehen werden kann, in welcher λ die unbekannte Funktion ist. Jeder Jacobische Multiplikator der partiellen Differentialgleichung (1) muß demnach eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (3) sein.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe zu ermitteln, ob, resp. unter welchen Bedingungen die partielle Differentialgleichung (1) zwei von einander unabhängige Lösungen

$$\Phi(x, y, z) \quad \textit{und} \quad \Psi(x, y, z)$$

besitzen kann, welche so beschaffen sind, daß der ihnen entsprechende Jacobische Multiplikator von (1) den Wert 1 besitzt, daß also

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = P, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = Q, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = R \end{cases} \tag{4}$$

wird.

In diesem Fall muß der Gleichung (3) durch $\lambda = 1$ Genüge geleistet werden, und es müssen infolgedessen die Koeffizienten P, Q, R unserer Differentialgleichung (1) so beschaffen sein, daß

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

wird.

Es läßt sich aber zeigen, daß diese *notwendige* Bedingung auch *hinreichend* ist, um die Existenz zweier Lösungen von der verlangten Beschaffenheit zu ermöglichen.

Wenn nämlich die Bedingung (5) erfüllt ist, so reduziert sich die Relation (3) auf die einfachere Gleichung

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial x}+Q\frac{\partial\lambda}{\partial y}+R\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,$$

d. h. es wird λ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (1). Sind also φ und ψ irgend zwei von einander unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (1), und ist λ der ihnen entsprechende Jacobische Multiplikator der letzteren, so muß sich λ als eine bloße Funktion von φ und ψ darstellen lassen.

Wir sehen demnach, daß, wenn die Bedingung (5) erfüllt ist, die Gleichungen (2) die Form

$$(6)\qquad\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=\Omega(\varphi,\psi)\cdot P,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}=\Omega(\varphi,\psi)\cdot Q,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}=\Omega(\varphi,\psi)\cdot R\end{cases}$$

erhalten können.

Um festzustellen, ob unsere Differentialgleichung (1) nunmehr zwei Lösungen Φ und Ψ haben kann, welche den Gleichungen (4) Genüge leisten, bedenken wir zunächst, daß sich Φ und Ψ jedenfalls als bloße Funktionen von φ und ψ darstellen lassen müssen, daß also notwendig Beziehungen von der Form

$$(7)\qquad \Phi=U(\varphi,\psi),\quad \Psi=V(\varphi,\psi)$$

stattfinden. Aus diesen aber folgen die drei Relationen

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\varDelta\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\varDelta\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\varDelta\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\end{cases}$$

in denen $\varDelta$ zur Abkürzung steht für die Funktional-Determinante

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial V}{\partial\psi}-\frac{\partial U}{\partial\psi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Vermöge dieser drei Relationen verwandeln sich nun die den beiden

Funktionen Φ und Ψ vorgeschriebenen Gleichungen (4) in die folgenden:

$$\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = P,$$

$$\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = Q,$$

$$\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = R;$$

und diesen wird wegen der Relationen (6) dann und nur dann Genüge geleistet, wenn $\Delta \cdot \Omega = 1$, wenn also

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Omega(\varphi, \psi)} \tag{8}$$

ist.

Hieraus aber folgt sofort, daß die oben aufgestellte Bedingung — das Bestehen der Relation (5) — nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend ist.

In der Tat, sobald die genannte Bedingung erfüllt ist, und zunächst irgend zwei von einander unabhängige Lösungen φ und ψ der Differentialgleichung (1) gefunden sind, so werden jedenfalls drei Relationen von der Form (6) bestehen. Berechnet man aus diesen die Funktion $\Omega(\varphi, \psi)$, so hat man noch zwei weitere Funktionen $U(\varphi, \psi)$ und $V(\varphi, \psi)$ derart zu bestimmen, daß sie der Bedingungsgleichung (8) Genüge leisten[1]); diese Funktionen gehen — durch x, y, z ausgedrückt — in zwei Lösungen $\Phi(x, y, z)$ und $\Psi(x, y, z)$ der Differentialgleichung (1) über, welche die vorgeschriebenen Gleichungen (4) befriedigen.

Es gilt hiernach der folgende

Lehrsatz. *„Damit sich zwei Funktionen $\Phi(x, y, z)$ und $\Psi(x, y, z)$ bestimmen lassen, welche den drei Gleichungen*

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = P(x, y, z), \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = Q(x, y z), \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = R(x, y, z) \end{cases}$$

1) Zwei derartige Funktionen kann man auf unendlich viele Arten ermitteln; man braucht nur die eine Funktion — etwa $V(\varphi, \psi)$ — willkürlich anzunehmen, dann erscheint unsre Bedingungsgleichung (8) als eine lineare partielle Differentialgleichung I. Ordnung mit der unbekannten Funktion $U(\varphi, \psi)$, und man hat mithin als zweite Funktion irgend eine Lösung dieser Differentialgleichung zu nehmen.

Genüge leisten, in denen P, Q und R gegebene Funktionen von x, y, z sind, ist notwendig, aber auch hinreichend, daß

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0 \tag{5}$$

wird. — Die Funktionen Φ und Ψ können, sobald diese Bedingung erfüllt ist, gefunden werden als zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

welche von einander unabhängig und überdies so beschaffen sind, daß der entsprechende Jacobische Multiplikator dieser Differentialgleichung den Wert 1 besitzt."

Anmerkung. Wenn man zunächst *irgend zwei* den Gleichungen (4) Genüge leistende Funktionen $\Phi_0(x, y, z)$ und $\Psi_0(x, y, z)$ gefunden hat, so kann man die *allgemeinsten* derartigen Funktionen $\Phi(x, y, z)$ und $\Psi(x, y, z)$ dadurch erhalten, daß man

$$\Phi = A(\Phi_0, \Psi_0), \quad \Psi = B(\Phi_0, \Psi_0)$$

setzt und hierbei die beiden Funktionen A und B in allgemeinster Weise derart wählt, daß

$$\frac{\partial A}{\partial \Phi_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial \Psi_0} - \frac{\partial A}{\partial \Psi_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial \Phi_0} = 1$$

wird. Um letzteres zu erreichen, kann man sich eines von Herrn Gravé[1]) angegebenen Kunstgriffs bedienen, welcher es ermöglicht, die Funktionen A und B durch sogenannte ausführbare Operationen, d. h. ohne irgend welche Integration zu bilden.

2. *Hilfssätze aus der Theorie des Pfaffschen Problems.* — Wenn $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ und $Z(x, y, z)$ drei gegebene Funktionen der drei von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z sind, so nennt man bekanntlich den Ausdruck

$$X(x, y, z) \cdot dx + Y(x, y, z) \cdot dy + Z(x, y, z) \cdot dz \tag{1}$$

einen *Pfaffschen Differential-Ausdruck* oder kurz einen *Pfaffschen Ausdruck* in den drei Veränderlichen x, y, z. Für einen derartigen Ausdruck aber gelten, wie in der Theorie des Pfaffschen Problems gezeigt wird, die folgenden drei Sätze:

1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1896. Vergleiche hierzu auch Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I. Band, Seite 121 ff.

I. Wenn

$$(2) \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

ist, so kann der Pfaffsche Ausdruck (1) stets auf die Form

$$d\Psi(x, y, z)$$

gebracht werden, d. h. es läßt sich eine Funktion Ψ von x, y, z bestimmen, welche so beschaffen ist, daß

$$(\mathrm{I}) \qquad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \equiv d\Psi,$$

daß also

$$X \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird.

II. Wenn zwar nicht die Bedingungen (2) erfüllt sind, aber doch die Relation

$$(3) \qquad X \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \equiv 0$$

besteht, so kann der Pfaffsche Ausdruck (1) stets auf die Form

$$\Phi(x, y, z) \cdot d\Psi(x, y, z)$$

gebracht werden, d. h. es lassen sich zwei Funktionen Φ und Ψ von x, y, z bestimmen, welche so beschaffen sind, daß

$$(\mathrm{II}) \qquad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \equiv \Phi \cdot d\Psi,$$

daß also

$$X \equiv \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y \equiv \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z \equiv \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird.

III. Wenn weder die Bedingungen (2) erfüllt sind, noch die Relation (3) stattfindet, so kann der Pfaffsche Ausdruck (1) stets auf die Form

$$dF(x, y, z) + \Phi(x, y, z) \cdot d\Psi(x, y, z)$$

gebracht werden, d. h. es lassen sich drei Funktionen F, Φ und Ψ von x, y, z bestimmen, welche so beschaffen sind, daß

$$(\mathrm{III}) \qquad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \equiv dF + \Phi \cdot d\Psi,$$

daß also

$$(\mathrm{III}^*) \quad X \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z \equiv \frac{\partial F}{\partial z} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird.

Nun übersieht man sofort, daß die unter I. und II. gegebenen Darstellungen unsres Pfaffschen Ausdrucks (1) als spezielle Fälle der unter III. gegebenen Darstellung angesehen werden können. Infolge dieses Umstandes ergeben die drei soeben angeführten Sätze den

Lehrsatz: *„Sind X, Y, Z irgend drei Funktionen von x, y, z, so existieren stets drei weitere Funktionen F, Φ, Ψ von x, y, z, welche so beschaffen sind, daß*

$$\text{(III)} \qquad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \equiv dF + \Phi \cdot d\Psi,$$

daß also

$$\text{(III*)} \quad X \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z \equiv \frac{\partial F}{\partial z} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird.“

Anmerkung. Wenn die Funktionen X, Y, Z gegeben sind, können die Funktionen F, Φ, Ψ durch Integration gewisser Differentialgleichungen ermittelt werden, sind aber keineswegs eindeutig bestimmt. Wenn hingegen die Funktionen F, Φ, Ψ gegeben sind, so können, wie der Anblick der Gleichungen (III*) sofort lehrt, die Funktionen X, Y, Z mittels bloßer Differentiationen erhalten werden und sind überdies eindeutig bestimmt. — Beim Pfaffschen Problem liegt der erste Fall vor, für unsere Zwecke kommt allein der zweite Fall in Betracht.

3. *Lösung des gestellten Problems.* — Wir wenden uns nunmehr zu der in der Einleitung gestellten Aufgabe: Drei Funktionen X, Y, Z der drei von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z zu ermitteln, welche mit den drei gegebenen Funktionen P, Q, R dieser drei Veränderlichen durch die drei partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R$$

zusammenhängen; und festzustellen, unter welchen Bedingungen Funktionen der verlangten Art überhaupt existieren können.

Zur Erledigung dieser Aufgabe schlagen wir einen Umweg ein. Wir bedenken, daß, wenn drei Funktionen X, Y, Z von der gewünschten Beschaffenheit vorhanden sind, zufolge der in Nr. 2 wiedergegebenen Theorie jedenfalls drei Funktionen F, Φ, Ψ existieren müssen, welche mit jenen durch die Relationen

$$\text{(2)} \qquad X = \frac{\partial F}{\partial x} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

verbunden sind; und wir suchen nunmehr nicht direkt die Funktionen X, Y, Z, sondern vielmehr erst die Funktionen F, Φ, Ψ zu ermitteln;

aus den letzteren erhalten wir dann die ersteren vermöge der Relationen (2) eindeutig durch bloße Differentiationen.

Nun folgen aus den Relationen (2) sofort die weiteren Beziehungen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{cases}$$

und diese zeigen, daß die vorgelegten Differentialgleichungen (1) ersetzt werden können durch die drei Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = P, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = Q, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = R. \end{cases}$$

Sollen also die Funktionen X, Y, Z den Differentialgleichungen (1) Genüge leisten, so müssen durch die Funktionen F, Φ, Ψ die Gleichungen (4) befriedigt werden.

Dieses Ergebnis läßt sich aber umkehren:

Sobald die Funktionen F, Φ, Ψ den Gleichungen (4) Genüge leisten, so werden — wegen der aus den Relationen (2) folgenden Beziehungen (3) — *durch die Funktionen X, Y, Z die vorgelegten Differentialgleichungen (1) identisch erfüllt.*

Die Gleichungen (4) sind hiernach den ursprünglichen Gleichungen (1) völlig äquivalent; es ist mithin das Problem, die Funktionen X, Y, Z aus den Differentialgleichungen (1) zu bestimmen, zurückgeführt auf das Problem, die Funktionen F, Φ, Ψ aus den Gleichungen (4) zu bestimmen.

Nun fällt sofort ins Auge, daß die Gleichungen (4) nur die beiden Funktionen Φ und Ψ, nicht aber auch die Funktion F enthalten. Hieraus folgt die Bemerkung:

Hat man die beiden Funktionen Φ und Ψ so bestimmt, daß den Gleichungen (4) Genüge geschieht, so kann die Funktion F ganz willkürlich angenommen werden; die Formeln (2) liefern alsdann stets drei den Differentialgleichungen (1) Genüge leistende Funktionen X, Y, Z.

Demnach ist das Problem, die Funktionen X Y, Z zu finden, völlig zurückgeführt auf die Aufgabe, zwei Funktionen Φ und Ψ der

drei Veränderlichen x, y, z zu ermitteln, welche den drei Gleichungen (4) Genüge leisten.

Diese Aufgabe aber haben wir in Nr. **1** eingehend behandelt. Damit sie lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

wird; und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so können Φ und Ψ gefunden werden als zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0, \tag{6}$$

welche von einander unabhängig und so beschaffen sind, daß der entsprechende Jacobische Multiplikator dieser Differentialgleichung den Wert 1 besitzt.

Somit erhalten wir als Gesamtergebnis unserer Betrachtungen den folgenden

Lehrsatz: *„Sind die drei Funktionen $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ gegeben, so können aus den drei partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung*

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R \tag{1}$$

die drei unbekannten Funktionen $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ dann, aber auch nur dann bestimmt werden, wenn zwischen den Funktionen P, Q, R die identische Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0 \tag{5}$$

besteht. Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich ein jedes den Differentialgleichungen (1) Genüge leistende System von Funktionen X, Y, Z darstellen durch drei Formeln von der Form

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \tag{2}$$

in denen F eine beliebige Funktion von x, y, z sein kann, während Φ und Ψ zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung I. Ordnung

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

sein müssen von solcher Beschaffenheit, daß der ihnen entsprechende Jacobische Multiplikator dieser Differentialgleichung den Wert 1 besitzt.“

Anmerkung. Wird das Problem in der Weise modifiziert, daß die drei unbekannten Funktionen X, Y, Z nicht bloß den drei Differentialgleichungen (1) zu genügen haben, sondern auch noch der Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

unterworfen werden (vergl. die Fußnote Seite 58), so kann der zu ihrer Ermittelung vorgeschlagene Weg im großen ganzen beibehalten werden; die Funktionen Φ und Ψ können genau ebenso gefunden werden, wie im obigen Lehrsatz angegeben wurde, die Funktion F aber, welche vorhin völlig willkürlich blieb, hat diesmal der partiellen Differentialgleichung II. Ordnung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0$$

Genüge zu leisten.

Dresden, den 8. Januar 1902.

On the Remainders of the Numbers of Triangle of Pascal with respect to a Prime Number.

By T. HAYASHI, Matsuyama (Japan).

The method by which Prof. K. Hensel has generalized the theorems of Fermat and Wilson in this Archiv, (3) **1**, 319—322, may be also used to establish some theorems relating to the remainders of the numbers of triangle of Pascal with respect to a prime number. The first of the following results may be regarded as a generalization of those theorems enunciated by Lucas in his *Théorie des nombres*, p. 420.

Let p be a prime number; then, if q be a positive integer less than p,

$$\binom{p}{q} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hence, as it is well known,

$$(x+1)^p \equiv x^p + 1 \pmod{p}.$$

Now let $p = \mu + \nu$, where μ, ν are any positive integers, not excluding zero. Then

$$(x+1)^\mu \cdot (x+1)^\nu \equiv x^p + 1 \pmod{p},$$

whence

$$x^\mu (x+1)^\nu \equiv (x^p+1)\cdot x^\mu (x+1)^{-\mu} \pmod{p}.$$

Expanding both sides of this congruence by the binomial theorem and considering that p is odd, we get

$$x^p + \binom{\nu}{1} x^{p-1} + \binom{\nu}{2} x^{p-2} + \binom{\nu}{3} x^{p-3} \cdots + \binom{\nu}{\nu-1} x^{\mu+1} + \binom{\nu}{\nu} x^\mu$$

$$\equiv x^p - \begin{bmatrix}\mu\\1\end{bmatrix} x^{p-1} + \begin{bmatrix}\mu\\2\end{bmatrix} x^{p-2} - \begin{bmatrix}\mu\\3\end{bmatrix} x^{p-3} + - \cdots + \begin{bmatrix}\mu\\p-1\end{bmatrix} x$$

$$- \left\{\begin{bmatrix}\mu\\p\end{bmatrix} - 1\right\} + \left\{\begin{bmatrix}\mu\\p+1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mu\\1\end{bmatrix}\right\} x^{-1}$$

$$- \left\{\begin{bmatrix}\mu\\p+2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mu\\2\end{bmatrix}\right\} x^{-2} + - \cdots \pmod{p},$$

where

$$\binom{r}{s} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-s+1)}{s!},$$

and

$$\begin{bmatrix}s\\r\end{bmatrix} = \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+s-1)}{s!}.$$

Therefore, comparing the coefficients of the equal powers of x on both sides of this congruence, we obtain the following congruences:

$$\left.\begin{array}{lll}
\begin{bmatrix}\mu\\1\end{bmatrix} \equiv -\binom{\nu}{1}, & \begin{bmatrix}\mu\\\nu+1\end{bmatrix} \equiv 0, & \begin{bmatrix}\mu\\p\end{bmatrix} \equiv 1,\\
\begin{bmatrix}\mu\\2\end{bmatrix} \equiv +\binom{\nu}{2}, & \begin{bmatrix}\mu\\\nu+2\end{bmatrix} \equiv 0, & \begin{bmatrix}\mu\\p+1\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\mu\\1\end{bmatrix} \equiv -\binom{\nu}{1}\\
\begin{bmatrix}\mu\\3\end{bmatrix} \equiv -\binom{\nu}{2}, & \begin{bmatrix}\mu\\\nu+3\end{bmatrix} \equiv 0, & \begin{bmatrix}\mu\\p+2\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\mu\\2\end{bmatrix} \equiv +\binom{\nu}{2}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\begin{bmatrix}\mu\\\nu\end{bmatrix} \equiv (-1)^\nu, & \begin{bmatrix}\mu\\p-1\end{bmatrix} \equiv 0, & \vdots
\end{array}\right\} \pmod{p}.$$

All these relations can be replaced by a very general congruence

$$\begin{bmatrix}\mu\\l\end{bmatrix} \equiv (-1)^{l_0} \binom{\nu}{l_0} \pmod{p},$$

where l_0 is the smallest positive remainder of l modulo p. In fact, the first column of the sytem above follows immediately, if we put $l = l_0 = 1, 2, 3, \cdots, \nu$; and the second column also follows, if we put $l = l_0 = \nu+1, \nu+2, \cdots, p-1$, since $\binom{\nu}{l_0}$ must be zero for $l_0 > \nu$; and so on. Thus:

If p be an odd prime number, and $p = \mu + \nu$, the number of combinations of μ elements with repetition taken l at a time is congruent to the number of combinations of ν elements without repetition taken l_0 at a time with sign $(-1)^{l_0}$, modulo p, where l_0 is the least positive remainder of l modulo p.

Since

$$\begin{bmatrix}\mu\\ l\end{bmatrix}=\binom{\mu+l-1}{l},$$

the congruence may be transformed into

$$\binom{\mu+l-1}{l}\equiv(-1)^{l_0}\binom{\nu}{l_0}\pmod{p}.$$

This is a generalized form of the theorems enunciated by Lucas, loc. cit.; because the theorems can be obtained from this by putting $l=\nu,\ \nu-1,\ \nu-2,\cdots$.

Next, let p be a prime number and $p=\mu-\nu$, where μ, ν are also any positive integers. Then

$$x^p\cdot x^\nu(x+1)^{-\nu}\equiv(x^p+1)\cdot x^\mu(x+1)^{-\mu}\pmod{p}.$$

Expanding both sides of this congruence, we get

$$\begin{array}{lll}
\begin{bmatrix}\mu\\ 1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}\mu\\ p+1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ p+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ 1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}\mu\\ 2p+1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 2p+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ p+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ 1\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\mu\\ 2\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 2\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}\mu\\ p+2\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ p+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ 2\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}\mu\\ 2p+2\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 2p+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ p+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ 2\end{bmatrix},\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\begin{bmatrix}\mu\\ p-1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ p-1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}\mu\\ 2p-1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 2p-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ p-1\end{bmatrix}, & \\
\begin{bmatrix}\mu\\ p\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ p\end{bmatrix}+1, & \begin{bmatrix}\mu\\ 2p\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\nu\\ 2p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\nu\\ p\end{bmatrix}+1 & \pmod{p}.
\end{array}$$

These are also contained in a very general congruence

$$\begin{bmatrix}\mu\\ l\end{bmatrix}\equiv\sum_{r=1}^{\infty}\begin{bmatrix}\nu\\ l-rp\end{bmatrix}\pmod{p},$$

if we understand that $\begin{bmatrix}\nu\\ r\end{bmatrix}=0$ when $r<0$ and $\begin{bmatrix}\nu\\ 0\end{bmatrix}=1$. Thus:

If p be a prime integer, and $p=\mu-\nu$, the number of combinations of μ elements taken l at a time with repetition is congruent to the sum of the numbers of combinations of ν elements taken l, $l-p$, $l-2p$, $\cdots$ at a time with repetition modulo p.

This may be transformed into

$$\binom{\mu+l-1}{l}\equiv\binom{\nu+l-1}{l}+\binom{\nu+l-p-1}{l-p}+\binom{\nu+l-2p-1}{l-2p}+\cdots\pmod{p}.$$

Also, when $p=\mu-\nu$, we can start from the congruence

$$(x+1)^\mu\equiv(x^p+1)(x+1)^\nu$$

and obtain another result.

Matsuyama, Japan, September 15, 1901.

Über einige elementare Grundgedanken der Nomographie.

Von M. d'Ocagne in Paris.

Die grundlegenden Gedanken der Nomographie, wie sie am einfachsten bei der zahlenmäßig bezeichneten Darstellung von Gleichungen mit 3 und 4 Variablen zum Ausdruck kommen, können schon in den elementaren Lehrbüchern der analytischen Geometrie unter den Anwendungen Platz finden.[1]) In diesem Sinne geben wir hier einen kurzen Abriß, verweisen aber bezüglich der allgemeinen Theorie auf das Lehrbuch[2]), wo wir den Gegenstand nicht allein bei Gleichungen mit 3 und 4 Variablen — wie sie in der Praxis weitaus am häufigsten vorkommen — sondern auch bei Gleichungen mit beliebig vielen Variablen in breiter Ausführlichkeit behandelt haben.

I. Systeme kotierter Elemente.

1. *Elemente mit einer Kote.* — Wenn man auf einer Ebene ein System geometrischer Elemente, das von einem Parameter abhängt, darstellt und an jedes Element diejenige Zahlenbezeichnung schreibt, die dem zugehörigen Werte des Parameters gleich ist, dann erhält man ein *System von Elementen mit einer Kote.* Diese Elemente können entweder in Punktkoordinaten durch eine Gleichung von der Form $F(x, y; \alpha) = 0$ oder in Linienkoordinaten durch eine Gleichung von der Gestalt $F(u, v; \alpha) = 0$ definiert werden.

Sie sollen die Elemente (α) heißen. Es ist klar, daß man diese Elemente in der Praxis nur für einige Werte von α — besonders für solche, die eine arithmetische Reihe bilden — wirklich darstellen wird,

---

1) Über die Zweckmäßigkeit einer solchen Einführung vergl. die Bemerkung von J. Tannery in seiner Analyse des unten genannten Traité. (Bull. des Sc. math. (2) XXIII, p. 176).

2) Traité de Nomographie (Paris, Gauthier-Villars; 1899). Dieses Werk soll im folgenden durch die Buchstaben T. N. bezeichnet werden. In deutscher Sprache hat Hr. F. Schilling einen Auszug daraus unter dem Titel: Über die Nomographie von M. d'Ocagne (Leipzig, Teubner 1900) erscheinen lassen.

[Wir bieten hier den Lesern, welche sich über *Wesen und Ziele der Nomographie* schnell eine Vorstellung bilden wollen, die Übersetzung der Abhandlung „Sur quelques principes élémentaires de nomographie", welche aus der Feder des Hauptvertreters der Nomographie stammt und im Bull. des sc. math. (2) **24**, 1900 erschienen ist. Herr Fürle war so liebenswürdig, die Übersetzung zu übernehmen, wofür ihm die Redaktion auch an dieser Stelle den verbindlichsten Dank ausspricht.
Die Red.]

und selbst dann noch bloß innerhalb gewisser Grenzen, welche durch die Bedürfnisse des beabsichtigten Gebrauches bestimmt sind.

Die Punktkoordinaten x, y sind fast durchweg kartesische rechtwinklige Koordinaten, die Linienkoordinaten u, v Parallelkoordinaten[1]), die für die hier vorliegenden Zwecke eine erheblich bequemere Anwendung als die Plückerschen Koordinaten gestatten. Die einfachsten Systeme von Elementen mit einer Kote erhält man, wenn man die Gleichung $F = 0$ als linear in x, y oder in u, v annimmt. Im ersten Falle erhält man ein System von *Geraden mit einer Kote*, welche Tangenten einer Kurve, ihrer sogenannten *Enveloppe*, sind; im zweiten Falle ein System von *Punkten mit einer Kote*, die auf einer Linie, ihrem Träger, verteilt sind.

Die Enveloppe schrumpft zu einem Punkte zusammen, oder der Träger wird eine Gerade, wenn α bloß in einer gewissen Verbindung vorkommt, für welche die Gleichung $F = 0$ linear ist, d. h. wenn F die Form hat:

$$F_1 + f(\alpha) F_2 = 0,$$

worin F_1 und F_2 lineare Funktionen von x, y oder u, v allein sind. Ein System von Punkten mit einer Bezeichnung nennt man je nach der Natur des Trägers eine *gerade* oder eine *krumme Skala*.

2. *Punkte mit 2 Koten.* — Ein System geometrischer Elemente mit 2 Parametern wird auch ein *System von Elementen mit 2 Koten* geben, wenn sich die Elemente in gewisser Weise in der Ebene dar-

---

1) Wir haben 1884 in den Nouvelles Annales diesen Koordinaten eine eingehende Studie gewidmet, die dann in unserer Broschüre Coordonnées parallèles et axiales (Paris, Gauthier-Villars 1885) wieder abgedruckt ist; inzwischen hatte Hr. K. Schwering über denselben Gegenstand seine Broschüre: Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten, (Leipzig, Teubner 1884) veröffentlicht. Bezüglich dessen, was für die nomographischen Anwendungen unentbehrlich ist, siehe T. N. Seite 125.

[In Bezug auf das Auftreten der Parallelkoordinaten findet man folgende, die vorstehenden Angaben des Herrn d'Ocagne ergänzenden Notizen in dem Aufsatze: „Die Unverzagtschen Linienkoordinaten. Ein Beitrag zur Geschichte der analytischen Geometrie" von F. Rudio. (Festschrift für Moritz Cantor. Leipzig, B. G. Teubner, 1899, S. 385—397). Die Parallelkoordinaten sind erwähnt von Chasles in der Correspondance de Quetelet **6**, 81 (1829). Systematisch durchgearbeitet und im Unterricht verwendet wurden sie von Unverzagt; vergl. seine Programmabhandlung: „Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden". Wiesbaden, 1871. Darauf folgten die Schweringschen Schriften: „Über ein neues Koordinatensystem" (1874), „Über ein besonderes Linienkoordinatensystem", Zeitschr. für Math. u. Phys. **21**, 1876; außerdem seine Progr. Abhdl. des Gymn. in Brilon. Die Red.]

stellen lassen. Eine solche Darstellung wird aber allgemein nicht möglich sein, wie man sich leicht durch folgende Betrachtung überzeugen kann: Wenn man dem einen Parameter einen festen Wert gibt, den andern aber sich ändern läßt, so erhält man ein in der Ebene darstellbares System von Elementen mit einer Kote; wenn man aber auch diejenigen Systeme aufzeichnet, die den verschiedenen Werten des ersten Parameters entsprechen, so werden diese verschiedenen über einander gelagerten Systeme ein durchaus unentwirrbares Durcheinander hervorrufen, mit *einziger* Ausnahme der jetzt zu betrachtenden Fälle.

Wenn zunächst die Elemente, um die es sich handelt, Punkte sind, so wird jedes der eben betrachteten Elemente mit einer Kote nur Punkte umfassen, die auf einem gewissen Träger liegen; die den Werten des ersten Parameters entsprechenden verschiedenen Träger können daher auf einer und derselben Ebene neben einander bestehen, und hieraus folgt die Möglichkeit, *Punkte mit 2 Koten* zu konstruieren.

Es stelle $uf(\alpha, \alpha') + v\varphi(\alpha, \alpha') + \psi(\alpha, \alpha') = 0$ die Gleichung dieser Punkte in Linienkoordinaten dar. Je nachdem man dem einen der Parameter α, α' einen festen Wert gibt und den anderen sich ändern läßt, erhält man Punkte, die entweder auf einer Linie (α) oder einer Linie (α') liegen. Diese beiden Liniensysteme (α), (α') bilden ein *Netz*, wobei der Punkt (α, α') sich im Schnittpunkte der Linien (α), (α') befindet.

3. *Verdichtete Linien mit 2 Koten.* — Wenn die Elemente α, α' nicht mehr Punkte, sondern Linien sind, so können sie in derselben Ebene nur in dem Falle neben einander bestehen, wo die Systeme von Elementen mit einer Kote, welche den verschiedenen Werten eines der beiden Parameter entsprechen, zusammenfallen, *abgesehen von den Koten.* Dies tritt nur dann ein, wenn in der Gleichung, welche die betrachteten Elemente definiert, die Parameter α, α' unter einem und demselben Funktionszeichen vereinigt werden können, d. h. wenn diese Gleichung von der Form ist:

$$F[x, y;\ \theta(\alpha, \alpha')] = 0.$$

Denn alle Elemente (α, α'), die denjenigen Wertepaaren (α, α') entsprechen, für welche *die Funktion* $\theta(\alpha, \alpha')$ *einen und denselben Wert* t besitzt, fallen dann zusammen, und die Gesamtheit aller Elemente (α, α') schrumpft zusammen zu einem System von Elementen mit *einer* Kote t, wobei jedes der Elemente t einer unbegrenzten Menge von Wertepaaren α, α' entspricht. Die Elemente (α, α') heißen dann *verdichtet* in den Elementen t.

Wie kann man nun in diesem Falle die verschiedenen Wertepaare der Parameter α, α', die jedem Element t entsprechen, darstellen? Durch folgendes Verfahren geht das sehr einfach:

Durch die Kurvenschar, welche durch die Gleichung[1]) $F(x, y; t) = 0$ definiert ist, lege man eine ganz beliebige Kurvenschar, die von einem der beiden Parameter, beispielsweise von α, gemäß einer willkürlichen Gleichung $\varphi(x, y; \alpha) = 0$ abhängen möge. Wenn wir jetzt für α' einen bestimmten Wert festlegen und alle zusammengehörigen Wertepaare α, t betrachten, die aus der Gleichung $\theta(\alpha, \alpha') = t$ folgen, so sehen wir, daß die Schnittpunkte der zusammengehörigen Kurven (α), (t) auf einer Kurve liegen, deren Gleichung $\psi(x, y; \alpha') = 0$ durch Elimination von α, t aus den drei angeschriebenen Gleichungen hervorgeht, und die mit dem für α' gewählten Werte zu bezeichnen sein wird. Wenn man diesen Wert α' sich ändern läßt, behält man eine Kurvenschar (α'), die durch die letzte Gleichung bestimmt ist, und die in Verbindung mit der willkürlich gewählten Kurvenschar (α) die verschiedenen Paare von Koten angibt, die den Kurven der Schar zukommen. (Figur 1.)

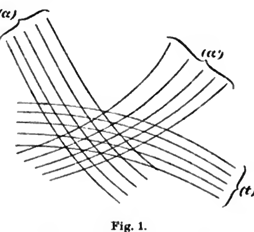


Fig. 1.

Die Gesamtheit der Scharen (α), (α') bildet dann ein Netz, welches das *Netz der Koten* der Schar (t) genannt werden kann; und man sieht ein, daß *jedem verdichteten Elemente t je zwei Koten für alle Punkte des Netzes (α, α'), durch welche dieses Element geht, zukommen.*

Wenn die verdichteten Elemente (t) parallele Gerade sind, so stellt ihre Gesamtheit zusammen mit dem Netz von Koten eine sogenannte *binäre Skala* dar.

4. *Gerade mit 2 Koten. Doppelte Umhüllungskurven.* — Die bisher untersuchten Elemente sind die einzigen, welche einer *ständigen* Darstellung in der Ebene fähig sind; dagegen gestattet die Einführung beweglicher Systeme, das Feld der bei der Herstellung der Nomogramme (Rechenblätter) verwendbaren Elemente zu erweitern. Man sieht nämlich ein, daß in gewissen Fällen die Elemente eines Systems mit 2 Koten dadurch erhalten werden können, daß man entweder eine einzelne auf einer beweglichen Ebene aufgezeichnete Linie über die

1) Wenn es sich um Elemente handelt, die in Linienkoordinaten gegeben sind, so kann man für die Lösung stets ihre Gleichung in Punktkoordinaten nehmen, die sich in bekannter Weise aus der Berührungsgleichung ergibt.

feste Ebene hinweg gemäß zwei Parametern verschiebt, oder daß man eine ganze Kurvenschar, die auf einer solchen verlegbaren Ebene aufgezeichnet ist, gemäß einem Parameter bewegt. Wenn wir uns auf den einfachsten und zugleich aus praktischen Rücksichten interessantesten Fall beschränken, daß die Elemente mit zwei Koten Gerade sind, so ist klar, daß man sie alle vermittelst einer beweglichen Geraden erzeugen kann. Die ganze Frage kommt darauf hinaus, die Lage dieser Geraden für ein gegebenes Wertepaar der entsprechenden Parameter zu bestimmen. Es sei

$$xf(\alpha, \alpha') + y\varphi(\alpha, \alpha') + \psi(\alpha, \alpha') = 0$$

die Gleichung einer Geraden mit zwei Koten. Wenn man dem α einen festen Wert gibt, aber α' sich ändern läßt, so erhält man für die entsprechenden Geraden eine Umhüllungskurve, die durch den gewählten Wert von α bezeichnet werden kann. Lassen wir jetzt diesen Wert sich ändern, so erhalten wir eine Schar von Umhüllungskurven (α). In derselben Weise wollen wir eine Schar von Umhüllungskurven (α') definieren. *Die Gerade mit den beiden Koten* (α, α') *wird dann gemeinsame Tangente für beide Umhüllungskurven* α, α'.

Man sieht, daß diese Bestimmung einer Geraden mit zwei Koten genau derjenigen entspricht, die wir in Nr. 2 bei Punkten mit zwei Koten betrachtet haben. Indessen ist hier die Gerade (α, α') nicht ständig auf dem Blatte der Zeichnung vorhanden, wie es bei dem Punkte (α, α') der Fall war. Die Gerade ist durch ihre beiden Umhüllungskurven (α), (α') definiert; und jedesmal, wenn man sie braucht, muß man an diese beiden Kurven eine gemeinsame Tangente legen, die aus einer auf einem durchsichtigen Stoffe hergestellten Geraden oder aus einem gespannten Faden bestehen kann.

Von vornherein ist leicht ersichtlich, daß die Darstellungsweisen, die sich auf die Verwendung von *selbständigen* Elementen mit zwei Koten gründen [die in der Praxis im allgemeinen nur Punkte (Nr. 2) oder Gerade (Nr. 4) sein werden], eine größere Allgemeinheit besitzen als diejenigen, welche nur *verdichtete* Elemente zulassen.

II. Typen von Nomogrammen mit drei und vier Variablen.

5. *Punkt-Nomogramme mit drei Variablen.* — Die einfachste Lagenbeziehung zwischen drei in dem Punktgebiete definierten Linien besteht darin, daß sie durch den nämlichen Punkt gehen. Hieraus entsteht der allgemeinste Typus von Punkt-Nomogrammen mit drei Variablen (Figur 2). Es mögen die drei Scharen von Linien mit einer Kote durch die drei Gleichungen definiert sein:

$$(1)\ F_1(x, y; \alpha_1) = 0; \quad (2)\ F_2(x, y; \alpha_2) = 0; \quad (3)\ F_3(x, y; \alpha_3) = 0.$$

Wenn man aus diesen Linienscharen je eine Linie herausnimmt, und wenn diese drei Linien durch denselben Punkt gehen, so sind ihre zusammengehörigen Koten durch die Gleichung

$$(E) \qquad \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

verbunden, die man erhält, wenn man x, y aus den drei zusammengehörigen Gleichungen eliminiert.

Jede Gleichung zwischen drei Variablen kann so auf zahllose Arten dargestellt werden. Man erkennt nämlich, daß man, wenn die letzte Gleichung gegeben ist, zwei der voraufgehenden, (1) und (2) z. B., willkürlich wählen kann; die dritte folgt dann aus (1), (2) und (E) durch Elimination von α_1 und α_2.

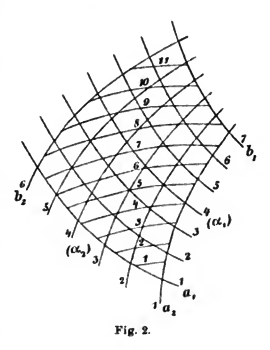


Fig. 2.

Insbesondere kann man immer zwei der kotierten Scharen durch Gerade, am allereinfachsten durch die Geraden $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$ darstellen. Sie bestimmen dann ein regelmäßiges Gitter, welches die Kurven (α_3) durchqueren. In der Praxis ist die Wahl der ersten beiden Scharen der Bedingung unterworfen, daß man nach Ausführung der genannten Elimination auf eine dritte *reelle* Schar geführt werden muß, und daß man bei dieser Wahl immer darauf bedacht ist, die einfachstmöglichen kotierten Linien der drei Scharen zu erhalten. Das ist ja gerade einer der hauptsächlichsten Gesichtspunkte der Nomographie. Insbesondere ist klar, daß man sich die Gelegenheit, wo man sich auf alleinige Anwendung von kotierten Geraden beschränken kann, nicht entgehen lassen wird. Nichts aber ist leichter als den allgemeinen Typus der Gleichungen zu bilden, die sich durch drei Scharen von Geraden mit einer Kote darstellen lassen. Nämlich die obigen Gleichungen (1), (2), (3) nehmen in diesem Falle die Gestalt an:

$$(1') \qquad x f_1(\alpha_1) + y \varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$

$$(2') \qquad x f_2(\alpha_2) + y \varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$

$$(3') \qquad x f_3(\alpha_3) + y \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

und Gleichung (E) wird:

$$(E') \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1), & \varphi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2), & \varphi_2(\alpha_2), & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3), & \varphi_3(\alpha_3), & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Unter den Gleichungen von diesem allgemeinen Typus haben diejenigen, welche in der Praxis am häufigsten auftreten, die Form[1])

$$(E'') \qquad f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_3) + \varphi_2(\alpha_2)\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Man sieht ein, daß man sie vermittelst der drei Scharen von Geraden mit einer Kote darstellt:

$$(1'') \qquad x = f_1(\alpha_1),$$

$$(2'') \qquad y = \varphi_2(\alpha_2),$$

$$(3'') \qquad xf_3(\alpha_1) + y\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, daß man ein gegebenes Nomogramm von kotierten Geraden der allgemeinsten homographischen Transformation unterwerfen kann, während man die Koten der verschiedenen Geraden, die es zusammensetzen, beibehält. Weil nun eine solche Transformation in der Ebene von acht Parametern abhängt, so kann man von *vornherein* die Beweglichkeit beurteilen, die sie für die Herstellung der Nomogramme dadurch mit sich führt, daß sie über die Parameter die vorteilhafteste Verfügung gestattet.[2])

Andererseits sei darauf hingewiesen, daß es zwar in der Praxis im allgemeinen leicht ist, eine gegebene Gleichung an einen der obigen allgemeinen Typen zu knüpfen; die umgekehrte Aufgabe dagegen, die analytischen Merkmale bestimmen, an denen man *vorweg* die Möglicheiner solchen Verknüpfung erkennen kann, führt auf rein analytische Probleme, die weder des Interesses noch der Schwierigkeit ermangeln.

6. *Berührungsnomogramme mit drei Variablen.* — Ganz entsprechend besteht die einfachste Lagenbeziehung zwischen drei im Berührungsgebiete definierten Linien darin, daß sie eine und dieselbe Gerade berühren. Hieraus geht der allgemeinste Typus eines Berührungsnomogrammes mit drei Variablen hervor, dessen Grundgedanke durch dieselben Gleichungen veranschaulicht werden kann, wie die eben bei Punktnomogrammen benutzten, mit dem einzigen Unterschiede, daß an Stelle der kartesischen Koordinaten x, y die Parallelkoordinaten u, v treten.

Mittels dieser Substitution definieren die früheren Gleichungen (1), (2), (3) drei Scharen von Linien mit einer Kote (α_1), (α_2), (α_3); und die Koten dreier dieser Linien sind durch eine Gleichung (E) verbunden, wenn diese drei Linien Tangenten an dieselbe Gerade sind.

1) Vgl. verschiedene Beispiele solcher Gleichungen: T. N. Kap. II. § II.

2) T. N. Nr. 49 und 50.

Nunmehr muß man eine bewegliche Gerade, den sogenannten *Anzeiger* zu Hilfe nehmen, wenn man sich des Nomogrammes bedienen will.

Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt: Gerade so, wie sich bei Punktnomogrammen immer eine solche Wahl treffen ließ, daß zwei der kotierten Scharen durch gerade Linien dargestellt wurden, so kann man hier bewirken, daß zwei kotierte Systeme durch Punkte gebildet werden. So ist jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen α_1, α_2, α_3 durch zwei Systeme kotierter Punkte (α_1), (α_2) und eine Schar kotierter Kurven (α_3) darstellbar, wobei die Werte der drei Variablen derartig zusammenhängen, daß *die Gerade, welche die kotierten Punkte* α_1 *und* α_2 *verbindet, Tangente an die kotierte Kurve* α_3 *ist.* Die Notwendigkeit, eine bewegliche Gerade zu verwenden, um die Ablesungen am Nomogramme zu ermöglichen, scheint auf den ersten Blick den Berührungsnomogrammen eine untergeordnete Stellung gegenüber den Punktnomogrammen zu geben.

Dem ist aber nicht so, wie man sich durch die folgende Bemerkung sofort überzeugen kann. Die Bestimmung einer Geraden durch zwei kotierte Punkte ist frei von dem möglichen Fehler, welcher der Bestimmung eines Punktes durch den Schnitt zweier kotierten Linien anhaftet, und der darin besteht, daß man beim Verfolgen dieser beiden Linien bis zu ihrer Durchkreuzung Gefahr läuft, ohne genügende Aufmerksamkeit auf benachbarte Linien der Scharen, von denen sie Teile sind, überzugehen. Diese Fehlerquelle ist bei kotierten Punkten nicht vorhanden, weil bei ihnen die Kote nur *an einem einzigen Punkte* angebracht ist, anstatt sich über eine ganze Linie auszudehnen. Es sei noch bemerkt, daß dieser Umstand die Einschaltung nach dem Augenmaße zwischen den kotierten Elementen, welche auf dem Nomogramme wirklich vorhanden sind, erleichtert. Dieser doppelte Vorteil macht sich noch mehr geltend, wenn die darzustellende Gleichung von der früheren Form (E') ist, (von der die Form (E'') nur einen besonderen Fall darstellt), weil sich dann die durch die Gleichungen (1), (2), (3) [worin u, v für x, y gesetzt sind] definierten drei Systeme kotierter Elemente auf Systeme von Punkten mit einer Kote reduzieren, zwischen denen man bloß mit Hilfe des Anzeigers einzufluchten braucht; hierher stammt die Benennung *Nomogramme mit fluchtrechten Punkten* (Figur 3).[1] Am häufigsten treten in der Praxis solche Nomogramme auf, die unter die Gleichungen von der Form (E'') fallen und durch die Gleichungen (1), (2), (3) definiert sind, wenn in ihnen x und y durch u und v ersetzt sind.

1) T. N. Kap. III.

Wenn man ein solches Nomogramm auf kartesische Koordinaten bezieht, so kann man die Gleichungen, durch welche die verschiedenen kotierten Elemente definiert sind, — unter l eine beliebige Größe verstanden — schreiben:

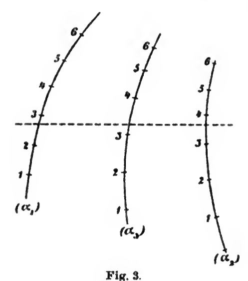


Fig. 3.

$$(\alpha_1) \quad \begin{cases} x = -l, \\ y = \quad f_1(\alpha_1), \end{cases}$$

$$(\alpha_2) \quad \begin{cases} x = l, \\ y = \varphi_2(\alpha_2), \end{cases}$$

$$(\alpha_3) \quad \begin{cases} x = l \dfrac{\varphi_3(\alpha_3) - f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}, \\ y = \dfrac{-\psi(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}. \end{cases}$$

In der *Anmerkung* am Schlusse der folgenden Nummer findet man ein neues Argument zu Gunsten der Berührungsnomogramme.

Wir wollen hier noch bemerken, daß die Anwendung der allgemeinsten Homographie gute Dienste leisten kann, um einem Nomogramme mit fluchtrechten Punkten die bequemste Lage zu geben.[1])

7. *Nomogramme mit vier Variablen.* — Um von den eben erklärten Typen der Nomogramme mit drei Variablen zu einem Typus von Nomogrammen mit vier Variablen überzugehen, reicht es offenbar aus, daß man eines der vorkommenden Systeme mit einer Kote durch ein System von Elementen mit zwei Koten ersetzt.

Dies zeigt uns unmittelbar, daß ein Nomogramm mit vier Variablen *ohne bewegliches Element, nur verdichtete Elemente* als Elemente mit zwei Koten zuläßt. Wir haben ja in Nr. **3** und Nr. **4** gesehen, daß man im Punktgebiete nicht verdichtete Elemente mit zwei Koten nur mit Hilfe beweglicher Elemente erzeugen kann. Nr. **2** hat gezeigt, daß man im Berührungsgebiete selbständige Elemente mit zwei Koten nur dann herstellen kann, wenn diese Elemente zu Punkten zusammenschrumpfen; aus Nr. **6** folgt dagegen, daß die Ablesung von einem Berührungsnomogramme nur mit Hilfe eines beweglichen Anzeigers vor sich gehen kann. Der obige Schluß ist also durchaus berechtigt.

Wenn wir in dem allgemeinen Typus der Punktnomogramme mit drei Variablen (Nr. **5**) eine Schar von Linien mit einer Kote durch eine Schar verdichteter Linien mit zwei Koten ersetzen, so erhält die

---

1) T. N. 60, 62. Ein besonders bemerkenswertes Beispiel der Anwendung findet sich in Nr. 84.

auf diese Weise dargestellte Gleichung mit vier Variablen die Form $F[\alpha_1, \alpha_3, \theta(\alpha_2, \alpha_4)] = 0$, die sich auch $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \theta(\alpha_3, \alpha_4)$ schreiben läßt. Wie man bei der Darstellung einer Gleichung mit drei Variablen zwei Scharen kotierter Linien beliebig wählen durfte, so kann man besonders für die Schar, welche zur Schar verdichteter Geraden mit zwei Koten werden soll, eine Schar paralleler Geraden nehmen. Man kann also sagen, daß jede zwischen vier Variablen bestehende Gleichung von dem genannten Typus sich durch eine Schar von Linien mit einer Kote und ein Netz darstellen läßt, das von einer Schar paralleler Linien mit einer Kote und einer Schar paralleler verdichteter Linien mit zwei Koten, d. h. von einer binären Skale gebildet ist.

Um eine allgemeinere Weise der Darstellung von Gleichungen mit vier Variablen zu gewinnen, muß man zu solchen selbständigen Elementen mit zwei Koten seine Zuflucht nehmen, deren Anwendung im vorhergehenden als möglich erkannt ist, insbesondere zu Geraden mit zwei Koten.

Wir wollen uns also das allgemeinste Nomogramm gebildet denken durch zwei Scharen von Linien mit einer Kote $F_1(x, y; \alpha_1) = 0$, $F_2(x, y; \alpha_2) = 0$ und eine Schar von selbständigen Geraden mit zwei Koten $xf(\alpha_3, \alpha_4) + y\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0$. Das Ergebnis der Elimination von x und y aus diesen drei Gleichungen wird von der Gestalt sein

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2) f(\alpha_3, \alpha_4) + \chi(\alpha_1, \alpha_2) \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Das ist also der Typus aller auf diese Weise darstellbaren Gleichungen. Es ist bemerkenswert, daß die meisten Gleichungen mit vier Variablen, die in der Praxis auftreten, sich auf diese Gestalt zurückführen lassen.

Das zugehörige Nomogramm wird ersichtlich die vier Scharen von Elementen mit einer Kote (α_1), (α_2), (α_3), (α_4) umfassen, worin die beiden letzten die doppelten Umhüllungen der Geraden mit zwei Koten (α_3, α_4) bilden, und die Anwendung dieses Nomogramms läßt sich in folgender Fassung aussprechen: *Die gemeinsame Tangente an die kotierten Kurven* α_3 und α_4 *geht durch den Schnittpunkt der kotierten Kurven* α_1 und α_2. Dieser Ausspruch ist gleichbedeutend mit: *Die Gerade mit den beiden Koten* (α_3, α_4) *geht durch den Punkt mit den beiden Koten* (α_1, α_2). In dieser Fassung zeigt er, daß diese Darstellungsart durch beziehungsweise Transformation sich selbst wieder hervorbringt. Wenn man versuchen würde, ein Berührungsnomogramm ebenso zu verallgemeinern vermittelst derselben Gleichungen, in denen nur

u, v an die Stelle von x, y treten, so ist ersichtlich, daß man zu dem gleichen Ergebnis gelangen würde, mit dem einzigen Unterschiede, daß das Element (α_3, α_4) hier ein Punkt, das Element (α_1, α_2) eine Gerade bedeutet.

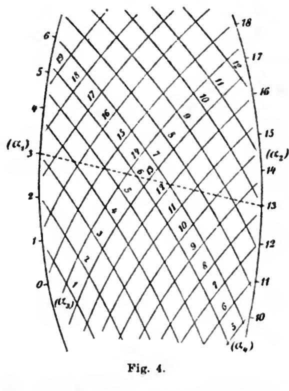


Fig. 4.

Der für die Praxis interessanteste Fall ist derjenige, wo die Umhüllungen (α_1), (α_2) der Geraden mit zwei Koten (α_1, α_2) zu Punkten zusammenschrumpfen, d. h. wo ein Nomogramm mit fluchtrechten Punkten vorliegt, während eines der drei Punktsysteme zwei Koten besitzt. (Fig. 4.)

In diesem Falle mögen die Gleichungen der Punkte mit einer Kote (α_1) und (α_2) in Parallelkoordinaten lauten:

$$u f_1(\alpha_1) + v \varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$
$$u f_2(\alpha_2) + v \varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0;$$

die Gleichung der Punkte mit zwei Koten (α_3, α_4) heiße dagegen

$$u f(\alpha_3, \alpha_4) + v \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Dann ist die dargestellte Gleichung von der Form

$$(\varepsilon) \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f(\alpha_3, \alpha_4) & \varphi(\alpha_3, \alpha_4) & \psi(\alpha_3, \alpha_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Die in der Praxis am häufigsten wiederkehrenden Gleichungen von diesem Typus lassen sich schreiben:

$$(\varepsilon') \qquad f_1(\alpha_1) f(\alpha_3, \alpha_4) + \varphi_2(\alpha_2) \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

drücken also gemäß Nr. 6. die Flucht der Punkte aus:

$$(\alpha_1) \begin{cases} x = -l, \\ y = \quad f_1(\alpha_1), \end{cases} \qquad (\alpha_2) \begin{cases} x = l, \\ y = \varphi_2(\alpha_2), \end{cases} \qquad (\alpha_3, \alpha_4) \begin{cases} x = l \dfrac{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) - f(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + f(\alpha_3, \alpha_4)}, \\ x = \dfrac{-\psi(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + f(\alpha_3, \alpha_4)}. \end{cases}$$

Um die Gleichungen der beiden Scharen von Linien mit einer Kote (α_3) und (α_4) herzustellen, deren Gesamtheit das Netz (α_3, α_4) bildet, genügt es, aus den beiden letzten aufgeschriebenen Gleichungen α_3 und α_4 nach einander zu eliminieren.

Dann umfaßt das Nomogramm außer den Punkten mit einer Kote (α_1) und (α_2) die beiden Scharen von Linien mit einer Kote, und ihre Anwendung läßt sich in dem Satze aussprechen: *Die Verbindungslinie der kotierten Punkte α_1 und α_2 geht durch den Schnittpunkt der kotierten Linien α_3 und α_4.*

Anmerkung. — Wir beschränken uns hier auf Gleichungen mit vier Veränderlichen. Es ist aber klar, daß man unmittelbar Darstellungsarten erhielte, die auf Gleichungen mit fünf und sechs Variablen anwendbar wären, wenn man in einem Typus von Nomogrammen mit drei Veränderlichen nicht bloß ein einziges System von Elementen mit einer Kote, sondern zwei oder selbst drei durch Systeme von Elementen mit zwei Koten ersetzen würde. Hier machen sich die Vorteile der Berührungsnomogramme vor den Punktnomogrammen geltend. Wenn wir nämlich in einem Punktnomogramm, das durch die Durchkreuzung dreier Systeme von Geraden mit einer Kote gebildet wird, jedes dieser drei Systeme durch ein System selbständiger Geraden mit zwei Koten ersetzen, so brauchen wir zur Ablesung an diesem Nomogramme *drei unabhängige bewegliche Gerade*, und das ist offenbar wenig praktisch. Wenn wir dagegen in einem Nomogramme mit fluchtrechten Punkten jedes der drei Systeme von Punkten mit einer Kote durch ein System von Punkten mit zwei Koten ersetzen, so genügt zur Ablesung stets *eine einzige bewegliche Gerade.*

III. Anwendung auf die nomographische Lösung der algebraischen Gleichungen.

8. *Normalformen der algebraischen Gleichungen.* — Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade n in z hängen von den n Koeffizienten dieser Gleichung ab. Wenn man also die nomographische Lösung dieser Gleichung in dem allgemeinen Falle, daß den Koeffizienten beliebige Werte beigelegt sind, bewirken will, so muß man die Gleichung als eine Beziehung zwischen $n+1$ Veränderlichen, nämlich der Unbekannten z und den n Koeffizienten ansehen. Nun ist es aber bekanntlich möglich, durch Transformationen, die nur die Lösung von Nebengleichungen ersten und zweiten Grades erfordern, die Gleichungen eines gegebenen Grades auf gewisse kanonische Typen zurückzuführen, die eine geringere Zahl von Koeffizienten enthalten. Das einfachste und klassischste Beispiel hierfür ist die Gleichung dritten Grades $x^3 + nx^2 + px + q = 0$, die durch die Transformation $x' = x - \frac{n}{3}$ auf die Form $x'^3 + p'x' + q' = 0$ zurückgeht.

Unter den Transformationen dieser Art ist die wichtigste die von Tschirnhaus, vermöge deren Bring, Jerrard, Brioschi und Herr Klein für die Gleichungen 5. Grades verschiedene Normalformen erlangt haben, die nur einen einzigen Parameter enthalten.[1]) Diese Transformation erlaubt namentlich jede Gleichung 7. Grades auf die Normalform $z^7 + \lambda z^3 + \mu z^2 + \nu z + 1 = 0$ zu bringen, die außer der Unbekannten nur noch die 3 Parameter λ, μ, ν umschliefst, also in unserem Sinne eine Gleichung zwischen 4 Variablen vorstellt.

Allgemein kann jede reduktible algebraische Gleichung durch Anwendung der besprochenen Transformationen auf eine Normalform gebracht werden, die nur noch zwei oder drei Parameter enthält, sich also in einer der beiden Formen

$$\text{(I)} \quad Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \text{(II)} \; Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 + \nu Z_4 = 0,$$

schreiben läßt, wobei Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 Polynome von z mit numerischen Koeffizienten bedeuten.

Es genügt nun zu zeigen, wie man die besprochenen nomographischen Grundgedanken auf diese Gleichungstypen bei drei, bezw. bei vier Variablen anwenden kann, damit das erhaltene Nomogramm in Verbindung mit den Transformationen, welche die Gleichung auf die Normalform bringen und sich selbst leicht in Nomogramme übersetzen lassen, eine vollständige Lösung der entsprechenden Gleichungen liefere.

9. *Gleichungen vom Typus I.* — Wenn man die Variablen λ, μ, Z bezw. den α_1, α_2, α_3 entsprechen läßt, so ersieht man unmittelbar, daß die Gleichung (I) zum Typus (ε'') der Nr. **5** gehört. Wie wir in Nr. **6** gesehen, drückt sie die Flucht der drei Punkte aus:

$$(\lambda) \begin{cases} x = -l, \\ y = \quad \lambda, \end{cases} \qquad (\mu) \begin{cases} x = l, \\ y = \mu, \end{cases} \qquad (z) \begin{cases} x = l\,\dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \\ y = \dfrac{-Z_1}{Z_3 + Z_2}. \end{cases}$$

Die Punkte (λ) und (μ) bilden zwei regelmäßige Skalen, deren Träger Parallelen zur y-Achse sind. Die Punkte (z) sind über eine Kurve verteilt, deren Gleichung — wenn man sie wünschte — durch Elimination von z aus den letzten beiden hingeschriebenen Gleichungen zu bekommen wäre.

Wir wollen noch allgemein bemerken, daß man sich bei der Herstellung des Nomogramms auf diejenigen Punkte beschränken darf, welche positiven Werten von z entsprechen, weil man die absoluten Werte der negativen Wurzeln einer Gleichung als positive Wurzeln

---

1) Vgl. das „Lehrbuch der Algebra" von Heinr. Weber, Abschnitt VI.

der transformierten Gleichung erhalten kann, die entsteht, wenn man $-z$ statt z einführt.

Unter den in Rede stehenden Typus (I) fallen unmittelbar: die allgemeine Gleichung zweiten Grades, für die $Z_1 = z^2$, $Z_2 = z$, $Z_3 = 1$, und die vereinfachte Gleichung dritten Grades, für welche $Z_1 = z^3$, $Z_2 = z^2$, $Z_3 = 1$ ist. Die entsprechenden Nomogramme, deren Konstruktion im einzelnen in 79 und 81 des T. N. untersucht ist, sind im Zusammenhang auf Figur 80 dieses Werkes dargestellt.

10. *Gleichungen vom Typus (II).* — Wenn man ebenso die Variablen λ, μ, ν, z den α_1, α_2, α_3, α_4 beziehungsweise entsprechen läßt, so sieht man, daß die Gleichung zum Typus (ε') der Nr. 7. gehört. Sie drückt dann die Flucht der Punkte aus:

$$(\lambda)\ \begin{cases} x = -l, \\ y = \quad \mu, \end{cases} \qquad (\mu)\ \begin{cases} x = l, \\ y = \lambda, \end{cases} \qquad (\nu, z)\ \begin{cases} x = l\ \dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \\ y = -\dfrac{Z_1 + \nu Z_4}{Z_3 + Z_2}. \end{cases}$$

Die Punkte (λ) und (μ) sind dieselben wie vorher. Was die Punkte (ν, z) angeht, so sind sie ersichtlich durch ein Netz gegeben, in dem die Elemente z Parallelen zur y-Achse sind, weil ihr x von ν unabhängig ist. Die Kurven (ν), die in Verbindung mit diesen Geraden das Netz (ν, z) liefern, kann man sich nun definiert denken durch die beiden letzten aufgeschriebenen Gleichungen, in denen z als Parameter der Konstruktion gilt.

Insbesondere erhält man ein nach dieser Art dargestelltes Nomogramm der allgemeinen Gleichung 3. Grades, wenn man $Z_1 = z^3$, $Z_2 = z^2$, $Z_3 = z$, $Z_4 = 1$ setzt. Das so erhaltene Nomogramm ist im einzelnen in 125 des N. T. untersucht und in Fig. 140 dieses Werkes dargestellt.

Bei der Gleichung 4. Grades kann man durch eine lineare Transformation den Koeffizienten von z^3 gleich 0 oder 1 machen. Im zweiten Falle erhält man z. B. das Nomogramm, wenn man

$$Z_1 = z^4 + z^3,\ Z_2 = z^2,\ Z_3 = z,\ Z_4 = 1$$

setzt. Das betreffende Nomogramm ist in 126 des T. N. untersucht und in Figur 150 dargestellt. Die Transformation, welche eine beliebige Gleichung 4. Grades auf die vereinfachte Form bringt, ist auf Fig. 151 in ein Nomogramm übersetzt.

Die hier betrachtete nomographische Lösung reicht bis zur Gleichung siebenten Grades, welche durch die Tschirnhaus-Transformation auf die in Nr. 8 genannte Form gebracht werden kann. Es genügt nämlich zu setzen:

$$Z_1 = z^7 + 1;\ Z_2 = z_3;\ Z_3 = z^2;\ Z_4 = z.$$

Dies Beispiel läßt so recht den Nutzen hervortreten, der sich an die Einführung beweglicher Elemente bei den Nomogrammen knüpft. Wenn man diese nicht zuläßt, kann man Nomogramme mit mehr als drei Variablen nur durch verdichtete Elemente mit zwei Koten erhalten. Aus dem aber, was in Nr. **3** über diese Elemente gesagt ist, geht hervor, daß die Lösung der vorgelegten Gleichung in diesem Falle sich notwendig auf eine Folge von Operationen mit zwei Parametern reduzieren muß. Was nun namentlich die Gleichung 7. Grades angeht, so muß sich nach Hilbert die Unmöglichkeit einer solchen Zurückführung dartun lassen; und man sieht ein, wie leicht dagegen durch die Einführung einer beweglichen Geraden, die nomographische Lösung einer solchen Gleichung geworden ist.[1])

Über den Zusammenhang einer bei der Lösung von Alhazens Aufgabe auftretenden gleichseitigen Hyperbel mit der neueren Dreiecksgeometrie.

Von Oskar Gutsche in Breslau.

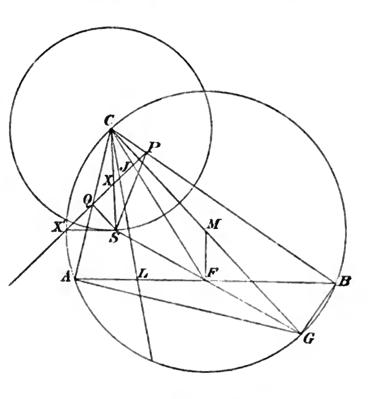
Die Alhazensche Aufgabe, bei einem spiegelnden Kreise den Reflexionspunkt zu bestimmen, wenn Auge und leuchtender Gegenstand sich an gegebenen Orten befinden, ist meines Wissens mit den Mitteln der projektiven Geometrie noch nicht gelöst; P. Bode in seiner wertvollen Schrift über dies Problem (Frankfurt a. M., 1893) erwähnt wenigstens nichts davon. Der Zufall fügte es, daß ich vor einigen Jahren die Alhazensche Aufgabe auf rein geometrischem Wege mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel löste, ohne zu wissen, daß schon Huygens mehrere Lösungen gegeben hat. Aus Bodes Abhandlung habe ich erst vor kurzem ersehen, daß der berühmte Geometer bei der einfachsten der von ihm gefundenen Konstruktionen dieselbe Hyperbel benutzt hat, auf die ich gestoßen bin. Da er aber auf ganz anderem, wahrscheinlich umständlicherem Wege zu dieser Kurve gelangt ist, und

---

1) Vgl. hierzu noch den Aufsatz des Verfassers „Sur la résolution nomographique des équations" in den Nouv. Ann. (4) **2**, 49. Ferner verdient bemerkt zu werden, daß der Übersetzer obiger Abhandlung dasselbe Thema von einem etwas anderen Gesichtspunkt in der Beilage zum Jahresbericht der neunten Realschule „Rechenblätter" (Gärtner 1902, Berlin) bearbeitet hat. Eine Folge dieser Rechenblätter ist in Berlin bei Mayer & Müller erschienen. Die Red.

da es mir gelungen ist, einen bemerkenswerten Zusammenhang dieser Hyperbel mit der neueren Geometrie des Dreiecks aufzudecken, so dürfte die Veröffentlichung meiner Lösung nicht unangebracht sein.

Gegeben sind die Punkte P und Q und ein Kreis k um C. Der auf ihm gelegene Punkt S sei so beschaffen, daß $< PSC = CSQ$ ist. Wird die Gerade PQ von SC in X und von der in S gezogenen Kreistangente in X' getroffen, so trennen X und X' die Punkte P und Q harmonisch, sind also ein Punktpaar der hyperbolischen Involution, deren Doppelpunkte P und Q sind. Wandert daher X' auf PQ, so durchläuft X eine Punktreihe, die zu der von X' erzeugten Reihe projektiv ist. Die Polare von X' in Bezug auf k geht durch S und den Pol G von PQ; sie dreht sich also um G, wenn X' die Gerade PQ durchläuft, und der von ihr beschriebene Büschel ist zu der von X' hervorgerufenen Punktreihe projektiv. Daher sind auch die von der Polare GS und dem Strahl CX erzeugten Büschel projektiv; der Punkt S liegt also auf einem Kegelschnitt h, der durch die Büschelmittelpunkte C und G läuft und eine Hyperbel sein muß, da die beiden Büschel ungleichlaufend sind. Man erkennt sofort, daß diese



Kurve die Fußpunkte A und B der von G auf CQ und CP gefällten Lote enthält, und daß sie die durch C laufende Mitteltransversale CI des Dreiecks CPQ berührt. Da im Dreieck ABC die Gerade PQ antiparallel zu AB ist, so ist CI die Gegentransversale zur Mitteltransversale CF. Der Reflexionspunkt S ist mithin einer der Schnittpunkte des Kreises k mit einer dem Dreieck ABC umgeschriebenen Hyperbel h, die durch den Endpunkt G des durch C gezogenen Umkreisdurchmessers geht und die durch C laufende Symmediane berührt.

Ordnet man nun jedem Punkte der Ebene seinen Winkelgegenpunkt in Bezug auf das Dreieck ABC zu, so entspricht bekanntlich in dieser isogonalen Verwandtschaft jeder Geraden ein dem Dreieck umgeschriebener Kegelschnitt und umgekehrt. Es fragt sich, welche Gerade g der Hyperbel h entspricht. Die Gegentransversale der Tan-

gente CI muß AB in einem auf g gelegenen Punkte treffen; g läuft daher durch die Mitte F von AB. Da die Winkel CBG und CAG Rechte sind, so ist der Winkelgegenpunkt von G der unendlich ferne Punkt, in dem sich die beiden auf AB in B und A errichteten Senkrechten schneiden; die Gerade g ist mithin der auf AB senkrechte Umkreisdurchmesser. Diesem Durchmesser entspricht aber, wie man leicht erkennt, eine gleichseitige Hyperbel h, deren Mittelpunkt F ist und deren Asymptoten den Halbierungslinien des Winkels ACB und seines Nebenwinkels parallel sind. Diese Hyperbel ist von Herrn E. Lemoine mit Γ_c bezeichnet worden. Sie tritt bei der im ersten Bande dieses Archivs gestellten Aufgabe 20 als ein Teil des geometrischen Ortes für solche Punkte P auf, für die, falls PP_a und PP_b die von P auf die Seiten BC und AC des Dreiecks ABC gefällten Lote sind, die Proportion besteht: $PA : PB = PP_b : PP_a$.

Um also Alhazens Aufgabe zu lösen, konstruiert man den Pol G von PQ in Bezug auf den Kreis k, fällt von G auf CP und CQ die Lote GB und GA, halbiert AB in F und zieht durch F die Parallelen zu den Halbierungslinien des Winkels ACB und seines Nebenwinkels. Diese Geraden sind die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, deren Schnittpunkte mit k die gesuchten Reflexionspunkte sind.

Breslau, Januar 1903.

Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$.

Von EDMUND LANDAU in Berlin.

Es ist bekannt, in wie glänzender und erfolgreicher Weise Gauß, Dirichlet und ihre Nachfolger zur Untersuchung einer unregelmäßig verlaufenden und durch kein einfaches Gesetz gegebenen zahlentheoretischen Funktion $\psi(n)$ die Betrachtung der sogenannten mittleren Werte ersonnen haben; in fast allen klassischen Beispielen ist es nunmehr gelungen, jene mittleren Werte mit den elementaren analytischen Funktionen, wie Potenz und Logarithmus, in Verbindung zu bringen, welche die Größenordnung des Unendlichwerdens der summatorischen Funktion

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi(n)$$

darstellen; in vielen Fällen konnte man noch weiter gehen und z. B. die Existenz des Grenzwertes des Quotienten der summatorischen

Funktion durch jene elementare Funktion für unendlich wachsende obere Summationsgrenze x dartun. Gar manches dieser Resultate wurde erst nach vielen Bemühungen durch Heranziehung schwieriger Probleme aus der Theorie der Funktionen komplexen Argumentes erzielt, auf einem durch Riemann betretenen, jedoch erst durch Herrn Hadamard auf einem sicheren Fundament begründeten Wege. Aber man hat sich bisher wenig mit der Frage beschäftigt, ob sich für die Schwankungen der bekannten zahlentheoretischen Funktionen selbst (nicht für ihre Summen, in denen sich ja die Unregelmäßigkeiten eben ausgleichen) asymptotische Abschätzungen angeben lassen, in Gestalt von oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenzen für den Quotienten der Funktion durch passend gewählte elementare Funktionen. Ich will im folgenden den Problemen dieser Art für die Eulersche Funktion $\varphi(x)$ näher treten, welche die Anzahl der zu x teilerfremden ganzen Zahlen $\leqq x$ angibt. Die Frage nach dem Verlaufe gerade dieser Funktion ist in neuerer Zeit mitunter gestellt, aber nicht streng untersucht worden; verschiedene ohne Beweis von anderer Seite ausgesprochene Behauptungen und Vermutungen stehen sogar mit den Ergebnissen des Folgenden nicht in Übereinstimmung.

1. Da für Primzahlwerte von x

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

ist, so ist offenbar

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1,$$

und die Problemstellung hat sich vielmehr der Aufstellung einer unteren Schranke zuzuwenden. Daß $\varphi(x)$ trotz seiner Schwankungen mit x ins Unendliche wächst, ist bekannt, d. h. nach Annahme einer Zahl g ist eine Zahl ξ so bestimmbar, daß für alle $x \geqq \xi$

$$\varphi(x) > g$$

ist. Andererseits hat man auch schon eine spezielle Folge von unendlich vielen Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ besonders beachtet, für welche $\frac{\varphi(x_n)}{x_n}$ monoton zu Null abnimmt, nämlich die Produkte konsekutiver Primzahlen von 2 an

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2 \cdot 3 = 6, \quad x_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30,$$

$$x_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \quad \cdots, \quad x_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n, \quad \cdots,$$

für welche
$$\frac{\varphi(x_n)}{x_n} = \prod_{\varrho=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_\varrho}\right)$$
ist, was nach Euler für $n = \infty$ zu Null abnimmt.

Im folgenden werde ich zunächst unter Anwendung der klassischen Resultate über die Verteilung der Primzahlen untersuchen, mit welcher Geschwindigkeit für diese Zahlenfolge $\frac{\varphi(x)}{x}$ zu Null abnimmt; dann werde ich feststellen, daß in einem nachher zu präzisierenden Sinne für keine andere Zahlenfolge $\varphi(x)$ langsamer ins Unendliche wächst; beides zusammen wird zu dem Schlußresultat führen, daß
$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi(x)\log\log x}{x} = e^{-C}$$
ist, wo C die Eulersche Konstante bezeichnet. Hierin liegen zwei Behauptungen:

I. Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ und einer beliebig großen Zahl ω gibt es ein $x > \omega$, so daß
$$\varphi(x) < (1+\delta)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x}$$
ist.

II. Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ gibt es ein ξ, so daß für alle $x \geqq \xi$
$$\varphi(x) > (1-\delta)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x}$$
ist.

2. In

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{\varrho=1}^{n} p_\varrho \tag{1}$$

will ich zunächst $p_n = y$ als Funktion von x untersuchen, um dann auf
$$\varphi(x) = x\prod_{\varrho=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_\varrho}\right) = x\prod_{p\leqq p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = x\prod_{p\leqq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$
den Mertensschen[1]) Satz

$$\prod_{p\leqq y}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log y}\,{}^{2)} \tag{2}$$

anwenden zu können.

---

1) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, 78, 53, 1874.

2) $\psi(y) \sim \chi(y)$ bedeutet, daß $\lim\limits_{y=\infty} \frac{\psi(y)}{\chi(y)}$ existiert und gleich 1 ist.

Aus (1) folgt

$$\log x = \sum_{\varrho=1}^{n} \log p_\varrho = \sum_{p \leq y} \log p.$$

Nach Tschebyschef[1]) ist für alle y oberhalb eines gewissen Wertes

$$\tfrac{1}{2} y < \sum_{p \leq y} \log p < 2y,\text{[2]}) \tag{3}$$

also

$$\tfrac{1}{2} y < \log x < 2y,$$

$$-\log 2 + \log y < \log\log x < \log 2 + \log y,$$

$$-\frac{\log 2}{\log y} + 1 < \frac{\log\log x}{\log y} < \frac{\log 2}{\log y} + 1;$$

daher ist, wenn x die Folge $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ durchläuft,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log\log x}{\log y} = 1,$$

$$\log y \sim \log\log x.$$

Dies gibt in Verbindung mit (2), wenn x die Folge jener Zahlen durchläuft,

$$\varphi(x) = x \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C} x}{\log y} \sim \frac{e^{-C} x}{\log\log x}.$$

Insbesondere ist also nach Annahme einer positiven Zahl δ für alle n von einem gewissen an für die Folge von unendlich vielen Zahlen

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$$

$$\varphi(x) < (1+\delta)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x}. \tag{4}$$

Nach Annahme zweier positiven Größen δ und ω gibt es also ein $x > \omega$, so daß (4) erfüllt ist, d. h. es ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi(x) \log\log x}{x} \leqq e^{-C}. \tag{5}$$

---

1) „Mémoire sur les nombres premiers", Journal de mathématiques pures et appliquées, (1) 17, 379, 1852; Werke, 1, 61, 1899.

2) Genauere Schranken brauche ich im folgenden nicht; die Tatsache, daß $\frac{1}{y} \sum_{p \leq y} \log p$ für $y = \infty$ einen lim sup $< \infty$ und einen lim inf > 0 hat, genügt für den Zweck der vorliegenden Arbeit. Überhaupt mache ich in dieser von keinem Satze der modernen, auf die Theorie der Riemannschen ζ-Funktion gegründeten Primzahltheorie Gebrauch, sondern nur von den elementar beweisbaren Tschebyschef-Mertensschen Sätzen (3) und (2).

3. Andererseits behaupte ich, daß nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ für alle ganzen Zahlen x von einem gewissen Werte ξ an (nicht nur für die Zahlen der Form $p_1 p_2 \cdots p_n$)

(6) $$\varphi(x) > (1-\delta)\, e^{-C} \frac{x}{\log\log x}$$

ist. Es sei die Zerlegung von x in Primzahlpotenzen

$$x = \prod p^{\alpha}.$$

Ich zerlege das Produkt

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \prod_{p/x} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

wo p alle Primfaktoren von x durchläuft, in zwei durch $\log x$ geschiedene Teile:

(7) $$\frac{\varphi(x)}{x} = \prod_{p \leq \log x,\ p/x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p > \log x,\ p/x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod\nolimits_1 \cdot \prod\nolimits_2 .$$ [1]

Für $\prod_1$ ergibt sich, wenn man alle, auch die nicht in x aufgehenden Primzahlen bis $\log x$ in das Produkt aufnimmt, a fortiori

$$\prod\nolimits_1 = \prod_{p \leq \log x,\ p/x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \prod_{p \leq \log x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log\log x},$$

also von einem bestimmten Werte an

(8) $$\prod\nolimits_1 > \frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}} \frac{e^{-C}}{\log\log x}.$$

Für $\prod_2$ ergibt sich, indem jeder Faktor durch $1 - \frac{1}{\log x}$ ersetzt wird, a fortiori:

$$\prod\nolimits_2 \geq \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)^{s},$$

wo s die Anzahl der zwischen $\log x$ und x gelegenen Primfaktoren von x bezeichnet. Die Anzahl s ist für $x \geq 3$ kleiner als $\frac{2\log x}{\log\log x}$, da das Produkt von $\left[\frac{2\log x}{\log\log x}\right]$ oberhalb $\log x$ gelegenen Zahlen

$$> (\log x)^{\left[\frac{2\log x}{\log\log x}\right]} > (\log x)^{\frac{\log x}{\log\log x}} {}^{2)} = e^{\frac{\log x}{\log\log x}\log\log x} = e^{\log x} = x$$

1) Unter $\prod_1$ bezw. $\prod_2$ ist 1 zu verstehen, falls x keinen Primfaktor $\leq \log x$ bezw. $> \log x$ enthält.

2) Für $y > 1$ ist $[2y] > 2y - 1 > y$, und für $x \geq 3$ ist tatsächlich $\frac{\log x}{\log\log x} > 1$.

ist. Dies ergibt

$$\prod_2 > \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)^{\frac{2 \log x}{\log \log x}} = e^{\frac{2 \log x}{\log \log x} \log\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)},$$

also für $x \geqq 8$ $\left(\text{d. h. } \frac{1}{\log x} < \frac{1}{2}\right)$ wegen

$$\log(1-u) > -2u \qquad \left(0 < u < \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\prod_2 > e^{-\frac{2 \log x}{\log \log x} \frac{2}{\log x}} = e^{-\frac{4}{\log \log x}}.$$

Die rechte Seite nähert sich für $x = \infty$ der Grenze 1; von einer nach Annahme von δ bestimmbaren Stelle an ist also

$$\prod_2 > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{9}$$

Aus (7), (8) und (9) folgt, daß $\xi(\delta)$ so bestimmbar ist, daß für alle $x \geqq \xi$

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \prod_1 \cdot \prod_2 > \frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}} \frac{e^{-C}}{\log \log x}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = (1-\delta)\frac{e^{-C}}{\log \log x}$$

ist, wie in (6) behauptet wurde. Dies bedeutet

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi(x) \log \log x}{x} \geqq e^{-C}. \tag{10}$$

Aus (5) und (10) folgt schließlich, daß

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi(x) \log \log x}{x} = e^{-C}$$

ist, was zu beweisen war.

Berlin, den 4. Oktober 1902.

Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades.

Von EDMUND LANDAU in Berlin.

Die Ordnung einer Permutation $n$ten Grades, d. h. der Exponent der niedrigsten Potenz einer Permutation von n Elementen, welche gleich der identischen Permutation ist, ergibt sich bekanntlich auf folgendem Wege aus der Zerlegung in Cyklen ohne gemeinsame Elemente. Da die Ordnung einer cyklischen Permutation gleich der Anzahl der Elemente des Cyklus ist, ist die Ordnung einer beliebigen Permutation gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Gliederzahlen der Cyklen. Fragt man also nach derjenigen Permutation (oder denjenigen Permutationen) von n Elementen, deren Ordnung möglichst groß ist, anders ausgedrückt, nach der Maximalordnung der cyklischen Untergruppen der symmetrischen Gruppe von n Elementen, so hat man zu untersuchen, welches bei allen Zerlegungen der Zahl n in positive Summanden

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu \tag{1}$$

der größte Wert des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Summanden ist.

1. Das Maximum des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ bei allen möglichen Zerlegungen von n in $\nu = 1, 2, \cdots, n$ positive Summanden werde mit $f(n)$ bezeichnet. Für die kleinsten Werte von n findet man

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 4,$$
$$f(5) = 6, \quad f(6) = 6, \quad f(7) = 12, \quad f(8) = 15,$$
$$f(9) = 20, \quad f(10) = 30, \quad f(11) = 30, \quad f(12) = 60 \quad \text{u. s. f.}$$

Die entsprechenden Zerlegungen sind

$$1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 3, \quad 4 = 4, \quad 5 = 2 + 3,$$
$$6 = 1 + 2 + 3 \text{ oder } 6 = 6, \quad 7 = 3 + 4, \quad 8 = 3 + 5, \quad 9 = 4 + 5,$$
$$10 = 2 + 3 + 5, \quad 11 = 1 + 2 + 3 + 5 \text{ oder } 11 = 5 + 6,$$
$$12 = 3 + 4 + 5 \quad \text{u. s. f.}$$

Hier sieht man schon, daß dem Maximum $f(n)$ nicht notwendig eine einzige Zerlegung entspricht. Unter den möglicherweise vor-

handenen verschiedenen Darstellungen von n als Summe von Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $f(n)$ ist, läßt sich aber auf folgendem Wege eine kanonische Darstellung hervorheben. Ist für (1) das Maximum $f(n)$ erreicht und ist einer der Summanden a in zwei teilerfremde Faktoren b, c zerlegbar:

$$a = bc, \quad b > 1, \quad c > 1,$$

so bleibt das kleinste gemeinsame Vielfache aller Summanden ungeändert, indem man an Stelle von a schreibt

$$b + c + 1 + 1 + \cdots + 1,$$

wo die Anzahl $bc - (b + c)$ der Einsen wegen

$$bc - (b + c) = (b - 1)\ (c - 1) - 1 > 1 \cdot 1 - 1 = 0$$

stets > 0 ist. $f(n)$ ist also auch bei einer passend gewählten Darstellung von n als Summe von Einsen und Primzahlpotenzen erreichbar, wobei Primzahlen zu den Primzahlpotenzen gerechnet werden; von den Potenzen jeder Primzahl braucht nur eine, die größte vorkommende, beibehalten zu werden, während die anderen ohne Verminderung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Summanden durch lauter Einsen ersetzbar sind. (Daß irgendwelche nachträgliche Zusammenfassung der Einsen zu größeren Zahlen keine Vermehrung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bewirken kann, ist selbstverständlich, da ja von einer den Maximalwert $f(n)$ liefernden Zerlegung (1) ausgegangen wird).

$f(n)$ ist daher auch bei einer Darstellung

$$n = \sum p^{\alpha} + 1 + 1 + \cdots + 1 \tag{2}$$

erreichbar, wo jede Primzahl p höchstens als Basis einer Potenz vorkommt und die Anzahl der Einsen $\geqq 0$ ist; es ist alsdann

$$f(n) = \prod p^{\alpha}. \tag{3}$$

Diese Zerlegung (2) von n ist nun (natürlich abgesehen von der Reihenfolge der Summanden) eindeutig, da ja in (3) das System der Primzahlpotenzen p^{α} eindeutig durch $f(n)$ bestimmt ist.

Das Problem ist also auf folgende Form gebracht: Es soll das Maximum $f(n)$ der Funktion $\prod p^{\alpha}$ berechnet werden, wo die p^{α} ein System von teilerfremden Primzahlpotenzen bilden, deren Summe $\leqq n$ ist:

$$\begin{cases} \sum p^{\alpha} \leqq n, \\ \prod p^{\alpha} = \text{Maximum} = f(n). \end{cases}$$

Bei der unregelmäßigen Verteilung der Primzahlen kann nicht verlangt werden, mit Hilfe der bekannten Funktionen explicite die Funktion $f(n)$ durch n auszudrücken; vielmehr soll im folgenden untersucht werden, in welcher Weise die Funktion $f(n)$, welche offenbar mit n monoton wächst, für $n = \infty$ unendlich wird. Es wird,

$$f(n) = e^{g(n)}, \text{ d. h. } g(n) = \log f(n)$$

gesetzt, gelingen, den Nachweis zu führen, daß $g(n)$ genau von der Größenordnung $\sqrt{n \log n}$ unendlich wird, und daß der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n \log n}}$$

existiert und gleich 1 ist.

Eine Überlegung heuristischer Art soll der nachfolgenden strengen Beweisanordnung den Weg weisen. Wenn die Zahl n in ν positive Teile ohne Rücksicht auf deren Ganzzahligkeit geteilt wird, so ist bekanntlich das Produkt der ν Teile ein Maximum, wenn die Teile einander gleich, also sämtlich $= \frac{n}{\nu}$ sind; das Maximum ist $\left(\frac{n}{\nu}\right)^\nu$. Wenn nun die Anzahl ν der Teile nicht vorgeschrieben ist und man überhaupt durch Einteilung von n in Summanden ein Maximalprodukt der Summanden erreichen will, so ist, wie die Diskussion von $\left(\frac{n}{\nu}\right)^\nu$ als Funktion von ν lehrt, $\nu = \frac{n}{e}$ zu wählen, und das Maximum ist $e^{\frac{n}{e}}$ (Vergl. Steiner, „Über das größte Produkt der Teile oder Summanden jeder Zahl", Journal für die reine und angewandte Mathematik **40**, 1850, S. 208; Werke, Bd. 2, 1882, S. 423). Weil e und (für ganzzahlige n) $\frac{n}{e}$ nicht ganz sind, läßt sich dies Maximum bei Zerlegung einer ganzen Zahl n in ganzzahlige Summanden niemals erreichen; jedenfalls sind alle Teile tunlichst nahe an e anzunehmen, also in der Nähe eines von der Größe der Zahl n unabhängigen Wertes. In der vorliegenden Aufgabe sollen nun obendrein die Summanden teilerfremde Primzahlpotenzen oder 1 sein; man kann also, um ein möglichst großes Produkt zu erzielen, zwar mit $2 + 3$ anfangen, muß sich aber dann immer mehr von dem idealen Werte e entfernen. Es ist aber nach dem Vorangegangenen zu vermuten, daß man das größte Produkt etwa dadurch erzielt, daß man möglichst kleine Primzahlen nimmt, mit anderen Worten, indem man für n die Zerlegung

$$n = \sum_{p \leq x} p + 1 + 1 + \cdots + 1 \tag{4}$$

wählt, wo p alle Primzahlen $\leq x$ durchläuft und x die größte Primzahl ist, für welche

$$\sum_{p \leq x} p \leq n$$

ist; die Anzahl der Einsen in (4) ist dementsprechend $n - \sum_{p \leq x} p$.

2. In welchem Sinne diese Vermutung für große n asymptotisch richtig ist, wird sich am Schlusse ergeben; um den Zusammenhang nicht unterbrechen zu müssen, mögen zwei Hilfssätze vorangeschickt werden:

I. Die Summe aller Primzahlen bis zu einer Grenze x ist $\sim \frac{x^2}{2 \log x}$, d. h. asymptotisch gleich $\frac{x^2}{2 \log x}$; darunter ist zu verstehen, daß der Quotient jener Summe durch $\frac{x^2}{2 \log x}$ sich für $x = \infty$ der Grenze 1 nähert.

II. Wenn y eine ganze Zahl bezeichnet, so ist die $y$te Primzahlpotenz (wobei Primzahlen mit zu den Primzahlpotenzen gerechnet werden) $\sim y \log y$.

Beweise: I. Es sei δ eine beliebig kleine positive Größe; aus dem bekannten „Primzahlsatze", daß die Menge der Primzahlen bis x

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{5}$$

ist, folgt, daß eine Zahl ω so bestimmbar ist, daß für alle $\nu \geq \omega$

$$\left| \pi(\nu) - \frac{\nu}{\log \nu} \right| < \frac{\delta}{2} \frac{\nu}{\log \nu}$$

ist. Durch Summation folgt daraus für alle $x \geq \omega$

$$\left| \sum_{\nu=\omega}^{x} \pi(\nu) - \sum_{\nu=\omega}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} \right| = \left| \sum_{\nu=\omega}^{x} \left(\pi(\nu) - \frac{\nu}{\log \nu} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=\omega}^{x} \left| \pi(\nu) - \frac{\nu}{\log \nu} \right| < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\omega}^{x} \frac{\nu}{\log \nu},$$

$$\sum_{\nu=\omega}^{x} \pi(\nu) = \left(1 + \vartheta_x \frac{\delta}{2}\right) \sum_{\nu=\omega}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} \qquad (-1 < \vartheta_x < 1).$$

Nun ist, da $\pi(\nu) - \pi(\nu - 1)$ für Primzahlwerte von ν gleich 1, für zusammengesetzte ν gleich 0 ist,

$$\sum_{p \leq x} p = \sum_{\nu=2}^{x} \nu \left(\pi(\nu) - \pi(\nu - 1) \right) = \sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) \left(\nu - (\nu + 1) \right) + \pi(x)(x + 1),$$

$$\sum_{p \leq x} p = -\sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) + \pi(x)(x + 1). \tag{6}$$

Hierin ist

$$
(7) \quad \begin{aligned}
\sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) &= \sum_{\nu=2}^{\omega-1} \pi(\nu) + \sum_{\nu=\omega}^{x} \pi(\nu) = \sum_{\nu=2}^{\omega-1} \pi(\nu) + \left(1 + \vartheta_x \frac{\delta}{2}\right) \sum_{\nu=\omega}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} \\
&= \sum_{\nu=2}^{\omega-1} \pi(\nu) - \left(1 + \vartheta_x \frac{\delta}{2}\right) \sum_{\nu=2}^{\omega-1} \frac{\nu}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} + \vartheta_x \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu}.
\end{aligned}
$$

Die ersten zwei Glieder der rechten Seite bleiben für $x = \infty$ endlich; ihre Summe ist also für alle x von einem gewissen Werte $x = \xi(\delta)$ an dem absoluten Betrage nach kleiner als die mit x unendlich wachsende Funktion $\frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu}$; für $x \geqq \xi$ wird also nach (7)

$$
\left| \sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) - \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} \right| < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} + |\vartheta_x| \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} < \delta \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu},
$$

$$
\left| \frac{\sum\limits_{\nu=2}^{x} \pi(\nu)}{\sum\limits_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu}} - 1 \right| < \delta,
$$

d. h. es ist

$$
\sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) \sim \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu}{\log \nu} = \int_2^x \frac{u\,du}{\log u} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),
$$

wo $O\big(g(x)\big)$ eine Funktion von x bezeichnet, deren Quotient durch $g(x)$ für $x = \infty$ endlich bleibt. Wegen

$$
\begin{aligned}
\int_2^x \frac{u\,du}{\log u} &= \frac{x^2}{2 \log x} - \frac{2^2}{2 \log 2} + \frac{1}{2} \int_2^x \frac{u\,du}{\log^2 u} \\
&= \frac{x^2}{2 \log x} + O(1) + \frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{u\,du}{\log^2 u} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{x}}^x \frac{u\,du}{\log^2 u} \\
&= \frac{x^2}{2 \log x} + O(1) + O \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}\,du}{\log^2 2} + O \int_{\sqrt{x}}^x \frac{x\,du}{\log^2 \sqrt{x}} \\
&= \frac{x^2}{2 \log x} + O(1) + O\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x} \cdot x\right) \\
&= \frac{x^2}{2 \log x} + O\left(\frac{x^2}{\log^2 x}\right) \sim \frac{x^2}{2 \log x}
\end{aligned}
$$

ist also

$$(8) \qquad \sum_{\nu=2}^{x} \pi(\nu) \sim \frac{x^2}{2\log x}.$$

Ferner ist nach (5)

$$(9) \qquad \pi(x)(x+1) \sim \pi(x)\cdot x \sim \frac{x^2}{\log x}.$$

Verbindet man (8) und (9) mit (6), so ergibt sich die Behauptung

$$\sum_{p\leq x} p \sim -\frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{\log x} = \frac{x^2}{2\log x}.$$

In dieser asymptotischen Gleichung braucht x nicht ganzzahlig zu sein.

II. Die Anzahl derjenigen Zahlen $\leqq x$, welche zweite oder höhere Potenzen von Primzahlen sind, ist höchstens gleich der Summe der Anzahlen aller von 1 verschiedenen Quadrate, Kuben, $\cdots \leqq x$; da nun für $x > 1$ bis x genau $\left[\sqrt[k]{x}\right] - 1$ von 1 verschiedene $k$te Potenzen liegen, so ist, wenn $P(x)$ die Anzahl aller Primzahlpotenzen (incl. der $\pi(x)$ ersten Potenzen) $\leqq x$ bezeichnet,

$$(10) \quad 0 \leqq P(x) - \pi(x) \leqq [\sqrt{x}] - 1 + \left[\sqrt[3]{x}\right] - 1 + \cdots + \left[\sqrt[m]{x}\right] - 1,$$

wo die Summe nur bis

$$m = [2\log x]$$

erstreckt zu werden braucht, da für $k \geqq 2\log x$

$$1 < \sqrt[k]{x} = e^{\frac{1}{k}\log x} \leqq e^{\frac{1}{2}} < 2,$$

$$\left[\sqrt[k]{x}\right] - 1 = 0$$

ist. (10) ergibt

$$0 \leqq P(x) - \pi(x) < m\sqrt{x} \leqq 2\sqrt{x}\log x,$$

also nach (5)

$$P(x) = \pi(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Gesetzt nun, die $y$te Primzahlpotenz wäre nicht asymptotisch gleich $y\log y$, so gäbe es entweder eine solche Größe $d > 0$, daß oberhalb jedes ω ein y existiert, für welches die $y$te Primzahlpotenz $> (1+d)y\log y$ ist, oder es gäbe eine Größe $d > 0$, so daß oberhalb jedes ω ein y existiert, für welches die $y$te Primzahlpotenz

$< (1-d) y \log y$ ist (oder beides wäre der Fall). Also wäre für beliebig große passend gewählte y

$$P\left((1+d) y \log y\right) < y, \tag{11}$$

bezw.

$$P\left((1-d) y \log y\right) \geqq y. \tag{12}$$

Beides ist aber unmöglich; denn es ist

$$P\left((1+d) y \log y\right) \sim \frac{(1+d) y \log y}{\log\left((1+d) y \log y\right)} = \frac{(1+d) y \log y}{\log(1+d) + \log y + \log\log y} \sim (1+d) y$$

und ebenso

$$P\left((1-d) y \log y\right) \sim (1-d) y;$$

die Anzahl der Primzahlpotenzen bis $(1+d) y \log y$ bezw. $(1-d) y \log y$ ist also für alle y von einem gewissen Werte $y = \eta(d)$ an

$$> \frac{1+\frac{d}{2}}{1+d} (1+d) y = \left(1+\frac{d}{2}\right) y > y,$$

bezw.

$$< \frac{1-\frac{d}{2}}{1-d} (1-d) y = \left(1-\frac{d}{2}\right) y < y,$$

im Gegensatz zu (11) und (12). Also nähert sich tatsächlich der Quotient der $y$ten Primzahlpotenz durch $y \log y$ für $y = \infty$ der Grenze 1, was zu beweisen war.[1])

3. In der Zerlegung (4) ist x eine eindeutig bestimmte Funktion von n. Ich behaupte, daß nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ für alle n von einem gewissen $n = \nu(\delta)$ an

$$x > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \sqrt{n \log n}$$

ist.

1) Ebenso beweist man, daß die $y$te Primzahl p_y asymptotisch gleich $y \log y$ ist. Hierin liegt wegen

$$p_y \sim y \log y, \quad p_{y+1} \sim (y+1) \log (y+1),$$

$$\frac{p_{y+1}}{p_y} \sim \frac{(y+1) \log (y+1)}{y \log y} \sim 1,$$

$$p_{y+1} \sim p_y$$

der bekannte Satz, daß zwischen x und $(1+\delta) x$ für jedes δ von einem gewissen $x = \xi(\delta)$ an Primzahlen liegen, als Spezialfall enthalten.

Die Summe aller Primzahlen bis $\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}$ ist nämlich nach dem Hilfssatz I

$$\sim \frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 n\log n}{2\left(\log\left(1-\frac{\delta}{2}\right)+\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log\log n\right)} \sim \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 n;$$

wenn q die kleinste (von einem gewissen n an tatsächlich vorhandene) Primzahl zwischen $\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}$ (excl.) und $\sqrt{n\log n}$ (incl.) bezeichnet, so ist wegen

$$\sum_{p\leq\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}} p \sim \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 n$$

und

$$q \leqq \sqrt{n\log n}$$

die Summe

$$\sum_{p\leqq q} p = \sum_{p\leq\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}} p + q \sim \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 n;$$

also ist für alle hinreichend großen n

$$\sum_{p\leqq q} p < n;$$

x, als größte Primzahl, für welche

$$\sum_{p\leqq x} p \leqq n$$

ist, ist also für alle n von einem gewissen $n=\nu(\delta)$ an $\geqq q$, also $>\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}$, wie behauptet wurde.

Aus

$$x > \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}$$

folgt nun, daß das kleinste gemeinsame Vielfache (oder, was hier dasselbe ist, das Produkt) der Summanden in (4)

$$\prod_{p\leqq x} p = e^{\sum\limits_{p\leqq x}\log p} > e^{\sum\limits_{p<\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}}\log p}$$

ist. Der Logarithmus $g(n)$ der Maximalfunktion $f(n)$ ist also von einem gewissen n an größer als $\sum\limits_{p \leq \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n \log n}} \log p$. Da bekanntlich

$$\sum_{p \leq y} \log p \sim y$$

ist und folglich für alle y oberhalb einer gewissen Stelle $y = \eta(\delta)$

$$\sum_{p < y} \log p > \frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}} y,$$

so ergibt sich für alle hinreichend großen n $\left(n \geq \nu, \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n \log n} > \eta\right)$

$$g(n) > \frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n \log n} = (1-\delta)\sqrt{n \log n};$$

anders ausgedrückt: es ist

$$\liminf_{n=\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n \log n}} \geqq 1. \tag{13}$$

4. Es ließe sich leicht ebenso zeigen, daß für die spezielle Art (4) der Zerlegung von n in Summanden der Quotient $\frac{\log \Pi p}{\sqrt{n \log n}}$ sich wirklich der Grenze 1 nähert, d. h. daß bei Annahme von δ für alle hinreichend großen n auch

$$\sum_{p < x} \log p < (1+\delta)\sqrt{n \log n}$$

ist; das würde aber für die Maximalfunktion $f(n)$ bezw. $g(n)$ nichts bedeuten, da ja eine spezielle Zerlegung von n für $f(n)$ und $g(n)$ immer nur eine untere, keine obere Schranke liefern kann.

Das Ziel dieser Untersuchung ist der Nachweis, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n \log n}} = 1 \tag{14}$$

ist. Nachdem (13) schon bewiesen ist, ist dazu nur nötig, nachzuweisen, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n \log n}} \leqq 1 \tag{15}$$

ist. Dies ist der schwierigere Teil des Beweises; denn es muß gezeigt werden: Für jede Art der Zerlegung

$$n = \sum p^{\alpha} + 1 + 1 + \cdots + 1 \tag{16}$$

der positiven ganzen Zahlen $n = 1, 2, 3, \cdots$ in teilerfremde Primzahlpotenzen und Einsen ist nach Annahme von δ ein $\nu(\delta)$ so bestimmbar, daß für alle $n \geq \nu$

$$\log \prod p^\alpha = \sum \log p^\alpha < (1+\delta)\sqrt{n \log n} \tag{17}$$

ist. Es braucht die betrachtete Art (16) der Zerlegung der Zahl n nicht für alle n durch eine einfache und einheitliche Regel bestimmt zu sein, wie dies bei (4) der Fall war, vielmehr darf nur die Annahme gemacht werden, daß jeder ganzen Zahl $n = 1, 2, 3, \cdots$ eine bestimmte Zerlegung (16) zugeordnet ist. Für die Kette der Gleichungen (16) $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ ist das Bestehen der Ungleichung (17) nachzuweisen.

Ich teile für jedes n die in (16) vorkommenden Primzahlpotenzen p^α in zwei Klassen; s_1 unter ihnen seien $\leqq \sqrt{n}\log n$; die übrigen, in der Anzahl s_2, seien $> \sqrt{n}\log n$ (und natürlich $\leqq n$). Die Gesamtzahl $s_1 + s_2$ der von 1 verschiedenen Summanden in (16) heiße s. s_1, s_2 und s sind für ein bestimmtes Gleichungssystem (16) Funktionen von n, die sich unregelmäßig mit n verändern können.

Die Voraussetzung ist

$$\sum p^\alpha \leqq n,$$

d. h., wenn k_ϱ $(\varrho = 1, 2, \cdots, s_1)$ bezw. $\varkappa_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \cdots, s_2)$ die in (16) vorkommenden Primzahlpotenzen $\leqq \sqrt{n}\log n$ bezw. $> \sqrt{n}\log n$ bezeichnen,

$$\sum_{\varrho=1}^{s_1} k_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{s_2} \varkappa_\varrho \leqq n.\text{[1]}$$

Zu untersuchen ist der Wert von

$$\log \prod p^\alpha = \sum \log p^\alpha = \sum_{\varrho=1}^{s_1} \log k_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{s_2} \log \varkappa_\varrho. \tag{18}$$

Es ist

$$\sum_{\varrho=1}^{s_2} \sqrt{n}\log n \leqq \sum_{\varrho=1}^{s_2} \varkappa_\varrho \leqq n,$$

also

$$s_2 \sqrt{n}\log n \leqq n,$$

$$s_2 \leqq \frac{\sqrt{n}}{\log n},$$

$$\sum_{\varrho=1}^{s_2} \log \varkappa_\varrho \leqq \sum_{\varrho=1}^{s_2} \log n = s_2 \log n \leqq \sqrt{n};$$

---

[1]) Für $s_1 = 0$ bezw. $s_2 = 0$ ist unter der betreffenden Summe auf der linken Seite Null zu verstehen.

nach Annahme von δ ist daher für alle n von einem gewissen an

$$(19) \qquad \sum_{\varrho=1}^{s_2} \log \varkappa_\varrho < \frac{\delta}{2} \sqrt{n \log n}.$$

Die erste Summe auf der rechten Seite von (18) ist

$$(20) \quad \sum_{\varrho=1}^{s_1} \log k_\varrho \leqq \sum_{\varrho=1}^{s_1} \log(\sqrt{n} \log n) = s_1 \log(\sqrt{n} \log n) \leqq s \log(\sqrt{n} \log n).$$

Ich behaupte, daß von einem gewissen n an die Anzahl der von 1 verschiedenen Summanden in (16) der Ungleichnng

$$(21) \qquad s < \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}$$

genügt. Dazu ist ausreichend, nachzuweisen, daß die Summe von $\left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right]$ beliebigen verschiedenen Primzahlpotenzen für alle hinreichend großen n die Zahl n übersteigt, und dies braucht nur für die $\left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right]$ kleinsten Primzahlpotenzen gezeigt zu werden. Die $\left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right]$te Primzahlpotenz ist nach Hilfssatz II

$$\sim \left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right] \log \left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right] \sim \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}} \cdot \tfrac{1}{2} \log n$$
$$\sim \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \sqrt{n \log n},$$

also von einem passend gewählten n an größer als $\left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \sqrt{n \log n}$. Die Summe der Primzahlpotenzen bis $\left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \sqrt{n \log n}$ ist aber mindestens gleich der Summe der Primzahlen bis $\left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \sqrt{n \log n}$ und diese ist nach Hilfssatz I

$$\sim \frac{\left(1 + \frac{\delta}{4}\right)^2 n \log n}{2 \log \left(\left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \sqrt{n \log n}\right)} \sim \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)^2 n,$$

also von einem gewissen n an größer als n. Die Summe von $\left[\left(1 + \frac{\delta}{3}\right) \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\right]$ beliebigen verschiedenen Primzahlpotenzen würde also a fortiori für alle hinreichend großen n den Wert n übersteigen.

(21) ist also bewiesen, und daraus folgt in Verbindung mit (20)

$$\sum_{\varrho=1}^{s_1} \log k_\varrho < \left(1+\frac{\delta}{3}\right)\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\left(\tfrac{1}{2}\log n + \log\log n\right) \sim \left(1+\frac{\delta}{3}\right)\sqrt{n\log n};$$

von einer gewissen Stelle an ist folglich

$$(22) \qquad \sum_{\varrho=1}^{s_1} \log k_\varrho < \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{n\log n}\,.$$

(19) und (22) ergeben durch Addition mit Rücksicht auf (18):

$$\log \prod p^a = \sum \log p^a = \sum_{\varrho=1}^{s_1} \log k_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{s_2} \log \varkappa_\varrho < (1+\delta)\sqrt{n\log n}\,,$$

wie in (17) angekündigt wurde. Daraus folgt (15) und hieraus (14).

Natürlich braucht nicht für jedes n die Zerlegung (4) das Maximum des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Summanden wirklich zu liefern; dies zeigt schon der Fall $n=3$ oder die Erwägung, daß, wenn mehr Einsen vorhanden sind, als der Abstand der größten in (4) vorkommenden Primzahl p zur nächstfolgenden q beträgt, man das Produkt noch vergrößern kann, indem man p durch q ersetzt.

Nach dem im vorstehenden bewiesenen Satz liefert die Zerlegung (4) in möglichst kleine Primzahlen in dem Sinne asymptotisch das Maximum, also die größte Ordnung aller aus n Elementen gebildeten Permutationen, daß für jede andere Zerlegungsreihe

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu(n)} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $F(n)$

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\log N}{\log F(n)} \geqq 1$$

ist, wo N das Produkt der Summanden p von (4) bezeichnet; die Ordnung N einer der kanonischen Zerlegung (4) entsprechenden Permutation steht also zur Maximalordnung $f(n)=M$ in der Beziehung, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log N}{\log M} = 1$$

ist.

Berlin, den 4. Oktober 1902.

Ein Übertragungsprinzip des Herrn E. Study.

Von E. Müller in Wien.[1])

In der vor etwa Jahresfrist erschienenen ersten Lieferung von E. Studys „*Geometrie der Dynamen*“ wird (§ 23) ein Übertragungsprinzip bewiesen, das gestattet, von Sätzen über Strahlen im Bündel auf die Giltigkeit von Sätzen über Strahlen im Raume zu schließen, und daher die allgemeine Beachtung der Geometer verdient. Hr. Study gelangt zu diesem Übertragungsprinzip, indem er als Koordinaten einer Geraden sogenannte *duale Zahlen* (höhere komplexe Zahlen) verwendet; jeder Strahl wird durch die Verhältnisse dreier solcher Zahlen ebenso bestimmt wie ein Strahl im Bündel durch seine homogenen rechtwinkligen Koordinaten. Da nun mit diesen dualen Zahlen im allgemeinen ebenso gerechnet werden darf wie mit den gewöhnlichen komplexen oder den reellen Zahlen, so übersieht man, daß jedem Satze über Strahlen im Bündel, wenn man ihn in analytischer Form darstellt, sich ein Satz über Strahlen im Raume zuordnet, sobald man die auftretenden Strahlenkoordinaten als duale Zahlen betrachtet.

Es scheint mir nun mit zu den Aufgaben dieser Zeitschrift zu gehören, dergleichen allgemeine Prinzipien weiteren mathematischen Kreisen bekannt zu machen. Deshalb versuche ich im folgenden, das erwähnte Übertragungsprinzip, losgelöst von den sonstigen Betrachtungen Hrn. Studys, darzulegen und vielleicht dadurch etwas anschaulicher zu werden, daß ich die dualen Zahlen als geometrische Transformationen deute. Da es sich mir nur darum handelt, die Hauptgedanken hervortreten zu lassen, so gehe ich auf Ausnahmefälle nicht ein. Als bekannt setze ich die einfachsten Sätze über lineare Strahlenkomplexe (Gewinde) voraus.[2])

1. Die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Plückerschen Koordinaten der durch die Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ bestimmten geraden Linie sollen wie folgt bezeichnet werden:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi' = x_2 - x_1, & \xi = y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ \eta' = y_2 - y_1, & \eta = z_1 x_2 - z_2 x_1, \\ \zeta' = z_2 - z_1, & \zeta = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{cases}$$

1) Die nachfolgenden Zeilen geben den ungefähren Inhalt eines Vortrags wieder, den der Verfasser am 12 Juni 1902 unter dem Titel „Über duale Linienkoordinaten“ in der mathematischen Sektion der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. gehalten hat.

2) Wegen der darauf bezüglichen wenigen Literatur vgl. Study a. a. O. p. 208.

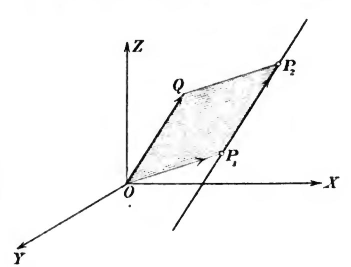
Zwischen diesen sechs Zahlen besteht die Identität

(2) $$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = 0.$$

Achtet man nicht bloß auf die Verhältnisse dieser Zahlen, sondern auf ihre wirklichen Werte, so sind ξ', η', ζ' die Koordinaten der von O ausgehenden mit $P_1 P_2$ gleichen und gleichgerichteten Strecke OQ (siehe Figur), ferner ξ, η, ζ die Koordinaten der Fläche OP_1P_2Q oder der doppelten Dreiecksfläche OP_1P_2, letztere mit Rücksicht auf ihren Umfahrungssinn und ihre Stellung im Raume betrachtet. Der Ausdruck

$$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta$$

stellt das Volumen eines Prismas dar, dessen Grundfläche die Koordinaten ξ, η, ζ und dessen Seitenkanten die Koordinaten ξ', η', ζ' besitzen.[1]) Erfüllen diese sechs Zahlen die Gl. (2), so liegt demnach die Strecke ξ', η', ζ' in der Fläche ξ, η, ζ, und es gibt dann in deren Ebene eine einzige zur Strecke ξ', η', ζ' parallele Gerade, in der eine mit ξ', η', ζ' gleiche und gleichgerichtete Strecke mit O die Fläche ξ, η, ζ bestimmt. Eine Gerade, in der sich eine bestimmte gerichtete Strecke befindet, wollen wir mit H. Grafsmann d. J. einen *Stab* nennen. Je sechs der Gleichung (2) genügende Zahlen bestimmen also einen Stab. Man kann auch sagen, sie bestimmen eine mit ξ', η', ζ' gleichgerichtete Kraft, die in Bezug auf O das Moment ξ, η, ζ besitzt.



Deutet man ξ, η, ζ als Koordinaten einer Strecke, so steht diese zur ebenen Fläche (ξ, η, ζ) senkrecht, hat gleiche Größe mit ihr und gibt durch ihre Richtung die positive Normalenrichtung der ebenen Fläche an.

Alle Geraden, deren Koordinaten einer linearen homogenen Gleichung

(3) $$\mathfrak{K} \equiv a'\xi + b'\eta + c'\zeta + a\xi' + b\eta' + c\zeta' = 0$$

genügen, bilden einen linearen Strahlenkomplex, dessen Achse die durch die Strecke (a', b', c') bestimmte Richtung besitzt. Der Komplex ist *speziell* (ein *Strahlengebüsch*), wenn die Koeffizienten a', b', c', a, b, c

1) Vgl. R. Baltzer: Anal. Geometrie, Leipzig 1882, § 46, 9.

der Gleichung (2) genügen. $\mathfrak{K} = 0$ ist dann die Gleichung einer Geraden in Linienkoordinaten, der Achse des Strahlengebüsches. Den linearen Ausdruck $\mathfrak{K}$ wollen wir eine *Komplexgröße*, a', b', c', a, b, c ihre Koordinaten nennen.

Bezeichnen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ spezielle Komplexgrößen, und läßt sich $\mathfrak{K}$ in der Form

$$\mathfrak{K} = \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2$$

darstellen, wo λ_1 und λ_2 Parameter bedeuten, so sind die Achsen der Strahlengebüsche $\mathfrak{K}_1 = 0$, $\mathfrak{K}_2 = 0$ zugeordnete Gerade des Gewindes $\mathfrak{K} = 0$, d. h. die Nullebenen der Punkte der einen Geraden gehen durch die andere. Zu jedem Strahle existiert ein einziger zugeordneter Strahl.

Von besonderen Gleichungsformen des Strahlengebüsches sind insbesondere die beiden:

$$p'\xi + q'\eta + r'\zeta = 0,$$

$$p\xi' + q\eta' + r\zeta' = 0$$

bemerkenswert, von denen die erste einen durch den Ursprung gehenden Strahl, die zweite einen unendlich fernen Strahl bestimmt. Denn die erste Gleichung sagt aus, daß für alle ihr genügenden Geraden $P_1 P_2$ die ebene Figur $O P_1 P_2$ die von O ausgehende Strecke mit den Koordinaten p', q', r', enthält, daß also alle diese Geraden den durch O gehenden Stab p', q', r' schneiden. Die zweite Gleichung aber sagt aus, daß alle ihr genügenden Strahlen zur ebenen Figur p, q, r parallel sind, also die unendlich ferne Gerade dieser Figur schneiden.

Insbesondere sind $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Gleichungen der Koordinatenachsen und $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$ die Gleichungen der unendlich fernen Geraden der Koordinatenebenen.

$$\mathfrak{A}' \equiv a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta' = 0$$

ist dann nach einer früheren Bemerkung die Gleichung der zur Achse von $\mathfrak{K} = 0$ senkrechten unendlich fernen Geraden.

Lautet die Gleichung der einzigen, $\mathfrak{A}'$ bezüglich des Gewindes $\mathfrak{K} = 0$ zugeordneten Geraden, also der Achse des Gewindes, $\mathfrak{A} = 0$, so läßt sich die Komplexgröße $\mathfrak{K}$ in der Form

$$\mathfrak{K} = \mu \mathfrak{A} + \nu \mathfrak{A}'$$

darstellen. Daraus folgt aber, daß die Komplexe

$$\mathfrak{K} + \lambda \mathfrak{A}' = \mu \mathfrak{A} + (\nu + \lambda) \mathfrak{A}'$$

ebenfalls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ als zugeordnete Geraden besitzen, oder daß die Komplexe $\mathfrak{K} + \lambda \mathfrak{A}' = 0$ mit $\mathfrak{K}$ koaxial sind; ferner daß die Gleichung

jedes mit $\mathfrak{K} = 0$ koaxialen Komplexes die Form $\mathfrak{K} + \lambda\mathfrak{A}' = 0$ haben muß. Wegen der Wichtigkeit dieser Tatsache für die folgenden Betrachtungen sprechen wir sie in dem Satze aus:

Ist

$$\mathfrak{K} \equiv a'\xi + b'\eta + c'\zeta + a\xi' + b\eta' + c\zeta' = 0$$

die Gleichung eines linearen Strahlenkomplexes, so sind die Gleichungen sämtlicher mit ihm koaxialen Komplexe und keine anderen in der Form

$$\mathfrak{K} + \lambda(a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta') = 0$$

darstellbar.

Alle mit einem linearen Strahlenkomplex koaxialen bilden einen Büschel (eine zweigliedrige Gruppe nach Plücker).

2. Übt man auf die Variablen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' eine lineare homogene Transformation T aus, so wird jeder lineare Strahlenkomplex wieder in einen solchen transformiert. Sind T_1, T_2, ..., T_n andere solche Transformationen, so kann jede durch Zusammensetzung daraus hervorgehende Transformation mit $TT_1 \ldots T_n$ bezeichnet werden. Man nennt sie das Produkt der einzelnen Transformationen, weil dafür das assoziative und, bei geeigneter Festsetzung des Begriffs der Summe zweier Transformationen, auch das distributive (im allgemeinen aber *nicht* das kommutative) Gesetz gilt.

Wir betrachten jetzt die besondere Transformation

$$\begin{aligned} \xi' &= 0, & \xi &= \xi', \\ \eta' &= 0, & \eta &= \eta', \\ \zeta' &= 0, & \zeta &= \zeta' \end{aligned}$$

mit verschwindender Determinante. Durch sie wird jede Gerade durch den Ursprung (als Achse des Strahlengebüsches)

$$p'\xi + q'\eta + r'\zeta = 0$$

in die dazu senkrechte unendlich ferne Gerade

$$p'\xi' + q'\eta' + r'\zeta' = 0$$

transformiert und jede unendlich ferne Gerade

$$p\xi' + q\eta' + r\zeta' = 0$$

zum Verschwinden gebracht. Allgemein wird jede Komplexgröße $\mathfrak{K}$ (Gl. 3) durch diese Transformation in

$$\mathfrak{A}' \equiv a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta',$$

also jeder Strahlenkomplex in denjenigen speziellen Komplex übergeführt, dessen Achse die zur Achse von $\mathfrak{K}$ senkrechte unendlich ferne Gerade ist.

Bezeichnet man diese besondere Transformation mit ε und die Größe, in welche eine Komplexgröße $\mathfrak{K}$ infolge der Transformation ε übergeht, mit $\mathfrak{K}\varepsilon$ oder $\varepsilon\mathfrak{K}$, dann gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{K}\varepsilon = \varepsilon\mathfrak{K} = a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta', \tag{4}$$

$$\mathfrak{K}\varepsilon\varepsilon = \mathfrak{K}\varepsilon^2 = 0. \tag{5}$$

Für die speziellen Komplexgrößen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' folgt daraus

$$\begin{cases} \xi\varepsilon = \xi', & \xi'\varepsilon = 0, \\ \eta\varepsilon = \eta', & \eta'\varepsilon = 0, \\ \zeta\varepsilon = \zeta', & \zeta'\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Da demnach

$$\mathfrak{K}\varepsilon = a' \cdot \xi\varepsilon + b' \cdot \eta\varepsilon + c' \cdot \zeta\varepsilon + a \cdot \xi'\varepsilon + b \cdot \eta'\varepsilon + c \cdot \zeta'\varepsilon$$

ist, so erkennt man unmittelbar, daß für die Operation $\mathfrak{K}\varepsilon$ das distributive Gesetz

$$(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)\varepsilon = \mathfrak{K}_1\varepsilon + \mathfrak{K}_2\varepsilon,$$

oder allgemeiner

$$(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n)\varepsilon = \mathfrak{K}_1\varepsilon + \mathfrak{K}_2\varepsilon + \cdots + \mathfrak{K}_n\varepsilon \tag{7}$$

gilt, und ferner für eine reelle oder gewöhnliche komplexe Zahl m

$$\mathfrak{K}m\varepsilon = \mathfrak{K}\varepsilon m = m \cdot \mathfrak{K}\varepsilon \tag{8}$$

ist. Die eindeutige und distributive Verknüpfung $\mathfrak{K}\varepsilon$ wollen wir eine *Multiplikation* nennen.

Auch die Multiplikation von $\mathfrak{K}$ mit einer reellen oder komplexen Zahl ist äquivalent einer linearen Transformation der Strahlenkoordinaten ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'. Bezeichnen m' und m, wie überhaupt kleine lateinische Buchstaben, solche Zahlen, so kann man aus ihnen und der Transformation ε eine neue Transformation $m' + m\varepsilon$ ableiten, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{K}(m' + m\varepsilon) = \mathfrak{K}m' + \mathfrak{K}m\varepsilon = m'\mathfrak{K} + m \cdot \mathfrak{K}\varepsilon \tag{9}$$

definiert sein soll. Die eindeutige Verknüpfung $\mathfrak{K}(m' + m\varepsilon)$ befolgt gleichfalls das distributive Gesetz

$$(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)(m' + m\varepsilon) = \mathfrak{K}_1(m' + m\varepsilon) + \mathfrak{K}_2(m' + m\varepsilon) \tag{10}$$

und soll daher als Multiplikation betrachtet werden. Aus Gl. (9) läßt sich sofort eine wichtige Eigenschaft der durch Multiplikation mit

$m' + m\varepsilon$ aus $\mathfrak{K}$ hervorgehenden Komplexgröße ersehen. Da nämlich $\mathfrak{K}\varepsilon = \mathfrak{A}'$ ist, so ist

$$\mathfrak{K}(m' + m\varepsilon) = m'\mathfrak{K} + m\mathfrak{A}',$$

stellt also, gleich Null gesetzt, nach **1** einen mit $\mathfrak{K}$ koaxialen Komplex dar. Wir haben demnach den Satz:

Durch Multiplikation mit einer Transformation der Form $m' + m\varepsilon$ geht jede Komplexgröße in eine koaxiale über.

Zwei Transformationen nennt man dann und nur dann gleich, wenn sie, auf gleiche Objekte ausgeübt, gleiche Resultate liefern. Zwei Transformationen der Form $m' + m\varepsilon$ werden wir daher dann und nur dann gleich nennen, wenn sie, mit gleichen Komplexgrößen multipliziert, stets gleiche Größen geben. Im Hinblick auf die Gleichungen (5) und (8) gelten nach dieser Festsetzung für unsere Transformation ε die Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 0, \tag{11}$$

$$m\varepsilon = \varepsilon m. \tag{12}$$

Ferner folgt aus

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(m' + m\varepsilon)(n' + n\varepsilon) &= (\mathfrak{K}m' + \mathfrak{K}m\varepsilon)(n' + n\varepsilon)\\ &= \mathfrak{K}m'n' + \mathfrak{K}mn'\varepsilon + \mathfrak{K}m'n\varepsilon\\ &= \mathfrak{K}[m'n' + (mn' + m'n)\varepsilon]\end{aligned}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}(m' + m\varepsilon)(n' + n\varepsilon) &= m'n' + (mn' + m'n)\varepsilon\\ &= (n' + n\varepsilon)(m' + m\varepsilon),\end{aligned} \tag{13}$$

welche aussagt, daß die Multiplikation (Zusammensetzung) unserer Transformationen nicht nur assoziativ, sondern auch *kommutativ* ist, daß ferner das Produkt beliebig vieler Transformationen wieder eine Transformation derselben Art liefert.

Bezeichnet man Transformationen der Form $m' + m\varepsilon$ mit kleinen griechischen Buchstaben, so erkennt man durch eine ähnliche Schlußweise die Gültigkeit des *distributiven* Gesetzes

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \tag{14}$$

für die Multiplikation dieser Transformationen. Zusammenfassend kann man sagen:

Für die Addition und Multiplikation von Transformationen der Form $m' + m\varepsilon$ gelten dieselben formalen Gesetze wie für die gewöhnlichen komplexen Zahlen.

Wir nennen mit Hrn. Study $m' + m\varepsilon$ eine *duale Zahl*, m' ihren *skalaren*, m ihren *vektoriellen* Teil.

Eine duale Zahl ist dann und nur dann Null, wenn sowohl der skalare als der vektorielle Teil verschwinden. Beim Rechnen mit diesen Zahlen ist wohl zu beachten, daß ein Produkt auch verschwinden kann, ohne daß einer der Faktoren verschwindet; Gl. (13) z. B. zeigt, daß das Produkt aus zwei Faktoren schon verschwindet, wenn deren skalare Teile Null sind. Man darf also aus dem Verschwinden eines Produktes *nicht* auf das Verschwinden eines der Faktoren schließen.

Die Division durch eine duale Zahl ist eindeutig, solange deren skalarer Teil nicht Null ist (Study, a. a. O. p. 197). In demselben Falle ist die Quadratwurzel aus einer dualen Zahl (zweideutig) bestimmt.

3. Mit Hilfe dieser dualen Zahlen läßt sich jede beliebige Komplexgröße in derselben Form darstellen, wie die den Strahlen durch O entsprechenden speziellen Komplexgrößen mittels reeller oder gewöhnlicher komplexer Zahlen. In der Tat erhält

$$\mathfrak{K} \equiv a'\xi + b'\eta + c'\zeta + a\xi' + b\eta' + c\zeta'$$

unter Beachtung der drei ersten Glchgn. (6) die Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &\equiv a'\xi + b'\eta + c'\zeta + a \cdot \xi\varepsilon + b \cdot \eta\varepsilon + c \cdot \zeta\varepsilon \\ &\equiv (a' + a\varepsilon)\xi + (b' + b\varepsilon)\eta + (c' + c\varepsilon)\zeta\end{aligned}$$

oder, wenn man die drei in den Klammern stehenden dualen Zahlen bezüglich mit α, β, γ bezeichnet,

$$\mathfrak{K} = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta. \tag{15}$$

Hierin sind $\alpha\xi = 0$, $\beta\eta = 0$, $\gamma\zeta = 0$ die Gleichungen von Komplexen, deren Achsen die drei Koordinatenachsen sind, und Gl. (15) spricht die geometrische Tatsache aus, daß es zu jedem linearen Strahlenkomplex $\mathfrak{K}$ drei eindeutig bestimmte, mit den Koordinatenaxen koaxiale Komplexe gibt, die einem durch $\mathfrak{K}$ gehenden Bündel (einer dreigliedrigen Gruppe) angehören. α, β, γ sollen die *dualen rechtwinkligen Koordinaten* des Komplexes $\mathfrak{K}$ heißen.

Die dualen rechtwinkligen Koordinaten aller mit $\mathfrak{K}$ koaxialen Komplexe sind nach obigem in der Form $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ darstellbar, wo μ eine duale Zahl mit nicht verschwindendem skalaren Teile bezeichnet. Das Verhältnis $\alpha:\beta:\gamma$ bestimmt daher einen Büschel koaxialer Komplexe, mithin auch die ihnen gemeinsame Achse. Je drei duale Zahlen lassen sich demnach als *homogene duale Koordinaten eines Strahles ansehen.*

Die Rolle der Koordinatenachsen können irgend drei Komplexe $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, deren Achsen nicht derselben Ebene parallel sind, über-

nehmen. Denn nach Gl. (15) lassen sich diese Komplexgrößen in den Formen

$$\mathfrak{K}_1 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$\mathfrak{K}_2 = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$
$$\mathfrak{K}_3 = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta$$

darstellen. Daraus rechne man ξ, η, ζ als Determinantenquotienten ebenso, als wenn α_i, β_i, γ_i reelle Zahlen wären. Da der skalare Teil der im Nenner stehenden Determinante $|\alpha_1\beta_2\gamma_3|$ die Determinante $|a_1'b_2'c_3'|$ ist, deren Elemente die rechtwinkligen Koordinaten der Richtstrecken der Gewinde-Achsen sind, die nicht einer Ebene parallel sein sollen, so ist dieser Teil von Null verschieden, die Division durch $|\alpha_1\beta_2\gamma_3|$ mithin eindeutig. Setzt man diese Ausdrücke für ξ, η, ζ in die beliebige Komplexgröße

$$\mathfrak{K} = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

ein, so erhält man, wie beabsichtigt, $\mathfrak{K}$ mittels dualer Zahlen aus $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ abgeleitet in der Form

$$\mathfrak{K} = \mu_1\mathfrak{K}_1 + \mu_2\mathfrak{K}_2 + \mu_3\mathfrak{K}_3. \tag{16}$$

Diese Gleichung spricht den folgenden geometrischen Satz aus:

„Durch jeden linearen Komplex des Raumes geht ein Komplexenbündel, welcher drei gegebene Büschel koaxialer Komplexe, deren Achsen nicht derselben Ebene parallel sind, schneidet, d. h. der mit jedem Büschel einen Komplex gemein hat."[1])

Wie sich also jede Strahlengröße eines Bündels z. B. durch O (d. h. die linke Seite der Gleichung eines Strahles im Bündel) aus drei Strahlengrößen, deren zugehörige Strahlen nicht in einer Ebene liegen, mittels reeller oder gewöhnlicher komplexer Zahlen ableiten läßt, so ist jede Komplexgröße aus irgend drei Komplexgrößen mittels dualer Zahlen ableitbar. Daraus folgt schon, daß sich die Sätze über Lagen-

1) Dieser Satz gilt auch für drei beliebige Komplexbüschel, wenn sie nur nicht einem Komplexgebiete 5. Stufe angehören. Betrachtet man die linearen Strahlenkomplexe als Punkte eines Gebietes 6. Stufe (einer linearen Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen), so sagt der Satz aus, daß durch jeden Punkt p dieses Gebietes ein Gebiet 3. Stufe geht, das drei gegebene Gebiete 2. Stufe B_1, B_2, B_3, die nicht in einem Gebiete 5. Stufe liegen, schneidet, was sich fast von selbst versteht. Durch je zwei der Gebiete B_i und durch p sind nämlich drei Gebiete 5. Stufe legbar, die sich in einem Gebiete 3. Stufe schneiden; da selbes durch p geht und mit jedem der Gebiete B_i in einem Gebiete 4. Stufe liegt, also jedes B_i schneidet, so ist es das verlangte.

beziehungen von Strahlen im Bündel unmittelbar auf lineare Strahlenkomplexe werden übertragen lassen. Man hat nur die einfachen Gleichungen, welche solche Lagenbeziehungen im Bündel aussprechen, für die Strahlenkomplexe geometrisch zu deuten.

4. Vor allem ist die Frage zu beantworten, welche Lage drei Komplexe besitzen, zwischen deren Komplexgrößen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eine lineare Gleichung

$$\mathfrak{C} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}$$

besteht?

Multipliziert man diese Gleichung mit einer solchen dualen Zahl, daß $\mathfrak{C}$ in die die Achse von $\mathfrak{C}$ darstellende spezielle Komplexgröße $\bar{\mathfrak{C}}$ übergeht, so erhält man

$$\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\alpha}\mathfrak{A} + \bar{\beta}\mathfrak{B},$$

d. h. die drei Komplexe $\bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{\alpha}\mathfrak{A}$ und $\bar{\beta}\mathfrak{B}$ bilden einen Büschel. Die gemeinsame Normale der Achsen von $\bar{\alpha}\mathfrak{A}$ und $\bar{\beta}\mathfrak{B}$ gehört beiden Komplexen, mithin auch dem speziellen Komplexe $\bar{\mathfrak{C}}$ an, schneidet daher die Achse des Komplexes $\mathfrak{C}$. Diese gemeinsame Normale gehört aber auch den Komplexen $\alpha\mathfrak{A}$ und $\beta\mathfrak{B}$, mithin dem Komplexe $\mathfrak{C}$ an, und da sie dessen Achse schneidet, muß sie sie nach einem bekannten Satze *orthogonal* schneiden. Die Achsen der drei Komplexe werden demnach von einer Geraden orthogonal geschnitten oder gehören, nach einer Studyschen Ausdrucksweise, dem *Normalennetz einer Geraden* an. Von diesem Satze gilt auch die Umkehrung: Gehören die Achsen dreier linearen Strahlenkomplexe dem Normalennetz einer Geraden an, so besteht zwischen ihren Komplexgrößen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eine Gleichung

$$\mathfrak{C} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}.$$

Dieselbe Gleichung sagt, wenn α und β reelle Zahlen bezeichnen und $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ Gleichungen von Strahlen im Bündel sind, aus, daß die drei Strahlen einem Büschel angehören; mithin haben wir den Satz:

„Zufolge unseres Übertragungsprinzipes entspricht einem Büschel im Bündel das Normalennetz einer Geraden."

Dem gemeinsamen Strahle zweier Büschel im Bündel entspricht der gemeinsame Strahl zweier Normalennetze.

Nachdem man die geometrische Bedeutung einer durch duale Zahlen vermittelten linearen Beziehung zwischen drei Komplexgrößen kennt, ist es leicht, zu jedem Satze über Lagenbeziehungen im Bündel den analogen für Strahlen im Raume anzugeben, der also durch genau die gleiche Rechnung bewiesen wird, nur daß das eine Mal reelle

(oder gewöhnliche komplexe) Zahlen, das andere Mal duale Zahlen auftreten.

Dem **Desargues**schen Satze über perspektive Dreikante im Bündel entspricht z. B. nach diesem Übertragungsprinzip der folgende:

Sind vier Strahlen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *gegeben, und wählt man in den durch* $\mathfrak{S}$ *und die drei übrigen Strahlen bestimmten Normalennetzen die Strahlen* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$; *dann gehören die gemeinsamen Strahlen der Normalennetze* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ *und* $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ *und* $(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{A})$ *und* $(\mathfrak{C}'\mathfrak{A}')$ *wieder einem Normalennetze an.*

Dem **Pascal**schen Satze für einen in zwei Strahlenbüschel degenerierten Kegel ordnet sich der folgende zu:

In zwei Normalennetzen nehme man beziehungsweise die Strahlentripel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ *an. Bezeichnet* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B})$ *den gemeinsamen Strahl der beiden Normalennetze* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}')$ *und* $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B})$, *dann gehören die Strahlen* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{B}'\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{C}'\mathfrak{A})$ *wieder einem Normalennetze an.*

5. Das obige Übertragungsprinzip ist jedoch nicht bloß auf Lagenbeziehungen sondern auch auf metrische Beziehungen im Bündel anwendbar. Man braucht nur jene Gleichungen, die metrische Beziehungen von Strahlen im Bündel ausdrücken, für den Fall zu deuten, daß die auftretenden Koordinaten duale Zahlen sind.

Für die metrischen Beziehungen im Bündel durch den Koordinatenursprung spielt nun, wenn

$$\mathfrak{A}_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta,$$
$$\mathfrak{A}_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta$$

zwei Strahlengrößen d. h. $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_2 = 0$ Gleichungen von Strahlen durch 0 sind, vor allem der Ausdruck

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

eine wichtige Rolle, den wir kurz mit $[\mathfrak{A}_1 | \mathfrak{A}_2]$ bezeichnen wollen. Sein Verschwinden sagt aus, daß die beiden Strahlen aufeinander senkrecht stehen.

Für zwei Komplexgrößen

$$\mathfrak{K}_1 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$\mathfrak{K}_2 = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$

wo

$$\alpha_1 = a_1' + a_1\varepsilon, \quad \beta_2 = b_1' + b_1\varepsilon, \quad \gamma_1 = c_1' + c_1\varepsilon,$$
$$\alpha_2 = a_2' + a_2\varepsilon, \quad \beta_2 = b_2' + b_2\varepsilon, \quad \gamma_2 = c_2' + c_2\varepsilon,$$

lautet nun der entsprechende Ausdruck

$$(17)\qquad \begin{aligned}[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2] &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 \\ &= (a_1'a_2' + b_1'b_2' + c_1'c_2') + (a_1'a_2 + a_1a_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' \\ &\qquad + c_1'c_2 + c_1c_2')\varepsilon.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet dann und nur dann, wenn gleichzeitig

$$(18)\qquad a_1'a_2' + b_1'b_2' + c_1'c_2' = 0$$

und

$$(19)\qquad a_1'a_2 + a_1a_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' + c_1'c_2 + c_1c_2' = 0.$$

Von diesen beiden Gleichungen sagt die erste die Normalität der Achsen, die zweite die involutorische Lage der beiden Komplexe aus. Wegen

$$[\mu_1\mathfrak{K}_1 \mid \mu_2\mathfrak{K}_2] = \mu_1\mu_2[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2]$$

verschwindet aber mit $[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2]$ auch $[\mu_1\mathfrak{K}_1 \mid \mu_2\mathfrak{K}_2]$, d. h. wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ involutorisch liegen, so gilt dasselbe für je zwei mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ koaxiale Komplexe. Daraus folgt, daß die Achsen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ selbst einander schneiden müssen. Wenn also $[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2] = 0$ ist, so schneiden sich die Achsen der beiden Komplexe orthogonal.

Aber auch die Umkehrung ist richtig. Schneiden nämlich die Achsen der beiden Komplexe einander rechtwinklig, und bezeichnet man die diese Achse darstellenden speziellen Komplexgrößen mit $\overline{\mathfrak{K}}_1$, $\overline{\mathfrak{K}}_2$, so ist $[\overline{\mathfrak{K}}_1 \mid \overline{\mathfrak{K}}_2] = 0$ und, wegen $\mathfrak{K}_1 = \mu_1\overline{\mathfrak{K}}_1$, $\mathfrak{K}_2 = \mu_2\overline{\mathfrak{K}}_2$, auch $[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2] = \mu_1\mu_2[\overline{\mathfrak{K}}_1 \mid \overline{\mathfrak{K}}_2] = 0$. Damit ist der Beweis für den Satz erbracht:

Bezeichnen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Komplexgrößen, deren zugehörige Komplexe im Endlichen gelegene Achsen besitzen, so ist $[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2] = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Achsen einander rechtwinklig schneiden.

Für unser Übertragungsprinzip folgt daraus:

Zwei rechtwinkligen Strahlen im Bündel entsprechen zwei Gewinde, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden.

Drei aufeinander senkrecht stehenden Strahlen im Bündel entsprechen drei Gewinde, deren Achsen sich in einem Punkte senkrecht schneiden.

Eine lineare homogene Gleichung zwischen den dualen Koordinaten α, β, γ eines Gewindes $\mathfrak{K}$ (oder den homogenen dualen Koordinaten seiner Achse)

$$\varkappa\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma = 0$$

bestimmt das Normalennetz der Achse desjenigen Gewindes $\mathfrak{L}$, dessen Koordinaten $\varkappa$, λ, μ sind, da die Gleichung aussagt, daß $[\mathfrak{L} \mid \mathfrak{K}] = 0$ ist.

Dem Strahlenbüschel im Bündel ist daher, wie wir schon früher sahen, das Normalennetz zugeordnet.

Allgemein wird durch jede homogene Gleichung zwischen den dualen Koordinaten α, β, γ eine Strahlenkongruenz bestimmt, da eine solche Gleichung zwei Gleichungen zwischen den Plückerschen Strahlenkoordinaten äquivalent ist.

Zwei zu einander senkrechten Ebenen (oder Strahlenbüscheln) im Bündel entsprechen zwei Normalennetze

$$\varkappa\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma = 0,$$

$$\varkappa'\alpha + \lambda'\beta + \mu'\gamma = 0,$$

für welche

$$\varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$$

ist, deren Achsen also einander rechtwinkelig schneiden. Für das Übertragungsprinzip gilt demnach auch der Satz:

Normalen Ebenen (oder Strahlenbüscheln) im Bündel entsprechen im Raume Normalennetze, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden.

Hiernach lassen sich auch zu vielen metrischen Sätzen im Bündel die infolge unseres Übertragungsprinzips analogen Sätze unmittelbar angeben. Z. B. entsprechen einander die beiden Sätze:

Wählt man im Bündel drei nicht in einer Ebene liegende Strahlen (Dreikant) und sucht zu je zweien den gemeinsamen Normalstrahl, dann haben die drei Büschel, die jeder Strahl mit dem Normalstrahl der beiden anderen bestimmt, einen Strahl gemeinsam.

Wählt man im Raume drei nicht derselben Ebene parallele Strahlen und sucht zu je zweien den sie rechtwinklig schneidenden Strahl (gemeinsamen Normalstrahl), dann haben die drei Normalennetze, die jeder Strahl mit dem Normalstrahl der beiden anderen bestimmt, einen Strahl gemeinsam.

Der Satz links ist der bekannte über die Höhenebenen eines Dreikants, der Satz rechts ist identisch mit dem von J. Petersen und F. Morley gefundenen Satze.[1]) Was die Übertragung anderer metrischer Beziehungen anbelangt, so verweise ich auf E. Study, G. d. D. § 24.

In der nächsten Nummer soll noch der interessante Satz bewiesen werden, daß zufolge unseres Übertragungsprinzipes jeder Bewegung im Bündel eine Bewegung im Raume entspricht.

---

1) Vgl. E. Study, G. d. D. p. 107.

6. Für zwei gleiche Komplexgrößen geht Gl. (17) in die folgende über:

$$[\mathfrak{K} \mid \mathfrak{K}] = a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2\,(a'a + b'b + c'c)\varepsilon. \tag{20}$$

Hierin ist der skalare Teil $a'^2 + b'^2 + c'^2$ das Quadrat der Länge der Achsenstrecke, der vektorielle Teil $a'a + b'b + c'c$ die bilineare Invariante des Komplexes. Genügt die Größe $\mathfrak{K}$ der Gleichung

$$[\mathfrak{K} \mid \mathfrak{K}] = 1$$

oder, was dasselbe ist, den beiden Gleichungen

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

$$a'a + b'b + c'c = 0,$$

so ist der Komplex ein spezieller, und seine Achse besitzt die Länge Eins; $\mathfrak{K}$ stellt daher dann einen Strahl von der Länge Eins dar.

Bestehen zwischen drei Komplexgrößen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ dieselben sechs Bedingungsgleichungen wie zwischen drei aufeinander senkrechten Einheitsstrahlen im Bündel, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} &[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_1] = [\mathfrak{K}_2 \mid \mathfrak{K}_2] = [\mathfrak{K}_3 \mid \mathfrak{K}_3] = 1, \\ &[\mathfrak{K}_1 \mid \mathfrak{K}_2] = [\mathfrak{K}_2 \mid \mathfrak{K}_3] = [\mathfrak{K}_3 \mid \mathfrak{K}_1] = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

dann werden durch sie ebenfalls drei sich in einem Punkte rechtwinklig schneidende Einheitsstrahlen bestimmt; sie gehen aus dem ursprünglichen Achsenkreuz durch eine Bewegung hervor, wenn noch

$$|\,a_1' b_2' c_3'\,| = +1$$

oder, was damit identisch ist,

$$|\,\alpha_1 \beta_2 \gamma_3\,| = +1$$

ist.

Eine jede Bewegung im Bündel, also jede Rotation um einen Strahl des Bündels, läßt sich durch eine orthogonale Transformation von der Determinante $+1$ darstellen. Übt man nun auf die Koordinaten α, β, γ eines Komplexes $\mathfrak{K}$ die entsprechende Transformation

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \mu_{11}\alpha' + \mu_{12}\beta' + \mu_{13}\gamma', \\ \beta &= \mu_{21}\alpha' + \mu_{22}\beta' + \mu_{23}\gamma', \\ \gamma &= \mu_{31}\alpha' + \mu_{32}\beta' + \mu_{33}\gamma' \end{aligned}\right. \tag{22}$$

aus, wo die dualen Koeffizienten μ_{ik} den sechs Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Transformation

$$(23)\quad \begin{cases} \mu_{1i}^2 + \mu_{2i}^2 + \mu_{3i}^2 = 0, & (i=1,2,3) \\ \mu_{11}\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{22} + \mu_{31}\mu_{32} = 0, \\ \mu_{12}\mu_{13} + \mu_{22}\mu_{23} + \mu_{32}\mu_{33} = 0, \\ \mu_{13}\mu_{11} + \mu_{23}\mu_{21} + \mu_{33}\mu_{31} = 0 \end{cases}$$

genügen und

$$(23')\quad |\mu_{ik}| = +1$$

ist, dann erhält man für

$$\mathfrak{K} = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = (\mu_{11}\xi + \mu_{21}\eta + \mu_{31}\zeta)\alpha' + (\mu_{12}\xi + \mu_{22}\eta + \mu_{32}\zeta)\beta' + (\mu_{13}\xi + \mu_{23}\eta + \mu_{33}\zeta)\gamma'.$$

Bezeichnet man die in den Klammern stehenden Komplexgrößen bezüglich mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, so gelten zufolge der Gleichungen (23) und (23′) für sie die Gleichungen (21), und die Determinante aus ihren Koeffizienten hat den Wert $+1$; sie bestimmen demnach ein rechtwinkliges Achsenkreuz, das aus dem ursprünglichen durch eine Bewegung hervorgeht. In Bezug auf dieses Achsenkreuz besitzt der Komplex $\mathfrak{K}$ dieselben Koordinaten, also auch dieselbe Lage wie der Komplex

$$\mathfrak{K}' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta$$

in Bezug auf das ursprüngliche Achsenkreuz. Je zwei durch die obige Transformation einander zugeordnete Komplexe $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$ kommen mithin infolge derjenigen Bewegung zur Deckung, die das ursprüngliche Achsenkreuz in das neue überführt, oder

die der orthogonalen Transformation im Bündel durch das Studysche Übertragungsprinzip zugeordnete Transformation ist eine Bewegung des Raumes.

Umgekehrt sieht man leicht, daß jede Bewegung sich als eine solche Transformation in Strahlenkoordinaten darstellen läßt.

Anmerkung. Ähnlich wie man nach Cayley die Zusammensetzung zweier Drehungen eines Körpers um einen Punkt mittels Quaternionen darstellen kann, läßt sich die Zusammensetzung zweier beliebigen Bewegungen mittels komplexer Zahlen, die den Quaternionen analog aus dualen Zahlen gebildet sind, darstellen. Sei

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1\mathfrak{K}_1 + \alpha_2\mathfrak{K}_2 + \alpha_3\mathfrak{K}_3$$

eine solche Größe (Biquaternione),

$$\overline{Q} = \alpha_0 - \alpha_1 \mathfrak{K}_1 - \alpha_2 \mathfrak{K}_2 - \alpha_3 \mathfrak{K}_3$$

ihre konjugierte, so stellt die Transformation

$$X_1 = Q X \overline{Q}$$

eine Bewegung dar, wenn die durch Nebeneinanderstellung der Größen angedeutete Multiplikation nach denselben Gesetzen wie bei den Quaternionen ausgeführt wird. Einer anderen Biquaternione Q' wird die Bewegung

$$X_2 = Q' X_1 \overline{Q'}$$

entsprechen. Die aus der Aufeinanderfolge beider Bewegungen entspringende neue Bewegung ist dann

$$X_2 = (Q'Q) X (\overline{Q'Q}),$$

entspricht also der Biquaternione $Q'Q$.

Königsberg i. Pr., im August 1902.

Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene sowie Punkten und Ebenen im Raume.

Von KAZIMIERZ CWOJDZIŃSKI in Berlin.

Wir wollen im folgenden allgemeine Relationen entwickeln, welche einerseits zahlreiche metrische Relationen am Dreieck als Spezialfälle enthalten, andererseits mit Vorteil bei der Einführung in das System der Dreiecks-, bzw. Tetraëder-Koordinaten verwendet werden können. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten einer Geraden, bzw. Ebene und eines in ihr liegenden Punktes zu einander treten klar hervor, und manche Formel, wie diejenige für die Entfernung eines Punktes von einer Geraden, bzw. Ebene, deren Gleichung in homogenen Koordinaten gegeben ist, ergibt sich ohne besondere Rechnung hier von selbst.

1. *Beziehungen von vier Punkten zu vier Geraden in der Ebene.* — Wird

$$\alpha_{ij} = -(x_i \cos\varphi_j + y_i \sin\varphi_j - p_j)$$

gesetzt, so besteht nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten die Identität:

$$(1)\quad \underset{(i,\,j=1,\,2,\,3,\,4)}{|\alpha_{ij}|} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & p_1 & 0 \\ -\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & p_2 & 0 \\ -\cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & p_3 & 0 \\ -\cos\varphi_4 & -\sin\varphi_4 & p_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Da α_{ij} die Länge des Lotes darstellt, welches von P_i mit den kartesischen Koordinaten x_i, y_i auf die Gerade $G_j \equiv x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j - p_j = 0$ gefällt wird, so erhalten wir

Theorem I. Fällt man von vier beliebigen Punkten auf vier beliebige Geraden einer Ebene die sechzehn Lote, so ist die Determinante, gebildet aus den Längen dieser Lote, $|\alpha_{ij}| = 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Der Satz gilt ohne weiteres für n Punkte und n Gerade, wenn $n \geqq 4$.

Um anzudeuten, daß eine der 4 Geraden, etwa G_4, ins Unendliche rückt, setzen wir $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{44}$, dann geht Gl. (1) über in

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ . & . & . & . \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und dies ist eine *Relation zwischen vier Punkten und drei Geraden.*

2. *Anwendung auf die Berührungskreise des Dreiecks.* — Wählen wir die Punkte P_1, P_2 und P_3 so, daß sie in die Schnittpunkte der Geraden G_1, G_2, G_3 fallen, wobei P_i und G_i gegenüberliegen, und bezeichnen mit h_i das Lot von P_i auf G_i (Höhen des Dreiecks), so müssen wir setzen:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{11} = h_1,$$
$$\alpha_{21} = \alpha_{23} = 0; \quad \alpha_{22} = h_2,$$
$$\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0; \quad \alpha_{33} = h_3,$$

alsdann geht Gl. (2) über in

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_3 & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$(3) \qquad \frac{\alpha_{41}}{h_1} + \frac{\alpha_{42}}{h_2} + \frac{\alpha_{43}}{h_3} = 1.$$

Lassen wir nun P_4 der Reihe nach Mittelpunkt des Inkreises zum Dreieck $G_1 G_2 G_3$, dann Mittelpunkt der drei Ankreise werden und bezeichnen die Radien derselben mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so haben wir in (3) nach einander zu setzen

$$+\alpha_{41} = +\alpha_{42} = +\alpha_{43} = \varrho,$$
$$-\alpha_{41} = +\alpha_{42} = +\alpha_{43} = \varrho_1,$$
$$+\alpha_{41} = -\alpha_{42} = +\alpha_{43} = \varrho_2,$$
$$+\alpha_{41} = +\alpha_{42} = -\alpha_{43} = \varrho_3,$$

und wir erhalten demgemäß die 4 Formeln

$$+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{\varrho},$$

$$-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{\varrho_1},$$

$$+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{\varrho_2},$$

$$+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}=\frac{1}{\varrho_3}.$$

Setzen wir dagegen in (2)

$$\begin{aligned} -\alpha_{11} &= \alpha_{12} = \alpha_{13} = \varrho_1, \\ \alpha_{21} &= -\alpha_{22} = \alpha_{23} = \varrho_2, \\ \alpha_{31} &= \alpha_{32} = -\alpha_{33} = \varrho_3, \\ \alpha_{41} &= \alpha_{42} = \alpha_{43} = \varrho, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho}.$$

Man kann in ähnlicher Weise nach Belieben weitere Formeln herleiten; wir haben nur die wichtigsten erwähnt, welche sich in der Arbeit Steiners „Cercles qui touchent ...“ in Gergonnes Annalen vorfinden.

3. *Die trimetrische Gleichung des Punktes und der Geraden.* — Setzen wir voraus, daß einer der vier Punkte in einer der vier Geraden liegt, etwa P_4 in G_4, so ist $\alpha_{44}=0$. Wählen wir dann der besseren Unterscheidung wegen

$$\alpha_{i4}=u_i; \quad \alpha_{4i}=x_i \quad (i=1,2,3),$$

so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & u_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & u_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Wenn die u_i gegeben sind, die x_i aber als variabel gedacht werden, so ist Gl. (4) die Gleichung der Geraden G_4; umgekehrt bedeutet sie die Gleichung eines Punktes (P_4), falls die x_i gegeben, die u_i aber veränderlich sind.

Diese Gleichung nimmt gleichzeitig ein Beziehungsdreiseit $G_1G_2G_3$ und ein Beziehungsdreieck $P_1P_2P_3$ in Anspruch. Denken wir uns die P_i als Ecken des Dreiecks G_i, so entsteht aus (4)

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & h_2 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & h_3 & u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} = 0.$$

Dies ist die bekannte *Normalform* der trimetrischen Gleichung des Punktes oder der Geraden.

Eine Relation zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes $x_1 : x_2 : x_3$ haben wir schon in der Gleichung (3) gegeben, welche mit den neuen Bezeichnungen die Form annimmt:

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Um nun die Entfernung δ des Punktes $x_1' : x_2' : x_3'$ von der Geraden

$$\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} = 0$$

zu finden, brauchen wir nur von der Gleichung auszugehen

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & h_2 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & h_3 & u_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

welche liefert

$$\delta = \frac{u_1 x_1'}{h_1} + \frac{u_2 x_2'}{h_2} + \frac{u_3 x_3'}{h_3},$$

d. h. man erhält die Entfernung eines Punktes x_i' von der Geraden

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{u_i x_i}{h_i} = 0,$$

indem man für die laufenden x_i die x_i' setzt.

4. *Erweiterung für den Raum.* — Wird

$$\alpha_{ij} = -(x_i \cos\alpha_j + y_i \cos\beta_j + z_i \cos\gamma_j - p_j)$$

gesetzt, so liefert die Multiplikation der Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\cos\alpha_1 & -\cos\beta_1 & -\cos\gamma_1 & p_1 & 0 \\ -\cos\alpha_2 & -\cos\beta_2 & -\cos\gamma_2 & p_2 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -\cos\alpha_5 & -\cos\beta_5 & -\cos\gamma_5 & p_5 & 0 \end{vmatrix},$$

daß

(5) $$|\alpha_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Daher:

Theorem II. Die Determinante, gebildet aus den 25 von fünf Punkten des Raumes auf fünf beliebige Ebenen gefällten Loten, beträgt Null.

Der Satz gilt für n Punkte und n Ebenen, falls $n \geqq 5$. Rückt eine der 5 Ebenen, etwa E_5, ins Unendliche, so ist $\alpha_{15} = \alpha_{25} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = \alpha_{55}$ und demgemäß

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die *Relation zwischen 5 Punkten und 4 Ebenen.*

Hieraus ergeben sich Formeln für das Tetraëder, die denen analog sind, welche wir für das Dreieck bereits entwickelt haben, wie z. B.

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{\varrho} \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir schließlich in (5)

$$\alpha_{55} = 0, \; \alpha_{i5} = u_i, \; \alpha_{5i} = x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so erhalten wir die Gleichung einer Ebene in x_i oder eines Punktes in u_i

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & u_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In dem besonderen Falle, wo die vier Fundamentalpunkte Ecken des Fundamentalvierflachs werden, geht die obige Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & u_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} + \frac{u_4 x_4}{h_4} = 0.$$

Dies ist die übliche Gleichung des Punktes oder der Ebene.

Berlin, Januar 1901.

Der Charakter der Betriebskurven eines Gleichstrommotors mit Nebenschlußerregung.

Von FRITZ EMDE in Berlin.

Die Gleichstrommaschine mit Nebenschlußerregung[1]) ist die verbreitetste elektrische Maschine. Die mittleren und kleinen Modelle werden meist als Motoren, die großen meist als Generatoren benutzt. Ein Nebenschlußmotor findet sich wahrscheinlich auch in jedem physikalischen Laboratorium, das Anschluß an das Leitungsnetz einer Gleichstromzentrale hat. Daher ist die Kenntnis seiner Eigenschaften, soweit diese von selbst in die Augen springen, auch ziemlich verbreitet. Die einfachen quantitativen Beziehungen, die hier erörtert werden sollen, und die eine gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse sind, scheinen jedoch, wenigstens nach der physikalischen Literatur zu urteilen, nicht so allgemein bekannt zu sein. Diese Beziehungen bieten kein besonderes mathematisches Interesse. Ihr Wert liegt allein in ihrer Anwendung. Für diese ist es aber wichtig, daß man den gesamten Verlauf jeder auftretenden Funktion vollständig überblickt und auch ihre ausgezeichneten Werte leicht erkennt. Deshalb sollen hier alle vorkommenden Funktionen, auch ganz einfache, durch kartesische Koordinaten bildlich dargestellt werden. Da man ferner in Wirklichkeit nicht alle möglichen, sondern nur zweckmäßige Größenverhältnisse wählt, diese aber zwischen ziemlich enge Grenzen eingeschlossen sind, so soll die ganze Betrachtung an einem durchgehenden Zahlenbeispiel veranschaulicht werden, damit man leichter erkennt, was wichtig ist und was nebensächlich. Dies bietet auch einen Vergleich, wenn der Leser die hier vorgetragenen Entwicklungen auf Motoren anwenden will, an denen er selbst Messungen anstellen kann, oder für die ihm Zahlenunterlagen zur Verfügung stehen. Auf technische Einzelheiten, die nur den Fachmann interessieren können, soll hier jedoch nicht eingegangen werden.[2])

---

1) Über die hier als bekannt vorausgesetzten Grundbegriffe kann man sich leicht und schnell orientieren durch das kleine Buch: *Elektrische Ströme* von Emil Cohn (Leipzig 1897).

2) Näheres findet man z. B. in folgenden Spezialwerken: 1) Elektrische Gleichstrommaschinen von J. Fischer-Hinnen, 4. Aufl., (Zürich 1899). 2) Die Gleichstrommaschine von E. Arnold (Berlin 1902, bis jetzt ist nur der erste Band: Die Theorie der Gleichstrommaschine, erschienen).



Gleichstromanlagen, an die Nebenschlußmotoren angeschlossen sind, werden immer so betrieben, daß die Netzspannung konstant oder wenigstens fast konstant bleibt, vorausgesetzt, daß bei der Stromentnahme die als normal vorgesehene und vorgeschriebene obere Grenze nicht allzuweit überschritten wird. Diese *konstante Netzspannung* bezeichnen wir mit K. Ihr gleich, aber entgegengerichtet ist die Klemmenspannung des Nebenschlußmotors zu denken.

1. *Stillstand.* — Wir gehen von dem Ruhezustand des Motors aus. Der Widerstand der Schenkelwicklung (Abb. 1) sei w_s, der der Schenkelwicklung vorgeschaltete Regulierwiderstand r. r ist eine Größe, die man für einen gegebenen Motor ändern kann, die sich aber nicht von selbst ändert. Wir nehmen deshalb hier r als konstant an. Da also der Widerstand des Nebenschlußkreises $W = w_s + r$ konstant ist, so ist auch der Erregerstrom

$$i = \frac{K}{W}$$

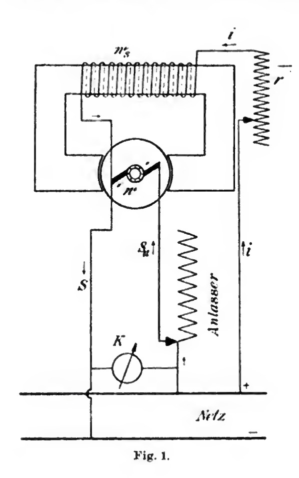


Fig. 1.

konstant. Diesem Strome i fällt die Aufgabe zu, in dem Motor eine bestimmte Anzahl magnetischer Induktionslinien aufrecht zu erhalten.

Der Widerstand des Ankerkreises, der sich aus dem Widerstande der Ankerwicklung, dem Widerstande der Bürsten und dem Übergangswiderstande von den Bürsten zum Kommutator zusammensetzt, sei w. In dem ruhenden Anker — er sei etwa festgebremst, sodaß er sich nicht drehen kann — wird daher ein Strom

$$I = \frac{K}{w}$$

fließen. Der Gesamtstrom bei Stillstand des Motors ist also

$$J = I + i.$$

Wenn wir $w = \alpha W$ setzen, so ist

$$i = \frac{K}{w} \cdot \frac{w}{W} = I\alpha$$

und

$$J = (1 + \alpha)I.$$

(Kirchhoffsche Regeln). Die Leistung, die das Netz an den stillstehenden Motor abgibt, ist

$$V_{\text{stillstand}} = KJ.$$

Diese Leistung wird in Wärme umgesetzt. Es sei schon hier bemerkt, daß man den Motor nicht im Ruhezustand ohne weiteres an das Netz anschließen darf, weil er diese große Wärmeentwicklung nicht ohne Schaden ertragen würde. Es ergibt sich hier die bekannte Notwendigkeit der Anlaßwiderstände. Zum Schutz des Motors gegen übermäßige Ströme werden ihm außerdem Schmelzsicherungen vorgeschaltet.

Es sei z. B. $K = 110$ Volt, $W = 44{,}0$ Ohm und $w = 0{,}285$ Ohm. Dann ergibt sich $i = 2{,}50$ Amp, $I = 386$ Amp, $J = 389$ Amp, $\alpha = 0{,}00648 = \frac{1}{154}$, $V_{\text{stillstand}} = 42\,800$ Watt.

2. *Leerlauf.* — Nun ist ja der Zweck eines elektrischen Motors nicht: elektrische Energie in Wärme umzusetzen, sondern: elektrische in mechanische Leistung umzuwandeln. Wo aber Strom ist, da ist auch Stromwärme.

Der Strom I erzeugt die Stromwärme wI^2. Dabei gibt das Netz für den Anker die Leistung KI her. Die Differenz

$$KI - wI^2$$

ist aber nach der Definition von I gleich Null. Bei dem Strome ψI (wobei $0 < \psi < 1$) wird die Differenz

$$= \psi(1 - \psi)KI.$$

Damit diese Differenz ein großer Teil von ψKI wird, muß ψ klein werden.

Damit also überhaupt elektrische Leistung zur Umwandlung in mechanische verfügbar wird, ist es nötig, daß der Strom stark verringert wird. Diese Stromverringerung besorgt der Motor selbst, wenn wir ihn sich selbst überlassen (die Bremse lösen). Auf den stromdurchflossenen Anker wirken im magnetischen Felde mechanische Kräfte und erteilen ihm ein Drehmoment. Der Motor läuft an mit wachsender Geschwindigkeit. Dabei entsteht in der Ankerwicklung eine EMK[1]) $-E$, die der Netzspannung entgegengerichtet ist, und die mit der Geschwindigkeit wächst. Für die Strombildung im Anker kommt jetzt nicht mehr die gesamte Netzspannung K, sondern nur noch die Span-

1) Allgemein übliche Abkürzung für elektromotorische Kraft.



nung $(K - E)$ in Betracht. Wenn der Motor läuft, so ist also der Ankerstrom

$$S_a = \frac{K - E}{w},$$

sodaß $S_a < I$ ist. Wir setzen

$$S_a + i = S.$$

Wenn es einen vollkommenen Leerlauf gäbe, d. h. wenn der Motor bei fehlender äußerer Belastung überhaupt kein Drehmoment auszuüben hätte, so würde der Anker so lange beschleunigt werden, als Strom durch ihn fließt. Er würde also erst eine feste Geschwindigkeit erreichen, wenn $E = K$ geworden wäre. Reibung und magnetische Verluste machen aber auch bei Leerlauf ein (wenn auch kleines) Drehmoment erforderlich. Der Gesamtstrom bei Leerlauf sei j. Durch den Anker fließt der Strom $(j - i)$. Wir setzen

$$j = \sigma J \quad \text{und} \quad J = \varkappa j.$$

Bei Leerlauf gibt das Netz an den Motor die Leistung

$$V_{\text{leerlauf}} = Kj = \sigma \cdot V_{\text{stillstand}}$$

ab.

In unserem Zahlenbeispiele sei $j = 4{,}82$ Amp. Dann ist

$$\sigma = 0{,}0124,$$

$$\varkappa = 80{,}8$$

$V_{\text{leerlauf}} = 530$ Watt. Davon kommen auf die Schenkelwicklung $Ki = 275$ Watt, auf den Anker $K(j - i) = 255$ Watt. In der Ankerwicklung werden aber nur $w(j - i)^2 = 1{,}54$ Watt in Wärme verwandelt. Der Spannungsverlust im Anker bei Leerlauf beträgt $w(j - i) = 0{,}662$ Volt und die EMK ist daher $E_{\text{leerlauf}} = 109{,}338$ Volt, da $K = 110$ Volt war.

3. *Verbrauch und Leistung.* — Wenn wir jetzt den Motor belasten, jedoch nicht so stark, daß er stehen bleibt, so wird er dem Netz einen Strom S entnehmen, so daß

$$j < S < J$$

ist, und die elektrische Leistung

$$V = KS. \tag{1}$$

Diese Leistung soll (nach einem unveröffentlichten Vorschlage von Herrn Prof. Görges) kurz der *Verbrauch* genannt werden. Die einfache Beziehung zwischen Strom und Verbrauch stellt Abb. 2 dar. Den Verbrauch setzt der Motor zum größeren Teile in mechanische

Leistung, zum geringeren Teil in Wärme um. Der erste Teil ist die Nutzleistung, der zweite der Verlust. (Statt Nutzleistung wollen wir auch kurz Leistung sagen.) Da es sich um eine Drehung handelt, so können wir die mechanische Leistung stets als das innere Produkt der beiden Vektoren (Rotoren): *Drehmoment* und *Winkelgeschwindigkeit* ansehen. Hier sind die beiden Vektoren wegen der Zwangläufigkeit der Ankerachse bei symmetrischer Lage des Ankers im magnetischen Felde immer gleich oder entgegen gerichtet. Sind sie gleich gerichtet, so wirkt die Maschine als *Motor*, dagegen als *Generator*, wenn die beiden Vektoren entgegengesetzte Richtung haben. Die Geschwindigkeit hängt hauptsächlich von der Spannung K[1]), das Drehmoment hauptsächlich vom Strome S[2]) ab. Wenn wir eine dem Verbrauch V gleichwertige mechanische Leistung mit der tatsächlichen Nutzleistung vergleichen, so finden wir, daß wir sowohl an Geschwindigkeit, wie an Zugkraft verlieren. Dem Geschwindigkeitsverlust entspricht ein Spannungsverlust, dem Zugkraftverlust ein Stromverlust.

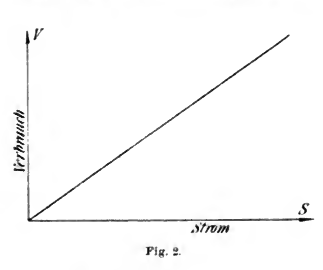


Fig. 2.

Da durch den Anker der Strom $(S - i)$ fließt, so verlieren wir von K die Spannung

$$w(S - i),$$

Wir behalten also als *nützliche Spannung* übrig

$$E = K - w(S - i),$$

$$E = w\left(\frac{K}{w} - S + i\right),$$

$$E = w(J - S).$$

Um den veränderlichen Strom S mit dem Ruhestrom J zu vergleichen, setzen wir $S = \varphi J$, sodaß φ als Veränderliche an Stelle von S tritt. Für den Motor ist

$$\sigma < \varphi < 1.$$

Hiermit bekommen wir

$$E = wJ(1 - \varphi).$$

1) Cohn, a. a. O. Seite 123.
2) Cohn, a. a. O. Seite 50.

In elektromagnetischer Hinsicht gilt für E die Beziehung

$$E = 2 \cdot Fp \cdot \mathfrak{u} \cdot \frac{Z}{2a},$$

in der F die Zahl der Kraftlinien (Induktionslinien) bedeutet, die aus einem Pol in den Anker eindringen, $2p$ die Polzahl, Fp also die Gesamtzahl der Kraftlinien im Anker, $60\mathfrak{u}$ die Zahl der Umdrehungen in einer Minute ($\mathfrak{u}$ also die Umlaufsgeschwindigkeit), Z die Gesamtzahl der wirksamen Leiter am Ankerumfang und $2a$ die Zahl der parallel geschalteten Ankerstromzweige oder der Stromwege durch den Anker, sodaß also $\frac{Z}{2a}$ die Zahl der hinter einander geschalteten Leiter ist. Für einen gegebenen Motor können wir daher kurz

$$E = c \cdot F \cdot \mathfrak{u}$$

schreiben, wobei c eine Konstante bedeutet.

Wir nehmen jetzt an, daß der *nutzlose Strom oder der Stromverlust unabhängig von der Belastung* des Motors sei, d. h. daß er stets gleich dem Leerlaufstrome j sei. Die Berechtigung dieser Annahme soll später erörtert werden. Darnach ist der *Nutzstrom* im Anker

$$S - j = J(\varphi - \sigma).$$

Folglich ist die Nutzleistung

$$L = E(S - j), \tag{2}$$

$$L = wJ^2(1 - \varphi)(\varphi - \sigma),$$

oder es ist

$$\lambda = \frac{L}{wJ^2} = -\varphi^2 + (1 + \sigma)\varphi - \sigma. \tag{2a}$$

Nun ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$wJ^2 = (1 + \alpha)V_{st},$$

also

$$\frac{L}{V_{st}} = (1 + \alpha)[-\varphi^2 + (1 + \sigma)\varphi - \sigma]. \tag{2b}$$

Die ausgezeichneten Punkte dieser Beziehung sind:

$\varphi =$	0	σ	$\frac{1+\sigma}{2}$	1	$1+\sigma$
$\lambda =$	$-\sigma$	0	$\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^2$	0	$-\sigma$

oder gleichbedeutend damit (vgl. Abbildung 3), da $S = \varphi J$ und $L = \lambda w J^2$ ist,

$S =$	0	j	$\frac{J+j}{2}$	J	$J+j$
$L =$	$-wjJ$	0	$w\left(\frac{J-j}{2}\right)^2$	0	$-wjJ$

Die physikalische Bedeutung dieser Werte ist: Um den Strom auf Null zu bringen, müssen wir dem Motor eine mechanische Leistung

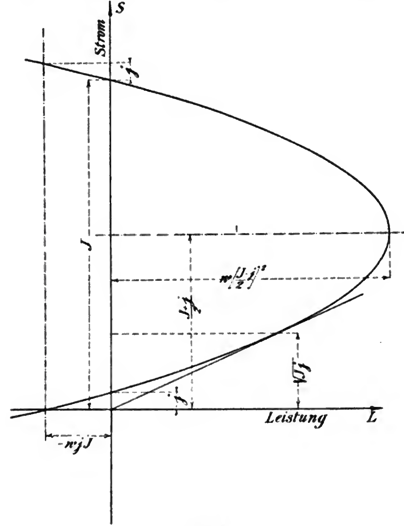


Fig. 3.

$= wjJ$ zuführen. Für $S = j$ ist die Nutzleistung gleich Null, weil die nützliche Zugkraft Null ist, und für $S = J$, weil die Geschwindigkeit Null ist. Die Nutzleistung wird ein Maximum, wenn der Strom das *arithmetische* Mittel zwischen Leerlaufstrom und Ruhestrom ist. Die höchste Nutzleistung ist

$$L_{\max} = w\left(\frac{J-j}{2}\right)^2.$$

Die Nutzleistung wird durch eine *Parabel* dargestellt (Abb. 3). Der

negative Teil für $S < j$ entspricht einem Betriebe, bei dem die Maschine als zum Netz parallel geschalteter Generator arbeitet (genauer: parallel zu den Generatoren der Zentralstation), der negative Teil für $S > J$ einem Betriebe, bei dem die Maschine als mit dem Netz hinter einander geschalteter Generator arbeitet. Als Motor arbeitet die Maschine nur, so lange $j < S < J$ ist.

Für unser Zahlenbeispiel sind die entsprechenden Werte:

$S=$	0	4,82	197	389	394 Amp
$L=$	− 534	0	10500	0	− 534 Watt
	− 0,726	0	14,3	0	− 0,726 PS

(Die mechanische Leistung wird gewöhnlich nicht in Watt, sondern in Pferdestärken angegeben.[1])

4. *Wirkungsgrad.* — Der Verbrauch war

$$V = KS \tag{1}$$

und der Verbrauch bei Stillstand

$$V_{st} = KJ,$$

folglich ist

$$\frac{V}{V_{st}} = \varphi. \tag{1a}$$

Der Wirkungsgrad η wird definiert durch die Gleichung

$$L = \eta V.$$

Deshalb ist nach (1a) und (2b)

$$\eta = (1 + \alpha)\left[-\varphi + (1 + \sigma) - \frac{\sigma}{\varphi}\right].$$

Die Größe α ist offenbar klein gegen Eins. Unter normalen Verhältnissen ist sie, wie unser Beispiel zeigt, etwa von der Größenordnung $\frac{1}{2}$ pCt. Man wird sie deshalb oft vernachlässigen können. Jedenfalls ist α eine Korrektion, die man immer noch leicht hinterher

1) $1 \text{ Watt} = \frac{(10^{-14}\text{ kg}) \cdot (10^7\text{ m})^2}{(10^0\text{ sek})^3} = 1\frac{\text{m}^2\text{ kg}}{\text{sek}^3},$

$1 \text{ PS} = 75\left[\frac{\text{m}}{\text{sek}}\left(\frac{9{,}81\text{ m}}{\text{sek}^2}\text{ kg}\right)\right] = 736 \text{ Watt}.$

anbringen kann. Um uns von diesem unwesentlichen Faktor zu befreien, setzen wir

$$(3) \qquad \frac{\eta}{1+\alpha} = \vartheta = -\varphi + (1+\sigma) - \frac{\sigma}{\varphi}.$$

Dann werden wir auch ϑ angenähert als Wirkungsgrad ansehen können.

Die Beziehung zwischen φ und ϑ oder zwischen $\varphi J = S$ und $\vartheta J = \eta I$ wird durch eine *Hyperbel* dargestellt (Abb. 4). Die Haupt-

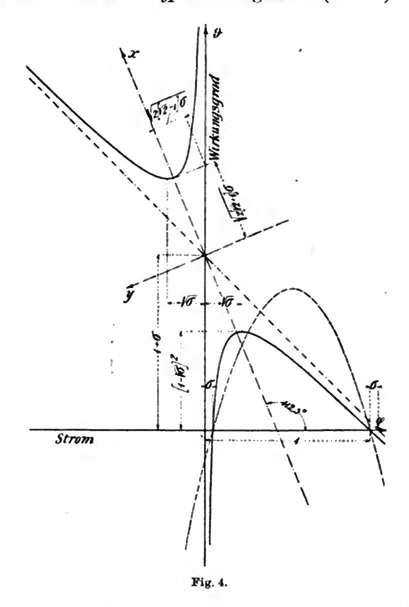


Fig. 4.

achse der Hyperbel schließt mit der Richtung der φ den Winkel 112,5° oder $\frac{5}{4}$ Rechte ein. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind $\varphi = 0$ und $\vartheta = 1 + \sigma$. Setzen wir deshalb

$$-2\varphi = x\sqrt{2-\sqrt{2}} + y\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$2[\vartheta - (1+\sigma)] = x\sqrt{2+\sqrt{2}} - y\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

und führen diese Werte in Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{2\sigma(\sqrt{2}+1)} - \frac{y^2}{2\sigma(\sqrt{2}-1)} = 1.$$

Die große Halbachse ist demnach

$$a = \sqrt{2\sigma(\sqrt{2}+1)},$$

die kleine Halbachse

$$b = \sqrt{2\sigma(\sqrt{2}-1)},$$

oder

$$a = 2{,}20\sqrt{\sigma}, \quad b = 0{,}910\sqrt{\sigma}, \quad \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414.$$

5. *Maximaler Wirkungsgrad.* — Aus

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -1 + \frac{\sigma}{\varphi^2} = 0$$

folgt

$$\varphi = \pm\sqrt{\sigma} \tag{4}$$

oder

$$\sigma : \varphi = \varphi : 1$$

oder

$$j : S = S : J, \tag{4a}$$

d. h. der Wirkungsgrad wird am größten, wenn der Strom das *geometrische* Mittel zwischen dem Leerlaufstrome und dem Ruhestrome ist. Das negative Vorzeichen kommt nur in Betracht, wenn die Maschine als Generator in Parallelschaltung auf das Netz arbeitet. An jener Stelle ist der Generatorwirkungsgrad ein Maximum. Hier kommt es uns hauptsächlich darauf an, wie sich die Maschine als Motor verhält. Wir brauchen daher das negative Vorzeichen nicht weiter zu beachten. Der maximale Wirkungsgrad ist

$$\vartheta_{\max} = (1 - \sqrt{\sigma})^2, \tag{5}$$

oder es ist

$$\sqrt{\sigma} + \sqrt{\vartheta_{\max}} = 1 \tag{5a}$$

oder

$$(\vartheta_{\max} - \sigma)^2 - 2(\vartheta_{\max} + \sigma) + 1 = 0.$$

Nach Gleichung (2a) ist die Nutzleistung beim höchsten Wirkungsgrade

$$L_{\eta=\max} = wJ^2\sqrt{\sigma}(1-\sqrt{\sigma})^2$$

oder

$$L_{\eta=\max} = w\sqrt{Jj}(\sqrt{J}-\sqrt{j})^2, \tag{6}$$

der Verbrauch

$$V_{\eta=\max} = wJ^2\sqrt{\sigma}.$$

Wenn wir in Gleichung (5a)

$$\sigma = \frac{x - y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}, \qquad \vartheta_{\max} = \frac{x + y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$$

setzen, so erhalten wir

$$y^2 = x\sqrt{2}.$$

Die Beziehung zwischen σ und $\vartheta_{\max}$ wird also durch eine *Parabel* mit dem Parameter $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dargestellt (Abb. 5). Ihre Achse ist um 45^0 gegen die Richtung der σ geneigt. Ihr Scheitel hat die Koordinaten $\sigma = \frac{1}{4}$ und $\vartheta_{\max} = \frac{1}{4}$. Im Abstand Eins vom Anfang berührt die Parabel die Achsen. Uns interessiert hier nur das Stück der Parabel zwischen den beiden Berührungspunkten.

Fig. 5.

Nun ist σ ein kleiner Bruch. Für die numerische Rechnung ist es daher anschaulicher, den reziproken Wert $\varkappa$ einzuführen. Die Beziehung zwischen $\vartheta_{\max}$ und $\varkappa$ wird durch eine Kurve höherer Ordnung dargestellt (Abb. 6). Von dieser interessiert uns auch nur der auf-

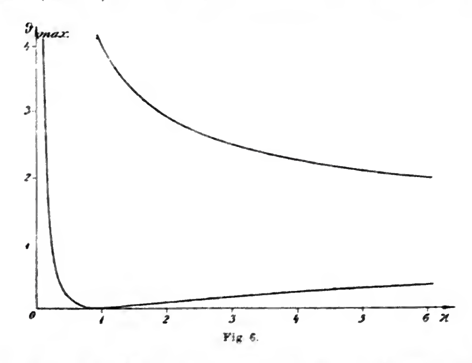


Fig. 6.

steigende Ast, d. h. Werte von $\varkappa > 1$ und $\vartheta_{\max} < 1$. Für den praktischen Gebrauch ist ein Teil dieses Astes in Abb. 7 wiedergegeben, er

entspricht Wirkungsgraden zwischen 60 und 100 pCt. Für die höher gelegene Kurve gilt der zehnfache Abscissenmaßstab der darunter liegenden. Die höher gelegene Kurve ist also nur als Verlängerung der darunter liegenden anzusehen. Bei Wirkungsgraden zwischen 60 und 84 pCt wird man sich demnach der untersten Kurve bedienen, bei Wirkungsgraden zwischen 84 und 95 pCt der mittleren, bei noch höheren der obersten. Statt der Kurven Abb. 7 kann man auch die folgende Tabelle benutzen. Diese enthält außerdem die zugehörigen Werte von

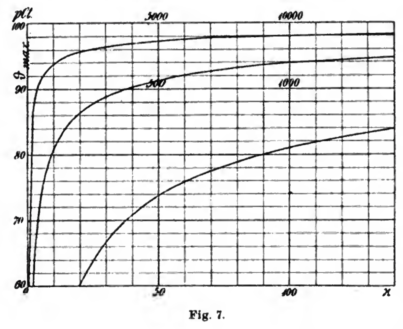


Fig. 7.

$$\lambda_{(\eta = \max)} = \vartheta_{\max} \cdot \sqrt{\sigma}$$

und von

$$\mu = \frac{\lambda_{(\eta=\max)}}{\lambda_{\max}} = \frac{\sqrt{\sigma}(1-\sqrt{\sigma})^2}{\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{\sigma}}{(1+\sqrt{\sigma})^2};$$

μ muß etwa den 4fachen Wert von $\lambda_{(\eta = \max)}$ haben, da genau

$$\mu = \frac{4}{(1-\sigma)^2} \cdot \lambda_{(\eta = \max)}$$

ist. Diese Zahlen dienen zur Beurteilung der Verhältnisse, unter denen das Maximum des Wirkungsgrades eintritt.

$100\,\vartheta_{max}$	$\varkappa$	$100\,\lambda_{(\eta=max)}$	$100\,\mu$	$100\,\vartheta_{max}$	$\varkappa$	$100\,\lambda_{(\eta=max)}$	$100\,\mu$
pCt		pCt	pCt	pCt		pCt	pCt
60	19,7	13,52	60,1	80	89,8	8,45	34,5
62	22,1	13,17	57,7	82	112,0	7,75	31,5
64	25,0	12,80	55,6	84	143,5	7,01	28,4
66	28,4	12,37	53,1	86	189,7	6,24	25,3
68	32,5	11,92	50,9	88	261	5,44	21,95
70	37,5	11,42	48,4	90	380	4,62	18,55
72	43,5	10,90	45,7	92	602	3,75	15,10
74	51,2	10,34	43,0	94	1 075	2,87	11,50
76	60,9	9,75	40,8	96	2 460	1,940	7,76
78	73,3	9,12	37,4	98	9 900	0,985	3,94

Man ersieht hieraus z. B., daß bei 81 pCt maximalem Wirkungsgrad der Ruhestrom 100mal so groß ist, wie der Leerlaufstrom, daß bei 75 pCt maximalem Wirkungsgrad die zugehörige Leistung $\frac{1}{10}$ von dem Verbrauch bei Stillstand beträgt, und daß ein maximaler Wirkungsgrad von 68 pCt bei halber Maximalleistung eintritt.

Nach Gleichung (2a) ist

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -2\varphi + (1+\sigma).$$

Die Gleichung einer Tangente, die man an die durch Gleichung (2a) dargestellte Parabel (Abb. 3) legen kann, ist daher

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\varphi}(y - \varphi),$$

$$x = \varphi^2 - \sigma + (1 + \sigma - 2\varphi)y.$$

Fragen wir nun nach dem Berührungspunkt der *Tangente*, die *durch den Ursprung* ($x = 0$, $y = 0$) geht, so finden wir $\varphi = \sqrt{\sigma}$, d. h. den Belastungszustand, bei dem der Wirkungsgrad ein Maximum wird. Dies ist keine besondere Eigenschaft *unserer* Stromkurve. Haben wir eine beliebige Kurve, die den Strom eines Motors bei konstanter Klemmenspannung als Funktion der Leistung darstellt, und ziehen wir vom Koordinatenanfang Strahlen nach den Kurvenpunkten, so ist die Kotangente des Neigungswinkels dieser Strahlen dem Wirkungsgrad proportional. Nun wird dieser Neigungswinkel ein Minimum, wenn der Strahl die Stromkurve berührt, also der Wirkungsgrad ein Maximum. (Bei den asynchronen Wechselstrommotoren erhält man z. B. auf dieselbe Weise die Leistung und den Strom, für die das Produkt aus Wirkungsgrad und Leistungsfaktor ein Maximum wird.)

Zusammengehörige Werte von φ und ϑ enthält die folgende Tabelle:

$\varphi =$	0	σ	$\sqrt{\sigma}$	$\frac{1+\sigma}{2}$	1	$1+\sigma$
$\vartheta =$	$\pm\infty$	0	$(1-\sqrt{\sigma})^2$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\sigma)^2}{1+\sigma}$	0	$-\frac{\sigma}{1+\sigma}$

Für unser Zahlenbeispiel bekommen wir folgende Werte:

$\varphi =$	0	0,0124	0,1114	0,5062	1	1,0124
$\vartheta =$	$\pm\infty$	0	0,790	0,481	0	– 0,0122
$\eta =$	$\pm\infty$	0	0,796	0,485	0	– 0,0123

Die Leistung bei dem höchsten Wirkungsgrad von 79,6 pCt beträgt 3 790 Watt oder 5,15 PS, der Strom 43,3 Amp und der Verbrauch daher 4 760 Watt. Bei der maximalen Leistung von 14,3 PS beträgt der Wirkungsgrad nur $48\frac{1}{2}$ pCt. Für $\sigma = 0$ wäre der Wirkungsgrad bei der höchsten Leistung immer genau 50 pCt und die höchste Leistung selbst 25 pCt des Verbrauches bei Stillstand. Der höchste Wirkungsgrad würde bei Leerlauf sein theoretisches Maximum: 100 pCt erreichen.

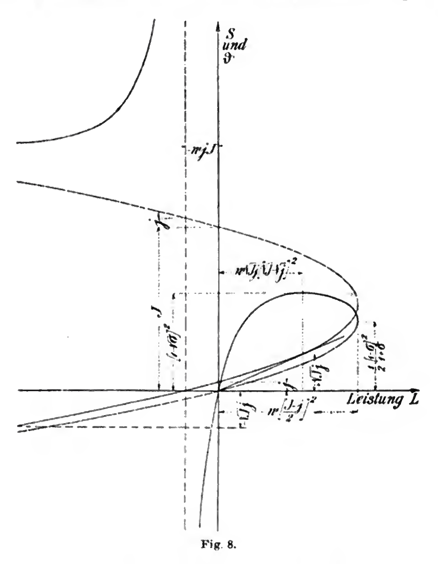


Fig. 8.

6. *Leistungsfunktionen.* — Obgleich sich bei der Messung (Bremsung) das Drehmoment als natürliche unabhängige Variable darbietet und die Geschwindigkeit schon als Funktion des Drehmomentes auftritt, so pflegt man in Wirklichkeit doch alle Größen als Funktionen der Leistung darzustellen. Der Grund ist, daß das Drehmoment durch Riemen- oder Zahnräderübersetzung geändert werden kann, während die Leistung (abgesehen von den Verlusten, die ja immer möglichst klein sein sollen) bei allen Energieumformungen konstant bleibt. Der Techniker hält sich daher an die Leistung.

Der Zusammenhang zwischen Leistung und Strom ist schon durch

die Gleichung (2) angegeben. Es bleibt noch zu untersuchen, wie der Wirkungsgrad von der Leistung abhängt. Hierzu eliminieren wir φ aus den Gleichungen (2a) und (3). Wenn wir aus (2a) den Wert $\varphi = \frac{\lambda}{\vartheta}$ in (3) einsetzen, so bekommen wir die *Kurve dritter Ordnung*

$$\vartheta^2\lambda + \sigma\vartheta^2 - (1+\sigma)\vartheta\lambda + \lambda^2 = 0, \tag{7}$$

die in Abb. 8 wiedergegeben ist. Da kein konstantes Glied vorkommt, geht die Kurve durch den Anfangspunkt, und da auch lineare Glieder fehlen, so hat die Kurve im Koordinatenanfang einen *Doppelpunkt*.

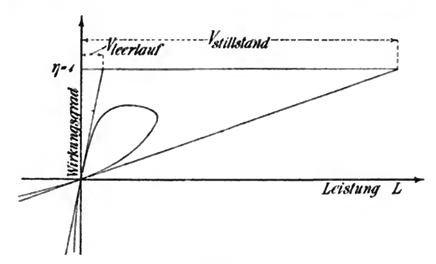


Fig. 9.

Die Gleichung des Tangentenpaares für den Doppelpunkt (Abb. 9) erhalten wir, indem wir den Ausdruck zweiten Grades aus Gleichung (7) gleich Null setzen[1]):

$$\sigma\vartheta^2 - (1+\sigma)\vartheta\lambda + \lambda^2 = 0$$

oder

$$(\sigma\vartheta - \lambda)(\vartheta - \lambda) = 0.$$

Und wenn wir für ϑ aus (3) und für λ aus (2) die Werte einsetzen, so bekommen wir als Gleichungen für die beiden Tangenten

$$\eta_{\mathrm{I}} = \frac{L}{V_{\text{leerlauf}}} \qquad \text{statt} \qquad \vartheta_{\mathrm{I}} = \frac{\lambda}{\sigma}$$

und

$$\eta_{\mathrm{II}} = \frac{L}{V_{\text{stillstand}}} \qquad \text{statt} \qquad \vartheta_{\mathrm{II}} = \lambda.$$

Von der Horizontalen $\eta = 1$ schneidet also die eine Tangente den *Verbrauch bei Leerlauf*, die andre den *Verbrauch bei Stillstand* ab. (Ver-

1) Siehe z. B. Höhere ebene Kurven von Salmon (deutsch von Fiedler), Seite 32 der 2. Auflage (Leipzig 1882).

gleiche auch die Horizontalen $\eta = \sigma$ und $\eta = \varkappa = \frac{1}{\sigma}\big)$. Das ist nicht eine besondere Eigenschaft *unserer* Kurve, sondern eine allgemeine Eigenschaft aller Kurven, die den Wirkungsgrad eines Motors als Funktion seiner Leistung darstellen. Wenn wir nämlich durch den Ursprung und einen beliebigen Punkt der Kurve für den Wirkungsgrad eine Gerade ziehen bis zum Schnitt mit der Horizontalen $\eta = 1$ (Abb. 10), so ergibt sich zwischen den Koordinaten dieser beiden letzten Punkte die Proportion:

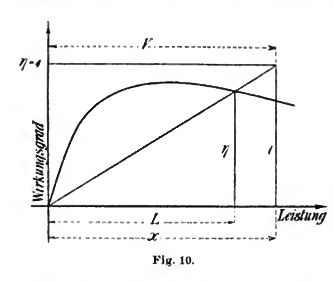


Fig. 10.

$$L : x = \eta : 1,$$

$$x = \frac{L}{\eta} = V.$$

Also stellt die Abscisse des Schnittpunktes oder der Abschnitt auf der Horizontalen $\eta = 1$ immer den *zugehörigen Verbrauch* dar. Dies muß auch noch dann gelten, wenn der Kurvenpunkt dem Koordinatenanfang unendlich nahe rückt. So ergibt sich allgemein, daß die beiden Tangenten im Anfang von der Horizontalen $\eta = 1$ den Verbrauch bei Leerlauf und bei Stillstand abschneiden. Diese Tatsache läßt sich zu einer bequemen Kontrolle oder zur Zeichnung der Anfangsstücke von der Wirkungsgradkurve benutzen.

Schreibt man die Gleichung (7) in expliziter Form, so erhält man entweder

$$\text{(7a)} \qquad \lambda = \frac{\vartheta}{2}\left(1 + \sigma - \vartheta \pm \sqrt{(1 + \sigma - \vartheta)^2 - 4\sigma}\right)$$

oder

$$\text{(7b)} \qquad \vartheta = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1 + \sigma \pm \sqrt{(1 - \sigma)^2 - 4\lambda}}{\sigma + \lambda}.$$

Man erhält imaginäre Werte, wenn

$$(1 - \sqrt{\sigma})^2 < \vartheta < (1 + \sqrt{\sigma})^2$$

oder wenn

$$\lambda > \left(\frac{1 - \sigma}{2}\right)^2$$

ist. $\vartheta > 1$ ist nur möglich, wenn die Maschine nicht mehr als Motor, sondern als Generator arbeitet. Der reziproke Wert von ϑ ist dann der Wirkungsgrad des Generators. So bedeutet $\vartheta = \infty$, daß die Maschine als Generator leer läuft. Das Minimum von ϑ gibt den höchsten

Wirkungsgrad des Generators an. Bei $0 < \varphi < \sigma$ oder bei $-\sigma < \lambda < 0$ arbeitet die Maschine *weder als Motor noch als Generator.* Denn einerseits wird ihr sowohl elektrische wie mechanische Leistung zugeführt, andererseits gibt sie weder elektrische noch mechanische Leistung ab. Für alle positiven und negativen $\lambda < \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^2$ ist ϑ *zweiwertig,* da man dieselbe Leistung mit geringem Drehmoment bei hoher Geschwindigkeit oder mit großem Drehmoment bei niedriger Geschwindigkeit erhalten kann. Meist ist nur die erste Art zu verwirklichen.

Bei einem Betriebe, bei dem die Belastung L des Motors ruhig, d. h. konstant ist, wird es vorteilhaft sein, den Motor so zu wählen, daß diese Belastung dem maximalen Wirkungsgrad des Motors entspricht, also nach (6) und (5), da

$$w\left(\sqrt{J} - \sqrt{j}\right)^2 = K\eta_{\max}$$

ist,

$$jJ = \left(\frac{L}{\eta K}\right)^2,$$

$$\frac{j}{J} = \left(1 - \sqrt{\vartheta}\right)^2,$$

folglich

$$j = \frac{L}{\eta K}\left(1 - \sqrt{\frac{\eta}{1+\alpha}}\right),$$

$$J = \frac{L}{\eta K} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\eta}{1+\alpha}}}.$$

Auch wenn die Belastung in engen Grenzen schwankt, wird es vorteilhaft sein, den Motor so zu wählen, daß seine mittlere Belastung das Maximum des Wirkungsgrades herbeiführt. Denn in der Nähe des Maximums bleibt der Wirkungsgrad annähernd auf gleicher Höhe. Regelmäßige, aber große Belastungsschwankungen würden eine besondere Untersuchung nötig machen. Wenn z. B. ein Betrieb vorliegt, bei dem die Belastung gleichförmig zwischen einer unteren und oberen Grenze schwankt, und wo sich diese Grenzen wie $1 : n$ verhalten, so wird man den Ausdruck

$$\frac{1}{\Lambda - \frac{\Lambda}{n}} \int_{\frac{\Lambda}{n}}^{\Lambda} \vartheta \cdot d\lambda,$$

wo Λ die obere Grenze der Belastung ist, möglichst groß machen (allgemein: den Ausdruck

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta \cdot dt,$$

wenn t die Zeit und T die Periode der Belastung bedeutet).

In Wirklichkeit treten noch andere Rücksichten hinzu, namentlich auf die *Erwärmung* bei Dauerbelastung und auf das *Feuer* an den Bürsten. Um einen möglichst billigen Motor zu bekommen, setzt man, besonders wo es auf den Wirkungsgrad nicht so sehr ankommt (Wasserkräfte), die normale Leistung so hoch wie möglich an. Die Leistung eines Gleichstrommotors sollte nicht durch die Funkenbildung am Kommutator, sondern durch die Erwärmung der Wicklungen bei Dauerbelastung begrenzt sein. Mit anderen Worten: die Funkengrenze sollte höher liegen als die Erwärmungsgrenze. Dann kann der Motor vorübergehend Überlastungen ohne Schaden ertragen, da die Temperatur nur allmählich steigt, während sich bei einem gewissen Strome an den Bürsten sofort Funken bilden. Die Zahlen $\frac{1}{\mu}$ (siehe die Tabelle auf Seite 134) sind jedoch nicht als Maß für eine mechanische Überlastbarkeit, wie sie bei den Wechselstrommotoren auftritt, anzusehen. Denn die mechanische Überlastbarkeit ist das Verhältnis des maximalen Drehmomentes zu dem bei normaler Leistung. Sie gibt das Drehmoment an, das der Motor gerade noch überwältigen kann, ohne plötzlich stehen zu bleiben, ausgedrückt durch das normale Drehmoment. Bei einem Gleichstrommotor gibt es aber, soweit praktisch zu verwirklichende Betriebszustände in Betracht kommen, kein Maximum für das Drehmoment. Dieses wächst fortwährend mit dem Strome. Streng genommen muß aber einmal bei einer außerordentlich hohen Belastung ein Maximum des Drehmomentes auftreten wegen der Rückwirkung des Ankerstromes auf das magnetische Feld, da das Drehmoment dem Produkt aus dem Strom und der Zahl der Kraftlinien, die den Anker durchsetzen, proportional ist. Dieses Maximum liegt jedoch außerhalb praktischer Möglichkeiten. Bei einem Gleichstrommotor kann daher nur von einer thermischen Überlastbarkeit die Rede sein.

7. *Der nutzlose Ankerstrom.* — Der Gesamtverlust ist die Differenz zwischen Verbrauch und Leistung: $V - L$. Wenn wir von dem Verbrauch $V = K \cdot S$ die Stromwärme im Nebenschluß $K \cdot i$ abziehen, so erhalten wir die dem Anker zugeführte Leistung $K(S - i)$. Ziehen wir hiervon noch die Stromwärme im Anker $w(S - i)^2$ ab, so erhalten wir die Summe aus der Leistung L und den mechanischen und magnetischen Verlusten Λ:

$$K(S - i) - w(S - i)^2 = L + \Lambda,$$

und wenn wir noch durch $E = K - w(S - i)$ dividieren, so bekommen wir den *nutzlosen Ankerstrom*:

$$\frac{\Lambda}{E} = \Sigma - i = S - i - \frac{L}{K - w(S - i)} \tag{8}$$

oder den nutzlosen Gesamtstrom:

$$\Sigma = \frac{V}{K} - \frac{L}{E}.$$

Für den besonderen Fall $L = 0$ (Leerlauf) wird $\Sigma = j$. Wir sind davon ausgegangen, daß dies auch für *jedes* L gelte. Es fragt sich, mit welchem Recht.

Der nächstliegende Weg, um hierüber ein Urteil zu gewinnen, wäre natürlich, die entsprechenden Verluste physikalisch zu untersuchen und dann zu sehen, welchen Gesetzen sie folgen. Diesen Weg wird unbedingt jeder einschlagen müssen, der Formen und Abmessungen von Dynamomaschinen zweckmäßig bestimmen will. Da wir hier aber nicht diesen Zweck im Auge haben, so brauchen wir auch nicht dieses Verfahren, das uns viel zu weit führen würde, anzuwenden. Einige einfache Versuche, die man leicht an der fertigen Maschine anstellen kann, werden uns hinreichenden Anhalt für ein Urteil geben.

Der nutzlose Ankerstrom deckt dadurch die mechanischen und magnetischen Verluste, daß er im magnetischen Felde ein *Drehmoment* entwickelt. Zwischen dem nutzbaren Drehmoment und dem Drehmoment, das zur Überwindung der Reibungswiderstände erforderlich ist, ist ja auch physikalisch gar kein Unterschied. Nun erzeugt ein Strom S_a, der durch die Ankerwicklung fließt, das Drehmoment

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\pi} \cdot Fp \cdot \frac{ZS_a}{2a},$$

wo alle Buchstaben dieselbe Bedeutung haben, wie früher (Seite 128). (Die Richtigkeit dieses Ausdrucks wird dadurch bestätigt, daß die Leistung $\mathfrak{A} \cdot 2\pi\mathfrak{u} = ES_a$ ist.) $\frac{ZS_a}{2a}$ wird zuweilen als das Stromvolumen (Zahl der Amperdrähte) auf dem Anker bezeichnet.[1]) Für einen gegebenen Motor können wir daher schreiben

$$\mathfrak{A} = \frac{c}{2\pi} FS_a,$$

wenn, wie früher,

$$E = cF\mathfrak{u}$$

gesetzt wird. Also wird auch der nutzlose Ankerstrom dem wider-

1) Aus dieser Formel ersieht man noch, daß man die Größe einer Maschine nicht nach ihrer normalen Leistung, sondern nur nach dem normalen Drehmoment schätzen kann. Denn um eine bestimmte Zahl von Kraftlinien, wie um ein gegebenes Stromvolumen unterzubringen, ist eine gewisse Größe der Maschine erforderlich. Die Leistung ist dagegen noch der Geschwindigkeit, mit der die Maschine läuft, proportional.

stehenden Drehmoment, das im Motor selbst entsteht, direkt und der Zahl der Kraftlinien, die durch den Anker gehen, umgekehrt proportional sein.

Bei wachsender Belastung des Motors wird das magnetische Feld F durch die Rückwirkung des Ankerstromes geschwächt. Dadurch ändert sich auch das widerstehende Drehmoment, oder wie wir kurz sagen wollen, das Widerstandsmoment $\mathfrak{A}$, weil gleichzeitig sicherlich wenigstens die magnetischen Verluste abnehmen. Außerdem kann sich bei wachsender Belastung die Geschwindigkeit des Motors ändern, was auch eine Änderung des Widerstandsmomentes $\mathfrak{A}$ verursacht.[1])

8. *Der Ankerstrom bei Leerlauf.* — Wie das Widerstandsmoment $\mathfrak{A}$ von der Geschwindigkeit u und dem magnetischen Felde F abhängt,

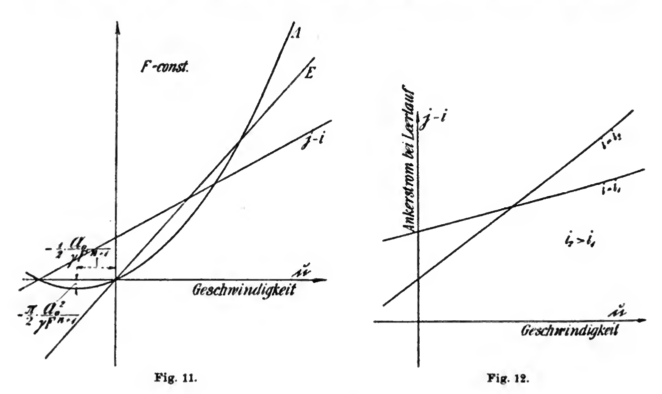


Fig. 11. Fig. 12.

können wir offenbar am leichtesten am leerlaufenden Motor feststellen, indem wir einmal nur die Geschwindigkeit, das andere Mal nur das magnetische Feld sich ändern lassen. Solche Versuche hat schon Hummel[2]) angestellt. Sie ergeben, daß das Widerstandsmoment $\mathfrak{A}$ mit großer Annäherung eine lineare Funktion der Geschwindigkeit ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \gamma' u,$$

1) Wir setzen hier voraus — was bei den heutigen Motoren wohl ohne weiteres zulässig ist —, daß die Bürsten bei Belastungsänderungen nicht verschoben zu werden brauchen. Bei manchen Betrieben verbietet sich dies von selbst (Straßenbahnen, Aufzüge). Der Einfluß einer mäßigen Bürstenverschiebung auf unsere Ergebnisse ist auch gering.

2) Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, S. 515.

und daß man $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0)$ etwa einer positiven Potenz von F proportional setzen kann[1]):

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \gamma'' F^{n+1}.$$

Setzen wir $\gamma'' = \gamma \mathfrak{u}$, so bekommen wir

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \gamma \mathfrak{u} F^{n+1}. \tag{9}$$

Durch Division mit $\frac{c}{2\pi} F$ ergibt sich der *Ankerstrom bei Leerlauf*

$$j - i = \frac{2\pi}{c}\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{F} + \gamma \mathfrak{u} F^n\right) \tag{10}$$

und durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi\mathfrak{u}$ die entsprechende Leistung

$$A = 2\pi(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{u} + \gamma \mathfrak{u}^2 F^{n+1}). \tag{11}$$

Es muß $A = E(j - i)$ und annähernd auch $= K(j - i)$ sein, weil der Spannungsverlust, den der kleine Leerlaufstrom erzeugt, zu vernachlässigen sein wird.

Setzen wir

$$\frac{2\pi}{c}\frac{\mathfrak{A}_0}{F} = A \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{c}\gamma F^n = B,$$

so erhalten wir für *konstante Erregung* i:

$$j - i = A + B\mathfrak{u}$$

und

$$A = cF(A\mathfrak{u} + B\mathfrak{u}^2)$$

(Abb. 11). Bei stärkerer Erregung wird A kleiner, B aber größer ausfallen müssen (Abb. 12).

Setzen wir andererseits

$$\frac{2\pi}{c}\mathfrak{A}_0 = P \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{c}\gamma\mathfrak{u} = Q,$$

so bekommen wir für *konstante Geschwindigkeit* $\mathfrak{u}$:

$$j - i = \frac{P}{F} + QF^n$$

und

$$A = c\mathfrak{u}(P + QF^{n+1}).$$

Bei ganz schwachem Feld wird in dem Ausdruck für den Strom das zweite Glied gegen das erste verschwinden. Die Kurve muß also

---

1) Man bekommt eine Kurve, die sich der empirischen ziemlich gut anschmiegt, wenn man $n + 1 = 3$ setzt. Dettmar teilt mit, daß er durchweg $n + 1 = 2$ gefunden habe. (Elektrotechnische Zeitschrift 1898, S. 254).

anfangs wie eine gleichseitige Hyperbel verlaufen, also fallen (Abb. 13). Mit wachsendem Feld muß dann aber das zweite Glied ein Übergewicht gewinnen, die Kurve also steigen. Dazwischen liegt natürlich ein *Minimum*. Physikalisch ist der Vorgang so zu denken, daß anfangs das ziemlich konstante Widerstandsmoment der Reibung $\mathfrak{A}_0$ vorherrscht, mit wachsendem Magnetismus aber auch die magnetischen Verluste (Hysteresis und Wirbelströme) immer mehr in den Vordergrund treten. Für das Minimum von $(j - i)$ wird

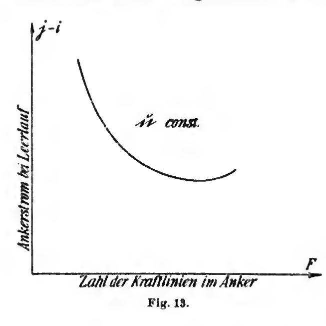


Fig. 13.

$$A = cuP\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und für $F = 0$

$$A = cuP.$$

Der Vergleich beider Werte kann also zur Bestimmung von n dienen.

Aus diesen Erfahrungstatsachen schließen wir: Um merkliche prozentuale Änderungen des Leerlaufstromes hervorzurufen, sind verhältnismäßig große prozentuale Änderungen der Geschwindigkeit oder des magnetischen Feldes erforderlich.

9. *Die zusätzlichen Verluste.* — Bei wachsender Belastung muß jedenfalls das Feld durch die Rückwirkung des Ankerstromes abnehmen. (Die Bürsten werden kaum jemals bei allen Belastungen in der neutralen Zone stehen bleiben dürfen.) Welche Folge das für den nutzlosen Strom hat, läßt sich nicht allgemein sagen. Wenn der Motor schwach magnetisiert ist, so wird der nutzlose Strom steigen (Abb. 13), wenn er sehr stark magnetisiert ist, etwas fallen. Die Änderung wird unmerklich, wenn wir uns gerade in der Nähe des Minimums befinden.

Der nutzlose Strom wächst mit der Geschwindigkeit (Abb. 11). Ob aber die Geschwindigkeit mit der Belastung steigt oder fällt, hängt von den zufälligen Verhältnissen ab. Denn für die Geschwindigkeit haben wir den Ausdruck

$$u = \frac{1}{c} \cdot \frac{E}{F} = \frac{1}{c} \cdot \frac{K - w(S - i)}{F}.$$

Da Zähler und Nenner zugleich abnehmen — denn mit wachsendem S nimmt F wegen der Ankerrückwirkung ab —, kann der Wert des Bruches steigen, konstant bleiben oder fallen. Nun ist aber bei den

modernen Nebenschlußmaschinen immer der Ankerwiderstand und der prozentuale Spannungsabfall im Anker bei normalem Strom klein gegen die Klemmenspannung und die Schenkelerregung groß gegen die rückwirkende Erregung des normalen Ankerstromes. Daher werden nur geringe Geschwindigkeitsänderungen zu erwarten sein.

Es ergibt sich also, daß die Feldschwächung und Geschwindigkeitsänderung nur kleine Änderungen des nutzlosen Stromes zur Folge haben kann.

Nun bewirkt aber der Ankerstrom bei Belastung des Motors nicht nur eine Schwächung, sondern auch eine *Verzerrung* des magnetischen Feldes. Die Anker-Amperwindungen suchen nämlich ein magnetisches Feld zu erzeugen, dessen Kraftlinien quer zu den ursprünglichen verlaufen. Die Folge ist, daß sich bei Belastung die magnetische neutrale Zone aus der Symmetrielinie verschiebt. Diese Feldverzerrung können wir bei den Leerlaufversuchen nicht nachahmen. Da wir dann eine inhomogene Kraftlinienverteilung haben, so bekommen wir stellenweise eine größere Kraftliniendichte, obgleich die Gesamtzahl der Kraftlinien zurückgegangen ist. Die magnetischen Verluste hängen aber gerade stark von der Kraftliniendichte ab. Auf diese Weise bewirkt die Feldverzerrung bei manchen Motoren nun doch eine merkliche Zunahme des nutzlosen Ankerstromes. Die Leistungsverluste, die der Differenz $\Sigma - j$ zwischen dem nutzlosen Strom Σ bei Belastung und dem Leerlaufstrome j entsprechen, bezeichnet man als *zusätzliche Verluste*. Die Ergebnisse von Versuchen zur Bestimmung dieser zusätzlichen Verluste sind von Kapp[1]) und von Dettmar[2]) veröffentlicht worden.

Dem Leerlaufstrome j entsprechen drei Arten von Verlusten: Die Stromwärme im Nebenschluß, die mechanische Reibung und die Verluste, die mit der Ummagnetisierung verknüpft sind (Hysteresis und Wirbelströme). Die zusätzlichen Verluste sind offenbar als eine Vermehrung der letzten Art anzusehen. Auch diese Überlegung führt uns zu dem Schluß, daß wir in Wirklichkeit keine allzu groben Abweichungen von unseren früheren Entwicklungen für den belasteten Motor zu befürchten brauchen.

Berlin, Januar 1903.

1) Elektrotechnische Zeitschrift 1891, S. 554.
2) Elektrotechnische Zeitschrift 1898, S. 252.

Über eine fundamentale kubische Gleichung der Theoria motus corp. coel. von Gauß.

Von S. Gundelfinger in Darmstadt.

1. In der Scheringschen Ausgabe der „Theoria motus corporum coelestium“ vom Jahre 1871 finden sich auf Seite 286 zu Art. 92 auf Grund einer handschriftlichen Aufzeichnung von Gauß ohne Beweis die ausführlichen Kriterien für die Anzahl positiver oder negativer Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + x^2 - Hx + \frac{H}{9} = 0,$$

welche Gleichung für die elliptische und hyperbolische Bewegung fundamental ist.

Bei näherem Eingehen auf die Gaußschen Kriterien erkennt man, daß dieselben leicht vermittelst des Sturmschen Theorems gewonnen werden.[1]) Da die übersichtliche Anordnung der Rechnung geradezu ein mustergiltiges Beispiel für die Anwendung des Sturmschen Satzes auf Gleichungen mit einem veränderlichen Parameter H bildet, und da überdies von Gauß die Ausnahmefälle nicht berücksichtigt worden sind, so hat es vielleicht einiges Interesse, die folgende, von mir seit bald 30 Jahren in meinen Vorträgen gegebene Darstellung hier mitzuteilen.

2. Setzt man

$$\begin{cases} f = x^3 + x^2 - Hx + \frac{1}{9}H, \\ f_1 = 3x^2 + 2x - H, \end{cases}$$

1) Aus äußeren wie inneren Gründen scheint Gauß gleichfalls den hier mitgeteilten Weg eingeschlagen zu haben. Im Anfang des dritten Jahrzehnts des vorigen Jahrhunderts hat Gauß sich wieder intensiver mit der Theorie der algebraischen Gleichungen beschäftigt: wie die Anzeige von Fouriers Analyse des équations déterminées und mehrere Mitteilungen an Schumacher beweisen. (Briefwechsel, hgg. von Peters, Band II, S. 228, Z. 6—2 v. u.; III, 68—69; 72, Z. 11 ff.) Gerade die Stellen in III deuten darauf hin, daß Gauß das ihm stets nahe liegende fundamentale Beispiel der Th. mot. zur Untersuchung seiner Ansicht benützt hat, „daß es einen in der Natur der Sache liegenden allgemeinen willkürfreien Zusammenhang zwischen den einzelnen critischen Puncten und den einzelnen Paaren von imaginären Wurzeln gar nicht gibt“. Überdies war es die Gepflogenheit des großen Mathematikers, neue Arbeiten von Belang an wichtigen, ihm von früher her bekannten Beispielen zu erproben.

so findet man auf Grund des Sturmschen Schemas

$$\text{(S)} \qquad f = qf_1 - f_2, \quad f_1 = q'f_2 - f_3,$$

$$\begin{cases} f_2 = (3H+1)x - H, \\ f_3 = H\{(3H+1)^2 - (9H+2)\} \\ \quad = H\{9H^2 - 3H - 1\} = 9H(H-H_1)(H-H_2), \end{cases}$$

wobei H_1 und H_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$9H^2 - 3H - 1 = 0,$$

so daß

$$H_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{6}, \qquad H_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{6}, \qquad H_1 H_2 = -\frac{1}{9}.$$

Bei der hier gegebenen Form von f_2 resp. f_3 hat man vorher mit dem positiven Faktor 9 resp. $(3H+1)^2$ multipliziert.

3. *Ausnahmefälle.* — *a*) Wenn $3H+1=0$, also $H = -\frac{1}{3}$, wird $f_1 = 3(x+\frac{1}{3})^2$, so daß die Sturmsche Kette sich auf das Funktionenpaar f und f_1 reduziert. Da f für $x = -\infty$, 0 und $+\infty$ resp. die Vorzeichen —, — und + annimmt, während f_1 beständig positiv bleibt, so kann nur eine einzige positive Wurzel vorhanden sein. In der Tat wird für $H = -\frac{1}{3}$ die Gleichung von der Form:

$$(x+\tfrac{1}{3})^3 = \tfrac{2}{27}.$$

b) Die Diskriminante f_3 verschwindet, wenn $H=0$ oder $H = H_1$ resp. $= H_2$. Für $H = 0$ wird die kubische Gleichung $x^2(x+1) = 0$.

Wenn $H = H_1$, bestimmt sich die Doppelwurzel x nach dem Schema (S) auf Grund von $f_1 = 0$ aus $f_2 = 0$, d. h.

$$x = \frac{H_1}{3H_1+1} = \frac{H_1}{9H_1^2} = \frac{1}{9H_1}.$$

Wegen $H_1 H_2 = -\frac{1}{9}$ ist *die Doppelwurzel gleich* $-H_2$. *Die einfache Wurzel ist gleich:*

$$-\tfrac{1}{9}H_1 : H_2^2 = -\tfrac{1}{9}H_1^3 : (H_1^2 H_2^2) = -9H_1^3.$$

Analog wird für $H = H_2$ die Doppelwurzel gleich $-H_1$ und die einfache Wurzel $-9H_2^3$.

4. Nach Erledigung dieser Ausnahmefälle wird die Anzahl negativer und positiver Wurzeln aus dem Systeme der Funktionen f, f_1, f_2, f_3 auf Grund der Anzahl verlorener Zeichenwechsel (Z. W.) beim Übergang von $x = -\infty$ bis 0, resp. von 0 bis $+\infty$ nach bekanntem Schema bestimmt.

A) $H > 0$.

I. H zwischen 0 und H_1.

x	f	f_1	f_2	f_3	Z. W.
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
0	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	1

1 neg. und 2 imag. Wurzeln.

II. H zwischen H_1 und $+\infty$.

x	f	f_1	f_2	f_3	Z. W.
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$	$-$	$-$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

1 neg. und 2 pos. Wurzeln.

B) $H < 0$.

III. H zwischen 0 und H_2.

x	f	f_1	f_2	f_3	Z. W.
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	$+$	$+$	$+$	1
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

2 neg. und 1 pos. Wurzel.

IV. H zwischen H_2 und $-\infty$.

x	f	f_1	f_2	f_3	Z. W.
$-\infty$	$-$	$+$	$\mp$[1]	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$\pm$[1]	$-$	1

1 pos. und 2 imag. Wurzeln.

Darmstadt, 4. Januar 1903.

Bemerkung zu der vorstehenden Note des Herrn S. Gundelfinger.

Von E. Lampe in Berlin.

Zwar läßt sich nicht feststellen, wann Gauß den handschriftlichen Zusatz zu der von Herrn Gundelfinger diskutierten kubischen Gleichung gemacht hat; wenn man aber berücksichtigt, daß Sturm seinen Satz erst 1829 ohne Beweis veröffentlicht hat (der Beweis wurde 1832 bekannt gegeben), und daß die Theoria motus schon 1809 gedruckt wurde, so scheint es natürlich, die Quelle der Gaußschen Angaben in der bekannten algebraischen Lösung der kubischen Gleichungen zu suchen, welche alle Eigenschaften der Wurzeln enthüllen muß. Hierbei kann man etwa folgenden Weg einschlagen.

---

1) Zum Falle IV beachte man, daß $3H_2 + 1$ noch positiv, daß dagegen $3H + 1$ bei weiterer Abnahme von H beim Durchgang von H durch den Wert $-\frac{1}{3}$ negativ wird.

Man setze in der zu untersuchenden Gleichung

$$x^3 + x^2 - Hx + \tfrac{1}{9}H = 0 \tag{1}$$

$x = y - \frac{1}{3}$, so geht (1) über in

$$y^3 = (H + \tfrac{1}{3})y - \tfrac{2}{27}(6H + 1). \tag{2}$$

Nun wird die Lösung von $y^3 = Ay + B$ durch die Formel

$$y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(B + \sqrt{\Delta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(B - \sqrt{\Delta})}$$

gegeben, wo Δ [Diskriminante von (1) und (2)] geschrieben ist für $B^2 - \frac{4}{27}A^3$. In unserem Falle wird

$$\Delta = \tfrac{4}{729}(6H + 1)^2 - \tfrac{4}{729}(3H + 1)^3$$
$$= \tfrac{4}{243}H(1 + 3H - 9H^2),$$

oder

$$\Delta = -\tfrac{4}{27}H(H - H_1)(H - H_2), \tag{3}$$

wo H_1 und H_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $1 + 3H - 9H^2 = 0$ sind, d. h.

$$H_1 = -\tfrac{1}{6}(\sqrt{5} - 1), \quad H_2 = \tfrac{1}{6}(\sqrt{5} + 1).$$

In den drei Fällen $H = 0$, $H = H_1$, $H = H_2$ besitzt also die Gleichung (2) zwei gleiche Wurzeln, deren Wert $= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}B}$ ist, oder $= -\sqrt{\frac{1}{3}A}$, wo $\sqrt{\frac{1}{3}A}$ gleiches Vorzeichen mit B hat. Für $H = H_1$ ist die Doppelwurzel also

$$y = \tfrac{1}{6}(1 - \sqrt{5}), \quad x = -\tfrac{1}{6}(1 + \sqrt{5}) = -H_2;$$

für $H = H_2$ ist

$$y = \tfrac{1}{6}(1 + \sqrt{5}), \quad x = \tfrac{1}{6}(-1 + \sqrt{5}) = -H_1.$$

Aus der Form (3) für Δ erkennt man sofort, daß, wenn H in den Intervallen liegt:

$$\alpha)\ (-\infty \cdots H_1), \quad \beta)\ (H_1 \cdots 0), \quad \gamma)\ (0 \cdots H_2), \quad \delta)\ (H_2 \cdots \infty),$$

das Vorzeichen von Δ wird

$$\alpha)\ +, \qquad \beta)\ -, \qquad \gamma)\ +, \qquad \delta)\ -.$$

Daher sind zwei Wurzeln von (1) in den Fällen α) und γ) imaginär, eine reell; in den Fällen β) und δ) sind alle drei Wurzeln reell.

Da nun das Produkt aller drei Wurzeln $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ gleich $-\frac{1}{9}H$ ist, so folgt, wenn z. B. x_1 und x_2 konjugiert komplex sind, $x_1 \cdot x_2$ positiv, also x_3 von entgegengesetztem Vorzeichen wie H, d. h. die reelle Wurzel ist positiv im Falle α), negativ im Falle γ).

Sind alle drei Wurzeln reell, so kann man ihre Vorzeichen aus der bekannten Zeichenregel von Descartes bestimmen. Ist H negativ, so sind die Vorzeichen der Glieder in (1): $+ + + -$; man hat zwei Zeichenfolgen, einen Zeichenwechsel, also zwei negative und eine positive Wurzel im Falle β). Ist H positiv, so ergeben sich die Vorzeichen: $+ + - +$, somit eine Zeichenfolge und zwei Zeichenwechsel, folglich sind im Falle δ) zwei Wurzeln positiv und eine negativ.

Für jedes der Intervalle α), β), γ), δ) läßt sich auch der Zahlbereich jeder einzelnen Wurzel bestimmen, wie ich dieses an vielen Beispielen in dem Büchelchen gezeigt habe: „Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen". Berlin, 1877. Diese Schrift wurde gerade zu dem Zwecke veröffentlicht, damit die kubischen Gleichungen, auf welche viele Aufgaben führen, nicht bloß numerisch gelöst, sondern zur Determination der Aufgaben benutzt werden.

Berlin, den 10. Januar 1903.

Rezensionen.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. Traité de géométrie. 7e édition. Paris 1900, Gauthier-Villars. XLII + 548 + 664 S. 17 fr.

Das vorliegende für den elementargeometrischen Unterricht an den Schulen Frankreichs grundlegende Werk ist in siebenter Auflage erschienen! Es bietet das Pensum der ebenen und räumlichen Geometrie in einer Fülle und Vollendung, wie es an deutschen Schulen wohl kaum erledigt werden kann. Eigentümlich sind dem Werke die zahlreichen Ausblicke, welche auf die verschiedenen Teile der höheren Geometrie geboten werden. So ist dem ersten Teil (S. 1—548) eine 42 Seiten lange historische Darstellung vorangeschickt; angehängt sind ihm 1) ein Aufsatz über die neuere Dreiecksgeometrie, den der um ihren Ausbau hochverdiente Lütticher Mathematiker J. Neuberg verfaßt hat, 2) der Hilbertsche Beweis für die Transcendenz der Zahl π, 3) eine Notiz über die Geometrographie aus der Feder ihres Erfinders E. Lemoine, desselben Mathematikers, *welcher der neueren Dreiecksgeometrie den Anstoß zu ihrer Entwicklung gegeben hat.* Der zweite Teil (S. 1—664) enthält nach dem stereometrischen Pensum die allgemeine Theorie der Kegelschnitte und Oberflächen zweiter Ordnung und in Anhängen 1) eine Notiz über die Anwendung der Determinanten auf die Geometrie, 2) eine Notiz über die linearen und quadratischen Transformationen sowie — was wieder aus der Feder von Herrn Neuberg stammt — über die einem Dreieck adjungierten Kegelschnitte, 3) eine Abhandlung von Herrn Neuberg über die neuere Geometrie des Tetraeders und 4) einen Aufsatz über die Nicht-Euklidische Geometrie aus der Feder des Herrn H. Poincaré.

Außerdem bieten beide Teile eine große Menge von Fragen und Aufgaben im Anschluß an die einzelnen Pensen.

Im einzelnen sei noch auf die elegante und allgemeine Lösung von Herrn Fouché zum Apollonischen Berührungsproblem aufmerksam gemacht, welche die Betrachtung der einzelnen speziellen Fälle überflüssig macht, sowie auf ein Versehen in dem Kapitel 1180 über die ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte, welches darin besteht, daß die Definition: „Zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte haben im Unendlichen eine gemeinsame Sehne" auch umgekehrt als richtig hingestellt wird (vgl. R. Müller, Arch. (3) **2**, 342—344).

Berlin. E. Jahnke.

Müller, Baltin und **Maiwald. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Seminare und Präparandenanstalten.** Unter Zugrundelegung des Lehrbuchs von Hch. Müller: Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Teil I B, nach den Lehrplänen von 1901 für Seminare u. s. w. bearbeitet von R. Baltin und W. Maiwald. Leipzig u. Berlin, 1902. B. G. Teubner. Mk. 2,20.

Müller, Baltin und **Maiwald. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit zahlreichen Anwendungen aus der Planimetrie und Physik für Seminare und Präparandenanstalten.** Unter Zugrundelegung der Müller-Kutnewskyschen Aufgabensammlung, Teil I, nach den preufsischen Lehrplänen von 1901 bearbeitet von R. Baltin und W. Maiwald. Leipzig u. Berlin, 1902. B. G. Teubner. Mk. 3,00.

Das Lehrbuch weicht von dem zugrunde gelegten Müllerschen, über welches im Archiv (3) **3**, 156/7 berichtet ist, nur in geringem Maße ab. Die Umgestaltungen schließen sich durchweg an den zweiten Teil des Müllerschen Lehrbuches an. Ref. kann sich daher darauf beschränken festzustellen, daß das vorliegende Lehrbuch alles wünschenwerte Material vollständig enthält.

Die Aufgabensammlung weicht in Einzelnheiten von der zugrunde gelegten Müller-Kutnewskyschen vielfach ab, indem einige Gebiete besonders arithmetische, Kürzungen, andere Erweiterungen erfahren haben, namentlich die Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung, der Trigonometrie und Stereometrie. Durchaus zu billigen ist es, daß die Aufgaben über Kettenbrüche fortgelassen sind. Recht praktisch ist die Hinzufügung von Übungen in der Benutzung der Logarithmen- und trigonometrischen Tafeln. Falls man wünscht, daß die Aufgabensammlung auch Anleitungen zur Lösung der Aufgaben enthalten soll, ist die Brauchbarkeit gefördert, indem vielfach durch starken Druck hervorgehobene Musterbeispiele zugefügt sind. Das Material der Sammlung ist ein reiches.

Ref. kann Lehrbuch und Sammlung den Interessentenkreisen warm empfehlen.

Schöneberg b. Berlin. E. Kullrich.

F. Pietzker und **O. Presler. Bardeys Aufgabensammlung.** Neue Ausgabe nach der 24. Auflage bearbeitet. Leipzig und Berlin 1900, B. G. Teubner.

Neben der 24. Auflage dieses bekannten Werks, an dem seit 1871 Generationen ihre ersten arithmetischen Studien getrieben haben, ist fast gleichzeitig diese „Neue Ausgabe“ veröffentlicht worden. Den Bearbeitern gebührt Dank dafür, daß sie sich entschlossen haben, dem Buche eine Gestalt zu geben, welche den Anforderungen des gegenwärtigen Unterrichts in stärkerem Maße gerecht wird, als es die alte Ausgabe noch leisten kann. Wenn auch an der äußeren Einteilung des Buchs kaum eine Änderung vorgenommen ist, so macht sich doch überall der neue Geist fühlbar. Ganz besonders gilt dies für die Textaufgaben, welche den modernen Verhältnissen angepaßt sind.

Den gleichzeitigen Gebrauch beider Ausgaben haben die Verfasser dadurch erleichtert, daß da, wo es nötig ist, der neuen Nummer der Aufgabe die alte hinzugefügt ist. Diese Maßregel ist besonders auch für den Übergang von der alten zur neuen Ausgabe zweckmäßig.

Berlin. H. Opitz.

M. Schuster. **Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie für Mittelschulen.** (Ausgabe C der „Geometrischen Aufgaben"). B. G. Teubner. Leipzig 1901. VIII u. 88. S. 8⁰. Mk. 1,40.

Das Büchlein schließt sich eng an desselben Verfassers „Geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch" an, erschienen 1899 bei dem gleichen Verlage in den Ausgaben A für Vollanstalten und B für Progymnasien und Realschulen. Ausgabe C ist unter Mitwirkung von Herrn Bieler bearbeitet und entspricht ihrem besonderen Zweck durchaus. Der Stoff dürfte auch dann ausreichen, wenn die Verhältnisse es gestatten, über das Mindestmaß im Pensum hinauszugehen.

Die genaue Durchbildung des Methodischen, derart daß die Lehrsätze aus den Aufgaben entwickelt werden, ist gerade für Ausgabe C von besonderer Wichtigkeit. Die Darstellung ist geschickt, die Anordnung klar. Hervorgehoben sei die Benutzung des Prinzips der Dualität.

Im Einzelnen wird „Strahl" S. 4 besser durch „Halbstrahl" ersetzt. In II 5 b und 8 a muß es heißen: „Zu welcher vollen Stunde" statt „Um wieviel Uhr". III (das Dreieck) und VI (Örter und Kongruenzsätze) würde Ref. enger mit einander verbinden und dabei den Begriff der notwendigen Bestimmungsstücke herausarbeiten. IX 19 b mufs genauer heißen: „Wieviel dem Werte nach verschiedene Umfangswinkel?"

Bei mäßigem Preise ist die Ausstattung eine gute. Ref. kann das Büchlein empfehlen.

Schöneberg. E. Kullrich.

Chr. Schmehl. **Die Algebra und algebraische Analysis mit Einschluß einer elementaren Theorie der Determinanten in den oberen Klassen von höheren Lehranstalten, insbesondere der Realgymnasien und Oberrealschulen.** Gießen 1901, E. Roth. 286 S. Mk. 2,50.

Ein sehr ausführliches, für die oberen Klassen der Realanstalten bestimmtes Lehrbuch. Die theoretischen Entwicklungen sind durch zahlreiche Beispiele erläutert, was das Buch auch für den Selbstunterricht geeignet erscheinen läßt. Es enthält mehr, als bei der auf den Schulen verfügbaren Zeit durchgearbeitet, manches (namentlich auf dem Gebiete der Kombinationslehre), was recht wohl entbehrt werden kann. Die Verwendung von Determinanten hält auch Referent, wenigstens auf Oberrealschulen, für wünschenswert, nur zieht er es vor, bei der ersten Einführung auf kombinatorische Betrachtungen über gerade und ungerade Permutationen zu verzichten und lieber von der Auflösung linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten auszugehen, auch sich auf Determinanten zweiter bis vierter Ordnung zu beschränken, die für die analytische Geometrie ja vollkommen ausreichen. Was Einzelheiten

angeht, so möge nur bemerkt werden, daß man bei der Behandlung der kubischen Gleichungen heute nicht mehr sagen darf, es sei (im Falle einer negativen Diskriminante) noch kein Mittel gefunden, um auf algebraischem Wege die imaginäre Form der Cardanischen Auflösung auf eine reelle zu reduzieren, nachdem bereits vor zehn Jahren mehrere Mathematiker (Hölder, Mollame, Kneser) streng nachgewiesen haben, daß eine solche Reduktion unmöglich ist. Da ausführlich davon die Rede ist, daß eine rationale Wurzel auch als Summe zweier irrationalen Zahlen erscheinen kann, hätte wohl auch das einfache Kummersche Kriterium dafür mitgeteilt werden können, daß im Falle einer rationalen Wurzel jeder der beiden Summanden rational ist.

Berlin. C. Faerber.

Edward V. Huntington. Über die Grund-Operationen an absoluten und komplexen Größen in geometrischer Behandlung. Inauguraldissertation, Straßburg, 1901. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. Mk. 1,50.

Eine ausführliche Theorie der reellen und komplexen Größen, wie sie etwa in Stolz' Vorlesungen über allgemeine Arithmetik zu finden ist, nur daß überall für „absolute reelle Zahl“ „absolute Strecke“, für komplexe und positive oder negative reelle Zahl „Vektor“ gesagt wird, wobei das Wort „Vektor“ nicht etwa im Graßmann-Hamiltonschen Sinn zu nehmen ist. Welchen Vorteil der Ersatz der Zahlen durch Strecken bieten soll, ist nicht recht ersichtlich, weil ja auch bei seiner Behandlungsweise der Verfasser es nicht vermeiden kann, den Grenzwert einer unbegrenzt fortsetzbaren Folge von Strecken, ganz analog den Cantorschen Zahlenfolgen, einzuführen.

Berlin. C. Faerber.

Kitt, Moritz. Grundlinien der politischen Arithmetik. Zum Gebrauche an Handelsakademien, Höh. Handelslehranstalten und zum Selbstunterrichte. I. Teil. Zinseszins- und Rentenrechnung. IV u. 78 S. II. Teil. Tabellen 29 S. Wien, 1901. Verlag von Karl Gräser u. Co. gr. 8°. Mk. 3.

Die Zahl der Lehrbücher, die für den Unterricht in der Rentenrechnung auf der höh. Handelsschule für die Hand des Schülers zu Gebote stehen, ist eine recht geringe, da die meisten auch der elementar gehaltenen Bücher weit über das Ziel hinausgehen, das man bei der beschränkten Zeit des Unterrichts erreichen kann, während in den auf unseren Gymnasien gebrauchten Lehrbüchern die politische Arithmetik nur gestreift wird. Da liegt uns nun ein Buch vor, das sich genau dem Unterrichte anschließt, in einfacher klarer Weise die Formeln ableitet und in 100 teils völlig durchgerechneten, teils für Ausrechnung durch die Schüler bestimmten Aufgaben den gewonnenen Stoff verarbeitet und so zum geistigen Eigentum des Schülers macht. Das Werkchen besteht aus 2 Teilen, von denen der zweite die zur Berechnung nötigen Tabellen — $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$ und $\log\left(1-\frac{p}{100}\right)$ von $\frac{1}{4}\%$ bis 10%, $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ für p von $\frac{1}{4}$ bis 10, für n von 1 bis 50 auf 8 Dezimalstellen, Sterbetafeln und Grundrechnungen zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften nach den 4 vorher angegebenen Sterbetafeln — enthält.

Im ersten Teile befinden sich die Entwickelungen und Aufgaben, zunächst über die einfache Zinseszinsrechnung und Zeitrentenrechnung, d. h. Renten, die für eine bestimmte Anzahl von Jahren ausgezahlt werden. Das Buch beschäftigt sich dann mit den Anleihen, der Berechnung der Annuitäten, d. i. der gleichbleibenden Beträge, die jedes Jahr zur Verzinsung und Amortisation aufgewendet werden müssen, und der Aufstellung der daraus hervorgehenden Tilgungspläne. Vor dem Eingehen auf die Lebensrenten wird das Nötigste aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet und auf die Sterblichkeitstafeln angewendet. Von den Renten werden nur behandelt die Lebensrente gegen einmalige Einzahlung einer Summe und die aufgeschobene Rente gegen Prämienzahlung bis zum Beginn des Rentenbezugs, wobei aber auch die Prämienreserve berücksichtigt wird. Die letzten Seiten sind den Ablebensversicherungen, den Anwartschaften, wie der Verf. sie nennt, gewidmet, wobei nur die Nettoprämie einer einfachen Lebensversicherung berechnet wird.

Für Schulen, die sich etwas eingehender mit Rentenrechnung beschäftigen, insbesondere für höhere Handelslehranstalten, ist das Buch überaus brauchbar.

Zum Schluß sei noch ein kleines Monitum gestattet. Als Formel zur Kontrolle des Tilgungsplanes ist angegeben: $x_n = C\frac{v^{n-1}(v-1)}{v^n - 1}$, wobei das n im Zähler die Zeit bis zum kontrollierten Jahr, das n im Nenner die Tilgungsdauer bezeichnet. Das ist unstatthaft und erzeugt Verwirrung, und es müßte das n im Zähler etwa durch n' ersetzt werden.

Chemnitz. H. Willgrod.

Simon, Max. Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig, Göschen. 1. Teil Gerade, Ebene, Kugel. 1900. 152 S. 4 *M* 2. Teil Die Flächen zweiten Grades. 1901. 176 S. 4,40 *M* (Sammlung Schubert IX u. XXV).

In der „Sammlung Göschen" erschien vom Verfasser „Analytische Geometrie des Raumes", die von Herrn M. Cantor in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik (44. Bd. 1899, pag. 79) besprochen wurde. Aus dieser kleineren Arbeit ist die uns vorliegende umfangreichere hervorgegangen. Der Gang der Darstellung ist derselbe geblieben, doch ist der Stoff überall tiefer und ausführlicher behandelt, außerdem ist ein reiches Aufgabenmaterial beigefügt. In den ersten Kapiteln dient dieses hauptsächlich dazu, den Leser mit dem Rechenverfahren vertraut zu machen und ihn in die Beweismethode einzuführen, wobei die Lösung nicht gegeben oder doch nur angedeutet ist. Zu einem gründlichen Eindringen in die analytische Geometrie des Raumes ist die Bearbeitung solcher Aufgaben unerläßlich, und da man sich auf unseren Gymnasien und Realgymnasien auf die analytische Geometrie der Ebene beschränkt, so ist gerade hier die Hinzufügung von zahlreichen Aufgaben nicht zu entbehren. In den späteren Kapiteln wird die Aufgabenstellung ausschließlicher angewendet, auch zur Entwickelung der Theorie, und da sind dann die Lösungen vollständig gegeben oder ausführlicher behandelt; doch fehlt es auch hier nicht an eigentlichem Übungsmaterial.

Der erste Band behandelt die Koordinaten, Ebene und Gerade, den linearen Komplex, das Dualitätsprinzip, die Koordinatentransformation, bei der nun auch die Eulerschen Formeln angegeben sind, und die Kugel mit

dem linearen Kugelkomplex und der Inversion. Der zweite Band, der sich vielfach an Reye anlehnt, aber auch die schönen Untersuchungen des Herrn Staude berücksichtigt, beschäftigt sich mit den Flächen zweiten Grades in allgemeiner und spezieller Behandlung.

Das Werk enthält alles, was man bei einer elementaren Einführung in die analytische Geometrie des Raumes wünschen kann, die Darstellung ist klar und leichtfaßlich, so daß das Buch zum Studium aufs angelegentlichste empfohlen werden kann. Die Determinantenrechnung ist nicht, wie in dem kleineren Werke vermieden, wenn die betr. Sätze auch immer noch ohne Zuhilfenahme derselben bewiesen werden. Mit der Bezeichnung $|ab'|$ für $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ hat sich Referent recht wohl befreunden können, da sie sehr kurz und übersichtlich ist.

Chemnitz. H. Willgrod.

Jos. Diekmann. Koppes Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. 19. Auflage (3. Aufl. der neuen Bearbeitung). I. Teil Planimetrie. Ausgabe für Gymnasien. Essen, G. D. Bädeker, 1902.

Von der Koppeschen Geometrie, deren erste Auflage 1836 erschienen ist, liegt uns der erste Teil in Neuauflage vor, der infolge der neuen Lehrpläne von 1901 eine Änderung in der Verteilung des Stoffes erfahren hat, indem die Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie nun in je einen Band zusammengefaßt werden. Das Werk ist wohl das älteste der heute gebrauchten Lehrbücher der Planimetrie (Kambly erschien 1850), und die stets wieder erfolgende Neuauflegung beweist die hohe Brauchbarkeit des Buches. Dabei lehrt ein Vergleich der verschiedenen Auflagen, daß das Werk mit der Entwicklung der mathematischen Methodik stetig fortgeschritten ist, und daß es besonders durch den verdienten Herausgeber mannigfache Wandlung erfahren hat. Auch in dieser Auflage ist die bessernde Hand zu erkennen: eine Anzahl Aufgaben wurde hinzugefügt, in denen die Kreislehre auf bekannte ornamentale Formen angewendet wird, das Übungsmaterial für Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis wurde vermehrt und dieses Kapitel zugleich eingehender behandelt, und einige Tafeln geben uns „die Konstruktion einer Reihe von typischen Aufgaben in ihren Figuren auf Grund neuerer Anschauungen“.

Chemnitz. H. Willgrod.

Großmann, Wilhelm. Versicherungsmathematik. (Sammlung Schubert. XX). Leipzig, C. I. Göschen. 1902. 8⁰. VI u. 218 S. 5 *M*.

Durch die immer weitere Ausdehnung des Versicherungswesens, besonders auch durch den Ausbau der Arbeiterfürsorge, wird dem Versicherungswesen stetig größeres Interesse dargebracht, und die Zahl derer nimmt beträchtlich zu, die sich mit den mathematischen Grundlagen desselben bekannt zu machen wünschen. Da ist denn die Herausgabe eines Werkes mit Freuden zu begrüßen, das in reicher Vollständigkeit alle hierher gehörigen Fragen behandelt, und zwar in einer so einfachen und klaren Weise, daß auch der mathematisch weniger Geschulte sehr wohl das gesamte Buch mit vollem

Verständnis durchzuarbeiten und damit in den für viele etwas spröden Stoff einzudringen vermag.

Vorausgesetzt wird nur die Kenntnis der geometrischen Reihe und der Einleitung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung; ja die Formeln sind auch noch auf einem Wege abgeleitet, bei dem die letztere zu entbehren ist. Nach einem einleitenden Abschnitt über Zeitrenten und Sterblichkeitstafeln werden in dem zweiten Abschnitt „Versicherung einfacher Leben“ die Einmalprämien der Erlebens- und Rentenversicherung besonders eingehend behandelt. Es kommen nach einander zur Berechnung die Prämien der Erlebensversicherung, der Leibrenten, der aufgeschobenen Leibrenten, der kurzen Leibrenten, der aufgeschobenen temporären Renten, der Altersrenten, der steigenden Renten und zwar der lebenslänglich steigenden Renten, der eine Anzahl von Jahren steigenden und dann konstant bleibenden Renten, der eine Anzahl von Jahren hindurch steigenden und dann aufhörenden Renten und der aufgeschobenen steigenden Renten. Auf die jährlich zu zahlenden Renten werden sodann die unterjährigen oder terminweisen Renten zurückgeführt, die in kleineren Terminen wiederkehrend gezahlt werden, und zwar geschieht die Berechnung sowohl nach Van Heers Methode als auch unter der Annahme des gleichmäßigen Absterbens innerhalb eines Jahres. Während das Resultat der ersteren vom Zinsfuße ganz unabhängig ist, ändert sich das der zweiten mit diesem.

Im zweiten Kapitel werden die Einmal-Prämien der Ablebensversicherung abgeleitet, wieder für die verschiedenen Fälle der einfachen Ablebensversicherung, der Ablebensversicherung mit Karenz, der kurzen Todesfallversicherung und der allgemeinsten Form der Lebensversicherung, daß für jeden Sterbefall in einem bestimmten Jahre eine bestimmte Summe zu zahlen ist. Den Schluß bildet die Ablebensversicherung mit sofortiger Auszahlung nach erfolgtem Tode. Die Berechnung aller verschiedenen möglichen Arten von Renten, von denen manche in der Praxis gar nicht vorkommen, hat für die Folge den Vorteil, alle weiteren Fragen auf einfache Weise dadurch behandeln zu können, daß sie auf eine oder mehrere Renten- bez. Versicherungsarten zurückgeführt werden. Nicht wenig tragen zu der leicht verständlichen und übersichtlichen Art der Darstellung die vorteilhaften Bezeichnungen bei. Leider herrscht ja bis jetzt in den Lehrbüchern der Versicherungsmathematik eine allgemeine Übereinstimmung in dieser Beziehung nicht, und es wäre wünschenswert, wenn die Bezeichnungsweise des vorliegenden Werkes allgemein Eingang fände. Am meisten werden diejenigen der deutschen Versicherungsanstalten angewendet, die man zum größten Teile in dem vielgebrauchten Werke Zillmers „Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen“ findet. Der Verfasser folgt derselben vielfach; wo eine Abweichung erfolgt, ist die Bezeichnung unseres Buches übersichtlicher, und außerdem ist das behandelte Gebiet hier wesentlich größer als dort.

Im dritten Kapitel wird die Einmal-Prämie der gemischten Versicherung oder der abgekürzten Lebensversicherung, wie sie meist genannt wird, berechnet, der Art, die von den Ablebensversicherungen jetzt wohl am meisten in Betracht kommt, bei welcher das Kapital bei Erreichung eines bestimmten Lebensalters ausgezahlt wird, bei früherem Tode aber zur Zeit des Ablebens. Bei dem folgenden Kapitel, der Berechnung der Jahresprämien, treten die

Vorzüge des Buches ganz besonders hervor. Alle Arten werden abgeleitet aus der einfachen Beziehung $V_x = v_x \cdot \widehat{R}_x$, wo V_x die Einmal-Prämie irgend einer Versicherungsart, v_x die Jahresprämie und irgend eine Rentenart $\widehat{R}_x$ die Art der Zahlung der Jahresprämie ist. In Kapitel V wird die Bruttoprämie aus der Nettoprämie bestimmt. Sodann werden die Gegenversicherung und die Prämienrückgewähr behandelt. Bei der Gegenversicherung werden die für die Hauptversicherung gezahlten Prämien zurückgezahlt, falls die Anstalt wegen vorzeitigen Ablebens des Versicherten an denselben keine Zahlung leistet, bei der Prämienrückgewähr in demselben Falle sämtliche Prämien. Auch die Berechnung der Prämienreserve, mit der sich das VIII. Kapitel beschäftigt, ist nach den bisherigen Durchführungen einfach. Zunächst wird zwischen retrospektiver und prospektiver Prämienreserve unterschieden, gezeigt, daß beide gleich sind, und sodann werden beide berechnet, wie zuletzt auch die Zillmersche Prämienreserve. Zillmer geht bekanntlich von der Voraussetzung aus, die Jahres-Netto-Prämien irgend einer Versicherung seien erst vom 2. Jahre angefangen einander gleich, während die Jahres-Netto-Prämie des 1. Jahres um einen Betrag A geringer sei, der zur Bestreitung der Kosten der Versicherungs-Aufnahme dient.

Für die Aufstellung der Bilanz einer Versicherungsanstalt ist es bequemer, die Prämienreserve nicht für jeden einzelnen der Versicherten gesondert zu berechnen, sondern die Bestimmung durch Gruppenrechnung zu vereinfachen. Auch dafür werden die Formeln aufgestellt.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Versicherung verbundener Leben, den Verbindungsrenten, der einseitigen Überlebensrente (Witwen- und Waisen-Pension) und den verschiedenen Ablebensversicherungen. Es werden wieder zunächst die Einmal-Prämien, dann die Jahresprämien und die Prämienreserven bestimmt.

Liegen für die Renten- und Ablebensversicherung mehrere zuverlässige Sterblichkeitstafeln vor, von denen in unserem Buche die Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für normale Leben mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, die Tafel der 17 englischen Gesellschaften, bei der Männer und Frauen nicht getrennt sind, und die Brunesche Tafel aufgenommen sind, so sind für die nun folgende Invalidenversicherung wohl nur die Tabellen von Karl Heym nach den Beobachtungen der Leipziger Kranken-, Invaliden- und Lebensversicherung „Gegenseitigkeit" und die Zimmermannsche Tabelle für die nicht zum Zugpersonal gehörenden aktiven Eisenbahnbeamten vorhanden, welche letztere den Berechnungen des Buches zu Grunde gelegt ist. Erst wenn unsere Invaliditäts- und Altersversicherung längere Zeit in Geltung gewesen sein wird, werden wir für diesen Fall Tafeln haben, die den Sterblichkeitstafeln an die Seite zu stellen sind. Nach der Berechnung der Aktiven- und Invalidenrente, d. h. dem gegenwärtigen Werte einer Rente, die einem Aktiven gezahlt wird, so lange er aktiv ist, einem Invaliden bis zu seinem Tode, werden zwei Methoden der Pensionsversicherung für invalid Werdende abgeleitet, die Kaansche, bei welcher von den A_x Aktiven des Alters x der Dekremententafel ausgegangen wird, und die Karupsche, bei welcher der Ausgangspunkt die Wahrscheinlichkeit bildet, daß ein x-jähriger Aktiver im Alter $x + k$ als Invalide lebt. Beide führen, wie in einem besonderen Paragraphen gezeigt wird, zu demselben Werte der Pensions-

versicherung. Es folgen dann die Ableitungen der Einmal-Prämien für die Pensionsversicherung mit Karenz, der steigenden Pensionsversicherung und der steigenden Pensionsversicherung bei steigendem Gehalte, sowie der unbedingten Pensionierung nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren und der Witwen- und Waisenpension. Die Jahresprämien wie die Prämienreserven ergeben sich dann leicht wie früher. Ein letztes kurzes Kapitel ist der Krankenversicherung gewidmet.

Überall, und das macht das Buch auch für den Praktiker wertvoll, sind Schemata für die Berechnung der Renten bez. Prämien angegeben und bei den meisten auch Beispiele durchgerechnet. Für jeden, der sich eingehender mit Renten- und Lebensversicherung beschäftigen will, kann das Buch aufs angelegentlichste empfohlen werden.

Chemnitz. H. Willgrod.

Reuling, Wilhelm. Die Grundlagen der Lebensversicherung. Berlin, 1901. E. S. Mittler u. Sohn. XII u. 67 S. 8^0.

Während sich das Buch von Großmann an diejenigen wendet, die in die mathematische Theorie der Lebensversicherung eindringen wollen, ist dieses Werkchen für einen erheblich größeren Leserkreis bestimmt. Es soll auch denen einen Einblick in die Grundlagen der Lebensversicherung ermöglichen, welche, ohne sich von Amts wegen mit dem Versicherungswesen beschäftigen zu müssen und ohne die besonderen mathematischen Vorkenntnisse zu besitzen, der Lebensversicherungsfrage ein Interesse entgegenbringen, also der großen Zahl derer, die ihr Leben bei einer Gesellschaft versichert haben (wie wir uns kurz, wenn auch nicht korrekt ausdrücken) und die ein genaueres Verständnis der ganzen Frage erlangen möchten. Diesem Erschließen des Verständnisses dient das Buch in vortrefflicher Weise; auf die Grundlagen ist, soweit es ohne Heranziehung des eigentlich Mathematischen geschehen kann, erschöpfend eingegangen. Im Text sind die Formeln vollständig vermieden; in den unter dem Text angefügten Noten sind einige der einfachsten abgeleitet.

Nach einander sind in 4 Kapiteln besprochen 1) der Grundgedanke der Lebensversicherung, welcher dahin zusammengefaßt ist, „solche wirtschaftlichen Ergebnisse, welche mit der Lebensdauer der Menschen in Beziehungen stehen und welche an und für sich (isoliert) für den Einzelnen abhängig von seiner individuellen Lebensdauer sind, innerhalb eines größeren Personenkreises auszugleichen und damit zugleich für die Einzelnen unabhängig von ihrer individuellen Lebensdauer zu stellen". Es folgen 2) die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung, worin sowohl Versicherungen auf einfache Leben wie auf sogenannte verbundene Leben betrachtet sind, 3) die Elemente der Prämie, Netto- und Bruttoprämien, Prämienreserve, 4) das Risiko aus der Versicherungsunternehmung, Gegenseitigkeitsanstalten und Aktienunternehmungen.

Das Werkchen kann nicht nur allgemein allen empfohlen werden, die sich mit den Grundgedanken der Lebensversicherung bekannt machen wollen, sondern auch den Mathematiklehrern, die den Stoff zu behandeln haben, und denen auch eine Darstellung von anderer Seite — der Verfasser ist Jurist — hochwillkommen sein muß. Auf eine von der gewöhnlichen

abweichenden Auffassung der Lebenswahrscheinlichkeit, der der Verfasser einen Teil der Vorrede widmet, wird der Ref. an anderer Stelle eingehen.

Chemnitz. H. Willgrod.

Arthur Breusings Steuermannskunst. Herausgegeben von Schilling, Fulst und Meldau. 6. Auflage. Heinsius, Leipzig, 1902. 460 S. Mk. 14.

Nach dem Vorwort handelte es sich nicht etwa darum, ein umfassendes Handbuch der Navigation herzustellen, sondern ein Buch, wie es beim Unterricht auf Seefahrtsschulen gebraucht werden kann. Damit ist zugleich gegeben, daß die Mathematik nur insofern Behandlung finden wird, als sie später in der Praxis auch Anwendung finden kann. Für die Lehrer der Mathematik hat nun die Seeschiffahrt wenigstens insofern stets ein besonderes Interesse gehabt, als sie eine Fundgrube von Beispielen für die sphärische Trigonometrie darstellt, und sicher sind viele Fachkollegen im Besitze des einen oder anderen Buches über Navigation, vielleicht einer alten Auflage von Breusing selbst. Aber im Laufe der Zeit haben sich die Verhältnisse der Seeschiffahrt recht sehr verändert und kompliziert, und wenn Breusing persönlich eine Berücksichtigung der Verhältnisse bei seinen Lebzeiten abgelehnt hat, so haben die jetzigen Bearbeiter es in der Tat verstanden, uns eine zeitgemäße Behandlung des Stoffes zu bieten. So ist bezüglich der Ortsbestimmung vor allen Dingen die Theorie der Standlinien von weittragender Bedeutung geworden. Ihr widmet das Buch daher auch, ohne die anderen Methoden der Ortsbestimmung zu vernachlässigen, mit Recht eine klare und schöne Darstellung, die m. E. auch wohl beim Unterricht in der mathematischen Geographie mit Erfolg Verwendung finden könnte. Dann findet sich eine den heutigen Verhältnissen entsprechende Behandlung des Kompaßwesens, deren Berücksichtigung den Unterricht über Magnetismus nur beleben und interessant gestalten kann. Endlich bietet auch die Behandlung der Beobachtungsinstrumente Beispiele der Optik, die sicher heute schon vielfach beachtet werden.

Wir haben somit ein Buch, dessen Lektüre den Lehrer der Mathematik und Physik auf manchen auch in der Schule erwähnenswerten Gedanken führt und es ihm so erleichtert, sich das Interesse der Schüler zu sichern, ein Buch, welches zeigt, wie auf einem wesentlichen Gebiete des heutigen praktischen Lebens die elementaren Lehren der Mathematik und Physik strengste Befolgung erheischen, dann aber auch zum Verständnis desselben ausreichen. Ich möchte dasselbe deswegen als für die Lehrerbibliotheken unserer höheren Schulen geeignet empfehlen, indem ich sicher glaube, daß jeder Leser des Buches dadurch ein Band findet, das seine Wissenschaft mit dem praktischen Leben verknüpft, und daß wir uns in der Schule die Möglichkeiten nicht entgehen lassen sollten, durch Hinweise auf Verwendungen unserer Schullehren im praktischen Leben auch die Schüler zum besseren Verständnis des letzteren zu befähigen.

Mit Rücksicht auf die Praxis kann ich es mir nun allerdings auch nicht versagen, hier noch einen Wunsch betr. des mathematischen Lehrstoffs auszusprechen. Daß seine Behandlungsweise sich anfechten läßt, meine ich dabei nicht. Aber die Behandlung der Stereometrie erscheint mir doch

etwas zu abrupt. An die Lehre vom Cylinder schließt sich nämlich die Berechnung des Fasses, und zwar als letztes Glied der Stereometrie überhaupt. Die Formel kann natürlich nicht entwickelt werden. Dazu wäre es nötig gewesen, die Formeln für die Pyramide und das Prismatoid vorwegzunehmen. Das aber hätte auch genügt, die Simpsonsche Regel zu lehren, und ich meine, daß diese auf keinem Gebiete der angewandten Mathematik fehlen darf, auch nicht für den denkenden Seemann. Denn so wichtig wie die Berechnung des Fasses muß ja für ihn auch diejenige von Tanks oder Bunkerräumen oder endlich der Schiffsgefäße selbst sein. Und außerdem würde es ihm dadurch ermöglicht, auch die Berechnung eines Diagramms zu begreifen, was ja auch für den Seemann nicht ganz unwesentlich ist. Dem Mathematiker wird diese Lücke wohl meist noch unangenehmer sein; hoffentlich gibt eine neue Auflage bald die Möglichkeit, sie auszufüllen.

Magdeburg. FR. BRADHERING.

L. Marc. Sammlung von Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik und darstellenden Geometrie. München 1901, Th. Ackermann. 52 S. Mk. 1,60.

Es ist eine Sammlung von Aufgaben, welche bei der Vorprüfung für das Bauingenieur-, Architektur- und Maschineningenieurfach an der technischen Hochschule zu München in den Jahren 1885—1901 gestellt worden sind.

Der erste Teil enthält 71 Aufgaben aus den Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Es wird die Diskussion von ebenen und Raumkurven sowie Flächen zweiten Grades, ferner Integration einfacher Differentialgleichungen verlangt. Der zweite Teil bietet 21 Aufgaben aus der darstellenden Geometrie und der dritte 35 Aufgaben aus der technichen Mechanik.

Um eine Vorstellung von dem Charakter dieser Aufgaben zu geben, möge aus jedem Abschnitt je eine hier mitgeteilt werden:

1) Gegeben ist die Fläche $zy^2 = y - x^2$. Man diskutiere die Gestalt der Fläche durch Untersuchung ihrer Schnitte mit Ebenen parallel der xy-Ebene. Man suche die parabolische Kurve der Fläche und bestimme deren Projektionen auf die drei Koordinatenebenen. Endlich berechne man das Volumen des Körpers, welcher senkrecht über dem Quadrat, begrenzt von den Geraden $x = -1$, $y = +1$; $x = +1$, $y = +3$, errichtet ist und bis zur Fläche als oberer Begrenzung reicht.

2) Es soll die Durchdringung einer regulären schräggestellten dreiseitigen Pyramide und einer Kugel nebst Schattenkonstruktion in senkrechter Projektion dargestellt werden.

Gegeben von der Pyramide der Mittelpunkt der Basis durch die Projektionen $M_1 M_2$, die Spitze durch die Projektionen $S_1 S_2$; ferner durch die Projektionen $g_1 g_2$ eine Gerade g, in welcher eine von der Spitze ausgehende Kante der Pyramide liegt. Die Kugel, deren Mittelpunkt durch die Projektionen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ gegeben ist, soll die Gerade g berühren. Die Lichtrichtung ist gegeben durch die Projektionen $l_1 l_2$.

3) Ein Ring von rechteckigem Querschnitt ist an einer Stelle aufgeschnitten und wird dort durch zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte von 20 kg auseinandergezogen.

Die ursprüngliche Schlitzweite s kann als klein gegen die Abmessungen des Ringes betrachtet werden. Um wie viel vergrößert sich s durch die elastische Formänderung, die der Ring erfährt, wenn der Elastizitätsmodul gleich $2 \cdot 10^6$ atm gesetzt wird, und wie groß ist die Biegungsbeanspruchung an der gefährlichsten Stelle?

Berlin. E. Jahnke.

F. Michel. Recueil de problèmes de géométrie analytique. (Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'Ecole Polytechnique de 1860 à 1900). Paris, Gauthier-Villars, 1900. 240 S. 8⁰.

Diese Sammlung ist bestimmt für die Schüler der berühmten classes de mathématiques spéciales, deren besondere Aufgabe die Vorbereitung für den Eintritt in die Ecole Polytechnique oder Ecole Normale ist. Bekanntlich finden bei beiden Schulen Aufnahmeprüfungen statt, und wenn man bedenkt, daß z. B. im Jahre 1897 von 1023 Bewerbern nur 224 in die erstere, und von 260 nur 13 in die zweite gelangten, kann man im voraus ermessen, welche hohen Anforderungen an die Kandidaten gestellt werden dürfen.

Das vorliegende Buch gibt die ausführlichen Lösungen der in den letzten 41 Jahren gestellten Probleme aus der analytischen Geometrie; es handelt sich meist um Herleitung und Diskussion von geometrischen Örtern und algebraischen Gleichungen, die durch spezielle Verknüpfung gegebener Kegelschnitte erzeugt werden. Wegen der chronologischen Folge sind sachliche Ordnung oder didaktische Prinzipien ausgeschlossen, trotzdem möchten wir wünschen, daß auch deutsche Studenten der Mathematik ihre Kräfte an diesen Aufgaben erproben und stählen; viele oder alle würden gar bald erkennen, daß der bei uns übliche Unterricht ihnen auf diesem Gebiete noch manches zu tun übrig läßt.

Berlin. Richard Müller.

E. Greve. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Glogau 1901, C. Flemming.

Die vierstellige Logarithmentafel bietet eine für die Schule völlig ausreichende Genauigkeit und hat gleichzeitig den Vorzug, die eigentliche Rechenarbeit bei der Lösung mathematischer Aufgaben zu vermindern. Ihre allgemeine Einführung im Schulgebrauch dürfte daher in nicht allzuferner Zeit bevorstehen. Aus diesem Grunde mag die Einrichtung der vorliegenden Tafel kurz beschrieben werden.

Die Mantissen aller vorkommenden Logarithmen sind vollständig hingedruckt, so daß der Schüler die ersten Ziffern derselben nicht an einer anderen Stelle als die letzten zu suchen braucht. Um ferner das Interpolationsgeschäft nach Möglichkeit zu vermeiden, sind die Logarithmen der natürlichen Zahlen bis 10000 aufgenommen, während die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute fortschreiten. In einem Anhange werden eine Reihe von Hilfstabellen gegeben, welche manche Rechnungen und die Lösung mancher Aufgaben aus Physik, Chemie und mathematischer Geographie erleichtern sollen.

In Bezug auf die äußere Einrichtung ist besonders die Teilung der beiden Haupttafeln durch Linien in Gruppen von je drei Zeilen und das bequeme Buchformat hervorzuheben.

Berlin. E. JAHNKE.

Annuaire pour l'an 1902, publié par le bureau des longitudes. Paris Gauthier-Villars. 1,50 fr.

Das Oktavbändchen bietet auf 656 Seiten in bekannter mustergültiger Weise eine Fülle von Kalendern, Tabellen und Tafeln, wo man *jede* Zahl aus *Physik* und *Technik* nach dem Stande der neuesten Forschung verzeichnet findet. Wie schon die letzten Ausgaben enthält auch diese einen längeren Aufsatz aus der Feder des kürzlich verstorbenen Physikers A. Cornu über die gebräuchlichen elektrischen Einheiten. Außerdem sind dem Bändchen angehängt die folgenden Abhandlungen: Notice sur la télégraphie sans fil; par M. H. Poincaré. — Les courants polyphasés; par M. A. Cornu. — Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation; par M. E. Guyou. — Observatoire du sommet du Mont Blanc (création et travaux); par M. J. Janssen.

Berlin. E. JAHNKE.

Friedrich Kohlrausch. Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig 1900. B. G. Teubner 8°. 260 S.

Die Einführung in das absolute Maßsystem, die in knapp gedrängter Form geschrieben ist, den Stoff aber in übersichtlicher für den Anfänger best geeigneter Weise bringt, bildet die Einleitung zu dem Leitfaden, der den angehenden Praktikanten bei der Anstellung seiner physikalischen Übungsaufgaben führen und unterstützen will. Da das Maßsystem die Grundlage aller folgenden Messungen bildet, so ergibt sich die Voranstellung eigentlich stofflich von selbst. Ihm folgt das fast wichtigste Kapitel. „Die Kritik der Messungsgenauigkeit", nebst praktischen Angaben zur Erleichterung physikalischer Rechnungen. Der Leitfaden selbst schließt sich in der ganzen Art der Behandlung des Stoffes, in der Auswahl der Aufgaben der bekannten größeren Ausgabe an, wird aber dem Anfänger häufig bessere Dienste leisten, weil er kompliziertere Meßmethoden ausschließt, und weil er von jeder einzelnen Aufgabe resp. der Anleitung zu ihrer Ausführung, durch den Druck unterschieden, die physikalische Definition der anzustellenden Messung bringt. Durch diese Bereicherung ist dem Leitfaden ein wesentliches Hilfsmittel zugefügt, das den Lehrer entlastet und den Praktikanten befähigt, selbständiger als bisher zu arbeiten. Vor allem ist demjenigen damit gedient, der nicht selbst Physiker das Praktikum als Nebenstudium treibt, so dem Chemiker, dem Pharmazeuten, Mediziner und Mineralogen. Für alle diese war der ältere Leitfaden zu umfangreich und wissenschaftlich zu abstrakt. Dann sind bei den einzelnen Aufgaben zweckdienliche praktische Winke gegeben, z. B. bei der für Chemiker so überaus wichtigen Bestimmung der Dampfdichte. Ich erwähne hier nur die Methode ihrer Bestimmung nach Dumas, die in Chemikerkreisen ihrer Ausführungsschwierigkeit wegen ganz zu Unrecht recht wenig beliebt ist, während sie doch den größten Grad

der Genauigkeit bietet. Die Angaben zu ihrer Ausführung sind hier so vorzüglich, daß sie auch *dem* Praktikanten, der über bedeutendere manuelle Geschicklichkeit nicht verfügt, bei genauer Befolgung der Angaben, Schwierigkeiten nicht mehr bieten wird.

Raum- und Zeitmessungen sind auf das notwendigste Maß beschränkt; sie bieten ein mehr abstrakt physikalisches Interesse, dem in der größeren Ausgabe in weiterem Umfange genügt wird. Speziell für den Chemiker sind wiederum die Methoden der Bestimmung des Gefrier- und Siedepunktes genau behandelt. Der Mineraloge und Mediziner wird in dem Abschnitt über optische Messungen alles Wünschenswerte finden. Die folgenden Kapitel über Magnetismus und Elektrizität geben auch dem Techniker alle modernen Meßmethoden. Sie werden eingeleitet durch die Bestimmung der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus nach der klassischen Gaußschen Methode. Die Einleitung zu den elektrischen Messungen bildet eine kurze Rekapitulation der praktischen Einheiten und der zwei wichtigsten Gesetze, des Ohmschen und des Kirchhoffschen. Dann folgen die gebräuchlichen Strom-Erreger und praktische Winke über Stromverbindungen und über die Behandlung von Meßwiderständen.

Zunächst werden die Messungen an den hergebrachten physikalischen Instrumenten erläutert, dann mit den modernen technischen Apparaten. Hier scheinen mir die üblichen Instrumente zur Wechselstrom-Messung etwas zu kurz gekommen zu sein. Namentlich scheint mir das Hitzdrahtinstrument in der Ausführung von Hartmann und Braun einige Beachtung zu verdienen.

Den Schluß dieses Abschnittes bilden Messungen von Potentialen. Daran reihen sich die aus der größeren Ausgabe bekannten Tabellen.

Der kleine Leitfaden wird allen denen, und vor allem auch Nichtphysikern und darin liegt die größte Schwierigkeit der Aufgabe, die physikalische Messungen auszuführen haben, ein willkommenes Hilfsmittel sein, das sie aufs trefflichste, soweit ein Buch dies überhaupt vermag, durch ihr Arbeitsgebiet hindurchgeleitet.

Berlin. H. Boas.

K. T. Fischer. Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper mit einem Anhange über das absolute Maßsystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. Mit 55 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, 1902. B. G. Teubner. 68 S.

Der Verfasser gibt eine Beschreibung der Versuche, die er im Münchener Ferienkursus von 1898 zur Erläuterung der mechanischen Grundbegriffe vorgeführt hat. Die Figuren sind meist nach Lichtbildern mit eingezeichnetem Maßstabe gegeben. Aus dem reichen Inhalt des Büchleins sei nur weniges hervorgehoben. Die Fallgesetze (auch im widerstehenden Mittel) werden (nach Boys) aus den Aufzeichnungen einer Stimmgabel abgelesen. Die Trägheitsbahn zeigt der Verfasser an einer Kugel, die in der Berührenden ihrer anfänglichen Kreisbahn weiterrollt. Die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung wird mehrfach z. B. dadurch vorgeführt, daß die frei beweglichen Schienen eines Motorwagens letzterem entgegenlaufen. Die Masse wird nach Mach definiert, der Impuls durch eine Reihe von Versuchen als Zuwachs an Bewegungsgröße erläutert. Die Kompressibilität des Wassers

und die Drucke in Seifenblasen verschiedener Krümmung werden gemessen; auch eine neue Wellenmaschine, pendelnde Bleicylinder, die auf eine Gummischnur gereiht sind, wird beschrieben. Im Anhang sind die wichtigeren absoluten Maßeinheiten knapp abgeleitet; der Grund für die scheinbare Verschiedenheit der elektromagnetischen und der elektrostatischen Dimensionen ist erfreulich scharf betont.

Einige Stellen dürfen nicht ohne Widerspruch bleiben. Der Unabhängigkeitssatz (S. 24) und das Beharrungsgesetz (S. 15) werden unter Vernachlässigung der neueren Kritik als Erfahrungssätze behandelt; dementsprechend ist auch die Fassung des Beharrungssatzes unverständlich, da die Vorstellung eines „sich selbst überlassenen Körpers" unvollziehbar ist; die Galilei zugeschriebene Fassung des Gesetzes (S. 16) findet sich bei letzterem weder der Form, noch dem Inhalte nach. Daß es „unsinnig" sei, „den Begriff Masse in der Statik auch nur zu erwähnen" (S. 27), wird der nicht zugeben, der mit der Statik beginnen und doch den Begriff der Dichte geben möchte. Daß ein belasteter Tisch sich einbiegt, bis Druck und Gegendruck gleich geworden sind (S. 20 u. 28), „sieht" man doch nicht. Der Satz von der Äquivalenz kinetischer und potentieller Energie folgt aus „Definitionsgleichungen" (S. 33) nur für ein Massenteilchen, nicht für eine Massengruppe, wie sie bei der Fallmaschine zur Verwendung kommt. Der Versuch, welcher die Elastizität des Wassers zeigen soll, ist nicht zwingend, da dem Schüler die Volumänderung des Glases nur *ausgeredet* werden kann; wenn der Kompressibilitätsversuch, wie der Verfasser (wohl in Anlehnung an Mach) will, die Grundlage der Hydrostatik bilden sollte, so müßten auch die Elastizitätsgesetze der festen Körper *ihrer* Statik voraufgehen. Würde nicht die „Vorrichtung zur Erzeugung von sinusförmigen Schwingungen" (S. 57) durch Einführung einer Gelenkstange (statt des Schiebers G) wesentlich vereinfacht?

Der Oberbecksche Versuch über „Pendelresonanz" ist ein so verwickelter Vorgang, daß er Schülern kaum verständlich ist; auch ist er entbehrlich, weil auf akustische und elektrische Resonanzen gar nicht anwendbar; denn hier ist die Dämpfung der erzwungenen Schwingung die entscheidende Bedingung, die einen stationären Zustand des schwingenden Systems überhaupt erst herbeiführt.

Der Verfasser kann sich mit Recht der Klarheit seines Buches rühmen (S. 27). Seine unterrichtlichen Meinungen freilich verraten empiristische Einseitigkeit. Mit der Erklärung, daß „Erfahrung die Grundlage aller Erkenntnis" sei (die übrigens mit mehr Recht Baco von Verulam als Pestalozzi zugeschrieben wird), ist nichts gewonnen, so lange der Begriff der Erfahrung Mißdeutungen ausgesetzt ist. Selbständigkeit des Denkens, deren Pflege der Verfasser dem naturwissenschaftlichen Unterricht zuweist, ist Charaktersache und somit vom Denkinhalt, sei er nun grammatisch oder naturwissenschaftlich, unabhängig. Wer die hübschen experimentellen Darbietungen des Verfassers für seinen Unterricht benutzen will, wird sorglich auswählen müssen, damit neben der Kunst des Experiments auch die denkende Betrachtung der ungekünstelten Natur zu ihrem Rechte kommt.

Berlin. P. Johannesson.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

79. *1.* H. Schröter hat Math. Annal. **2**, 561 zum erstenmale gezeigt, daß von zwei Dreiecken abc und ABC, die *sechsfach* perspektivisch liegen, die Ecken abc des einen, sowie *eine* Ecke A des anderen Dreiecks willkürlich angenommen werden können, daß jedoch alsdann die beiden anderen Ecken B, C des zweiten Dreiecks eindeutig bestimmt sind.[1] Die hohe Bedeutung dieses Satzes für die *allgemeine* Theorie der Kurven dritter Ordnung geht aus dem von mir (zuerst in Math. Ann. 7, 455 und später in diesem Archiv (3), **1**, 252—254) bewiesenen Theorem hervor:

„Wenn zwei Dreiecke auf *sechsfache* Art perspektivisch liegen, so sind ihre 9 Schnittpunkte die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Kurve dritter Ordnung."

Aus dieser meiner Ergänzung des Schröterschen Satzes hat z. B. Herr H. Wiener durch die einfachsten geometrischen Hilfsmittel die wesentlichen, beim syzygischen Büschel auftretenden Gruppen kurz und elegant abgeleitet.

(Vgl. dessen Werk: Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen. Halle a. S. 1901.)

2. Jede Gerade ($u_x = 0$) trifft eine Kurve dritter Ordnung $f = 0$ in 3 Punkten, deren Tangentialpunkte bekanntlich in einer Geraden („Begleiterin") $\Lambda = 0$ liegen. Man vgl. über die Bildung der Gleichung $\Lambda = 0$ meine Arbeit in den Mathematischen Annalen **8**, 136 ff.

Bedeutet $\Delta = 0$ die Gleichung der Hesseschen Kurve von $f = 0$, so ist ebendaselbst bewiesen:

„Die Begleiterinnen der Geraden $u_x = 0$ in Bezug auf den Kurvenbüschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ bilden einen zu diesem projektivischen Strahlenbüschel: $\varkappa \Lambda + \lambda M = 0$."

3. Durch Verknüpfung der beiden Sätze in 1. und 2. entsteht folgende *Grundaufgabe:*

Es sei ein syzygisches Kurvenbüschel 3. Ordnung durch die Ecken a, b, c des einen reellen Wendepunktsdreiecks und die eine reelle Ecke des zweiten fundamentalen syzygischen Dreiecks gegeben. Wie konstruiert man den Punkt, in welchem sich die sämtlichen Begleiterinnen einer gegebenen Geraden schneiden?

1) Man vgl. die zusammenfassende Konstruktion Schröters l. c. p. 562 sowie mein Theorem in diesem Archiv **1**, 254.

Für den Kenner von **Plückers** „System der analytischen Geometrie" wird die Wichtigkeit dieser Konstruktion sofort einleuchtend, wenn die gegebene Gerade mit der unendlich fernen zusammenfällt.

Darmstadt, 28. Dezember 1902. S. Gundelfinger.

B. Lösungen.

Zu **5.** (Bd. I, S. 206) (E. **Lampe**). Wählt man P als Ursprung, so lautet die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy = 0,$$

wobei $a^2q^2 + b^2p^2 - a^2b^2 = 0$ sein muß. Um den Krümmungsradius in P leicht berechnen zu können, bedient man sich der folgenden bekannten Konstruktion: Man zieht die Sehne PQ, die zur Tangente PT in Bezug auf die Achsen symmetrisch ist, dann trifft das auf PQ errichtete Mittellot die auf PT senkrechte Ellipsennormale PN im Krümmungsmittelpunkte K. Da PT die Gleichung $b^2px + a^2qy = 0$ hat, so ist die Gleichung von PQ offenbar $b^2px - a^2qy = 0$; die Koordinaten von Q sind daher

$$x_Q = \frac{4a^2q^2p}{a^2q^2 + b^2p^2} = \frac{4q^2p}{b^2};$$

$$y_Q = \frac{4b^2p^2q}{a^2q^2 + b^2p^2} = \frac{4p^2q}{a^2}.$$

Mithin sind die Koordinaten von K

$$x_K = \frac{p(a^4q^2 + b^4p^2)}{a^4b^2};$$

$$y_K = \frac{q(a^4q^2 + b^4p^2)}{a^2b^4}.$$

Daher ist

$$R^2 = x_K^2 + y_K^2 = \frac{(a^4q^2 + b^4p^2)^3}{a^8b^8};$$

also ist $a^4q^2 + b^4p^2 = \sqrt[3]{a^8b^8R^2}$. Die Fußpunkte N_1, N_2, N_3 der drei Ellipsennormalen, die außer PK noch durch P laufen, liegen auf der **Apollonischen** Hyperbel

$$c^2xy - a^2qx + b^2py = 0,$$

wenn $c^2 = a^2 - b^2$ ist. Die Abscissen der drei Punkte genügen also der kubischen Gleichung

$$b^2x + \frac{a^6q^2x}{(c^2x + b^2p)^2} - 2b^2p - \frac{2a^4q^2}{c^2x + b^2p} = 0.$$

Hieraus folgt, daß

$$x_1x_2x_3 = \frac{2p(a^4q^2 + b^4p^2)}{c^4}$$

sein muß. Setzt man nun in der Gleichung der Ellipse und der Hyperbel $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, und eliminiert man r, so ergibt sich

$$\frac{a^2 - c^2\cos\varphi}{c^2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2b^2p\cos\varphi + 2a^2q\sin\varphi}{a^2q\cos\varphi - b^2p\sin\varphi}$$

oder

$$a^2c^2q\cos^3\varphi + a^2q(b^2 - c^2)\cos\varphi = b^2p\sin\varphi(a^2 + c^2\cos^2\varphi).$$

Durch Quadrieren erhält man eine Gleichung, die in Bezug auf $\cos^2\varphi$ kubisch ist. Bei nochmaliger Anwendung des Vietasatzes findet man

$$\cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\varphi_2 \cdot \cos^2\varphi_3 = \frac{a^4b^4p^2}{c^4(a^4q^2 + b^4p^2)}.$$

Daher ist

$$PN_1 \cdot PN_2 \cdot PN_3 = \frac{x_1x_2x_3}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3} = \frac{2\sqrt{(a^4q^2 + b^4p^2)^3}}{a^2b^2c^2} = \frac{2a^2b^2R}{c^2}.$$

Breslau, d. 26. Januar 1903. O. Gutsche.

Zu **49.** (Bd. III, S. 170) (W. Fr. Meyer). *Über die einem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsflächen zweiten Grades, insbesondere Kugeln.* Im folgenden gebe ich eine Lösung der von mir l. c. gestellten Aufgabe, in der Hoffnung, den Leser dadurch in den Stand zu setzen, mittels der angewandten Methoden ähnliche Sätze zu finden und zu beweisen. Ich mache besonders darauf aufmerksam, daß der Kern der ersten Betrachtung eine spezifische Darstellung des *Kugelkreises* ist.

Ein vorgelegtes Tetraeder T werde als Koordinatentetraeder benutzt, d. h. die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes P seien proportional den (mit richtigem Vorzeichen zu nehmenden) Abständen von den Ebenen des Tetraeders. Die Mittelpunkte der acht dem Tetraeder T *einbeschriebenen Kugeln* haben dann die Koordinaten ± 1; sie liegen auf den Ebenenpaaren, die die Flächenwinkel des Tetraeders halbieren:

$$(1) \qquad x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - x_4^2 = 0, \ \ldots; \ x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

und bilden demnach die Grundpunkte eines Netzes N von Flächen 2. Ordnung, nämlich:

$$(2) \qquad N \equiv \varkappa(x_1^2 - x_2^2) + \lambda(x_1^2 - x_3^2) + \mu(x_1^2 - x_4^2) = 0,$$

wo die $\varkappa$, λ, μ Parameter bedeuten.[1]

Ein Punktepaar $P = (x)$, $Q = (y)$ ist dann und nur dann *konjugiert* in Bezug auf das Netz N, wenn es in Bezug auf die drei Ebenenpaare (1) konjugiert ist, d. h., wenn die x_i den y_i umgekehrt proportional sind:

$$(3) \qquad \varrho x_i y_i = 1,$$

unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden.

---

1) Auch im folgenden dienen Buchstaben, wie $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ, ω stets zur Bezeichnung von Parametern.

Die Gleichung des *Kugelkreises*[1]) lautet in Ebenenkoordinaten (u):

$$(4)\qquad K \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - 2u_1u_2 \cos\alpha_{12} - 2u_1u_3 \cos\alpha_{13} \\ - 2u_1u_4 \cos\alpha_{14} - 2u_2u_3 \cos\alpha_{23} - 2u_2u_4 \cos\alpha_{24} - 2u_3u_4 \cos\alpha_{34} = 0,$$

wo die α_{ik} die Innenwinkel bedeuten, die je zwei der Ebenen von T miteinander bilden.

Die Gleichung des Punktepaares P, Q (3) ist:

$$(5)\quad u_x u_y \equiv (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4)(u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4) = 0.$$

In der Schar von Flächen 2. Klasse:

$$(6)\qquad \nu u_x u_y - K = 0$$

gibt es eine und nur eine, nämlich dem Parameterwerte $\nu = \varrho$ entsprechende Fläche Φ:

$$(7)\qquad \Phi \equiv \varrho u_x u_y - K = 0,$$

in deren Gleichung wegen (3) die Quadrate der u_i herausfallen, die also dem Tetraeder T *einbeschrieben* ist.

Sei umgekehrt Φ irgend eine dem Tetraeder T einbeschriebene Fläche 2. Klasse mit der besonderen Eigenschaft, daß sich in der Schar $\omega\Phi + K = 0$, etwa für den Parameterwert $\omega = \omega_1$, ein Punktepaar (x), (y) befinden soll, so gilt die Identität:

$$(8)\qquad \omega_1 \Phi + K \equiv \pi u_x u_y,$$

wo π eine von Null verschiedene Konstante bezeichnet. Die Identität (8) kann aber nur so befriedigt werden, daß:

$$(9)\qquad \pi x_i y_i = 1$$

wird, d. h. mit Rücksicht auf (3), das Punktepaar (x), (y) *ist dann bezüglich des Netzes N konjugiert.*

Es erübrigt nur noch, auf elementarem Wege zu zeigen, daß eine, aus irgend einem Punktepaar PQ, wo P, Q zwei beliebige Raumpunkte seien, und dem Kugelkreise K zusammengesetzte lineare Schar von Flächen 2. Klasse nichts anderes ist, als eine Schar *konfokaler Rotationsflächen 2. Ordnung*, mit P, Q als den beiden festen Brennpunkten, und daß umgekehrt irgend eine Rotationsfläche 2. Ordnung stets aufgefaßt werden kann als Individuum einer Schar, der einerseits der Kugelkreis K, andererseits das aus den beiden festen Brennpunkten der Fläche bestehende Punktepaar angehört.

Rückt im besondern der eine der beiden Punkte P, Q in bestimmter Richtung ins Unendliche, so tritt der Grenzfall einer Schar *konfokaler Rotationsparaboloide* ein, und umgekehrt läßt sich irgend ein Rotationsparaboloid stets auffassen als Individuum einer Schar, der einerseits der

1) Vergl. etwa das Lehrbuch von Salmon-Fiedler oder das von Clebsch-Lindemann über Raumgeometrie. Man gelangt zu der Darstellung (4) am einfachsten, wenn man die Bedingung aufstellt, daß eine Ebene auf sich selbst senkrecht steht.

Kugelkreis, andererseits das aus dem festen Brennpunkte der Fläche und dem unendlichen fernen Punkte ihrer Achse bestehende Punktepaar angehört.

Indem wir jetzt mit gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z und zugehörigen Ebenenkoordinaten u, v, w operieren, lautet die Gleichung des Kugelkreises K:

$$K \equiv u^2 + v^2 + w^2 = 0. \tag{10}$$

Das Koordinatensystem werde so gelegt, daß sich das vorgelegte Punktepaar PQ auf der x-Achse befindet, so daß der Anfangspunkt O die Strecke $PQ = 2c$ halbiert. Dann wird die Gleichung des Punktepaares P, Q:

$$u^2 e^2 - 1 = 0, \tag{11}$$

und die Gleichung der aus den Flächen 2. Klasse (10), (11) zusammengesetzten Schar:

$$u^2 e^2 - 1 + \lambda (u^2 + v^2 + w^2) = 0. \tag{12}$$

Um die Gleichung dieser Schar in Punktkoordinaten zu schreiben, berücksichtige man, daß die Koordinaten x, y, z des Berührungspunktes einer Tangentialebene (u, v, w) von (12) die Werte haben:

$$x = u(e^2 + \lambda), \quad y = \lambda v, \quad z = \lambda w, \tag{13}$$

woraus unmittelbar folgt, daß die Flächenschar (12) in Punktkoordinaten die Gleichung besitzt:

$$\frac{x^2}{e^2 + \lambda} + \frac{y^2 + z^2}{\lambda} = 1. \tag{14}$$

Diese Flächenschar (14) entsteht durch Rotation der Schar konfokaler Kegelschnitte mit den beiden festen Brennpunkten P, Q:

$$\frac{x^2}{e^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1. \tag{15}$$

um die x-Achse. Umgekehrt läßt sich irgend eine Rotationsfläche 2. Ordnung, die einen Mittelpunkt besitzt, also ein Rotationsellipsoid oder -hyperboloid, erzeugen durch Rotation des Mittelpunktskegelschnittes:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{16}$$

um die x-Achse. Ist e die lineare Exzentrizität, so hat man, je nachdem (16) eine Ellipse oder Hyperbel darstellt,

$$e^2 = a^2 \mp b^2, \tag{17}$$

und die vorgelegte Rotationsfläche ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{e^2 \pm b^2} + \frac{y^2 + z^2}{\pm b^2} = 1 \tag{18}$$

dargestellt. Diese geht aber aus (14) hervor, indem man dem Parameter λ den Wert $\pm b^2$ erteilt; somit wird nach Obigem ihre Gleichung in Ebenenkoordinaten:

$$(u^2 e^2 - 1) \pm b^2 (u^2 + v^2 + w^2) = 0. \tag{19}$$

Die Brennpunkte P, Q $(u^2e^2 - 1 = 0)$ der Fläche (19) sind natürlich nur reell bei Rotation des Kegelschnittes um seine Hauptachse.

Analog erledigt sich der Grenzfall des Rotationsparaboloides.

Der eine der beiden Punkte P, Q sei der unendlich ferne Punkt der x-Achse, während der andere, ebenfalls auf der x-Achse, die Koordinate $x = +\frac{1}{2}p$ besitze, so daß die Gleichung des Paares wird:

$$u(up - 2) = 0. \tag{20}$$

Dieses Paar bildet mit dem Kugelkreis die Schar von Flächen 2. Klasse:

$$-u(up - 2) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) \equiv u^2(\lambda - p) + \lambda(v^2 + w^2) + 2u = 0. \tag{21}$$

Dann sind die Koordinaten u, v, w einer Tangentialebene einer Fläche der Schar (21) mit den Koordinaten x, y, z ihres Berührungspunktes durch die Relationen verbunden:

$$-ux = u(\lambda - p) + 1 \text{ d. i. } u = \frac{-1}{\lambda + x - p}, \quad -uy = v\lambda, \quad -uz = w\lambda \tag{22}$$

Somit wird die Gleichung der Schar (21) in Punktkoordinaten:

$$y^2 + z^2 - 2\lambda x - \lambda(\lambda - p) = 0. \tag{23}$$

Diese Schar entsteht aber durch Rotation der Schar:

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda(\lambda - p) = 2\lambda(x - \tfrac{1}{2}p) + \lambda^2 \tag{24}$$

um die x-Achse. Da die Gleichung (24) die Schar konfokaler Parabeln mit dem festen Brennpunkt $x = \frac{1}{2}p$, $y = 0$ und der x-Achse als Achse darstellt, so ist (23) oder (21) die Gleichung der Schar konfokaler Rotationsparaboloide mit dem festen Brennpunkt $x = \frac{1}{2}p$, $y = 0$, $z = 0$ und der x-Achse als Achse.

Ist endlich umgekehrt irgend ein Rotationsparaboloid vorgelegt, so läßt sich dessen Gleichung in der Scheitelform ansetzen:

$$y^2 + z^2 = 2px. \tag{25}$$

Dann ist die x-Achse die Achse der Fläche (25), und ihr Brennpunkt hat die Koordinaten $x = \frac{1}{2}p$, $y = 0$, $z = 0$.

Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche und den Koordinaten u, v, w seiner Tangentialebene bestehen die Relationen:

$$ux = -1, \quad pxv = y, \quad pxw = z, \tag{26}$$

mithin wird die Gleichung der Fläche (25) in Ebenenkoordinaten:

$$p(v^2 + w^2) + 2u \equiv p(u^2 + v^2 + w^2) - u(up - 2) = 0, \tag{27}$$

d. h. das Rotationsparaboloid (25) gehört der Schar (21) an; man hat nur dem Parameter λ den Wert p beizulegen.

Damit ist der in Rede stehende Satz völlig bewiesen. Er möge mit besonderer Berücksichtigung des Reellen nochmals ausgesprochen werden:

Vorgelegt sei ein reelles Tetraeder T. Die Mittelpunkte der acht dem Tetraeder einbeschriebenen Kugeln sind reell und bilden die Grundpunkte eines reellen Netzes N von Flächen 2. Ordnung. Sind dann zwei reelle

Punkte P, Q konjugiert[1]) *in Bezug auf das Netz N, so sind sie die reellen Brennpunkte einer reellen, dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung und umgekehrt.*

Fallen im besondern die beiden Punkte P, Q in einen, P, zusammen, so wird die zugehörige Rotationsfläche eine Kugel mit P als Mittelpunkt. In der Tat sind die acht Mittelpunkte der T einbeschriebenen Kugeln die einzigen Punkte, die bezüglich N sich selbst konjugiert sind. Betrachtet man ferner alle Punktepaare P, Q, von denen ein Punkt im Unendlichen liegt, so beschreibt der andere diejenige Fläche, die vermöge (3) der unendlich fernen Ebene entspricht. Da die Gleichung der letzteren ist:

$$x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3 + x_4 \Delta_4 = 0, \tag{28}$$

wo die Δ_i die Inhalte der vier das Tetraeder T begrenzenden Dreiecke sind, so ist die Gleichung der fraglichen Fläche:

$$\frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} + \frac{\Delta_4}{x_4} = 0; \tag{29}$$

letztere ist also eine Fläche 3. Ordnung F_3 mit vier Knotenpunkten in den Ecken von T:

Der Ort der Brennpunkte der einem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsparaboloide ist die Fläche 3. Ordnung (29).[2])

Für diese Fläche lassen sich die bekannten Sätze über die auf einer beliebigen Fläche 3. Ordnung gelegenen Kurven spezialisieren. So gibt es auf ihr, abgesehen von den Kanten des Tetraeders T, noch drei und nur drei in einer Ebene[3]) gelegene Geraden, von denen jede zwei Gegenkanten

---

1) Elementar ausgedrückt, heißt das, die Punkte P, Q werden von jeder Tetraederkante durch zwei Ebenen projiziert, die gegen die Halbierungsebenen des bezüglichen Flächenwinkels gleich geneigt sind.

2) Umgekehrt besitzt jede F mit vier Knotenpunkten die Eigenschaft: Ist P ein beliebiger Punkt der F_3 und F_2 eine, dem Tetraeder der Knotenpunkte einbeschriebene Rotationsfläche 2. Ordnung, deren einer Brennpunkt P ist, so beschreibt der andere Brennpunkt Q eine Ebene, wenn P die F_3 durchläuft. Denn die Gleichung der F_3 ist: $\frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3} + \frac{u_4}{x_4} = 0$. Und da die drei Geraden dieser F_3 in der Ebene $\frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3} + \frac{u_4}{x_4} = 0$ liegen, so ergibt sich unmittelbar der Satz:

„Gegeben sei ein Tetraeder T und eine beliebige Ebene E. Das von E aus T ausgeschnittene Vierseit, besitzt ein Hauptdreieck, dessen Seiten g_1, g_2, g_3 seien. Ist P irgend ein Punkt einer dieser drei Geraden, etwa von g_1, ferner F eine, T einbeschriebene Rotationsfläche 2. Ordnung, deren einer Brennpunkt P ist, so beschreibt, wenn P die Gerade g_1 durchläuft, der zweite Brennpunkt Q von F ebenfalls eine Gerade, h_1. Diese drei Geraden h_1, h_2, h_3 liegen in einer Ebene H, deren Schnittpunkte mit den Kanten von T zu den entsprechenden Schnittpunkten mit der Ebene E harmonisch liegen bezüglich der beiden, auf der jeweiligen Kante gelegenen Punkte, die von den Halbierungsebenen des gegenüberliegenden Flächenwinkels ausgeschnitten werden.

3) Die Gleichung dieser Ebene ist: $\frac{x_1}{\Delta_1} + \frac{x_2}{\Delta_2} + \frac{x_3}{\Delta_3} + \frac{x_4}{\Delta_4} = 0$. Die Treffpunkte der drei Geraden auf den Kanten von T halbieren offenbar stets die Strecke der beiden Punkte, in denen die bez. Kante von den Halbierungsebenen des Gegen-Flächenwinkels getroffen wird.

von T trifft: Jeder Punkt einer dieser drei Geraden ist also der Brennpunkt eines T einbeschriebenen Rotationsparaboloides u. s. f.

Der im obigen dargelegte Satz über das Tetraeder ist ersichtlich die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über das Dreieck. Umgekehrt hat es keine Schwierigkeit, ihn auf den Raum von n Dimensionen auszudehnen.

Bei aufmerksamer Betrachtung des oben bewiesenen Satzes bemerkt man, daß die eigentliche Quelle desselben in der *Apolaritätstheorie* liegt. In der Tat spielt der Kugelkreis K beim Beweise *nur die Rolle irgend einer* (nicht notwendig ausgearteten) *zum Flächennetz* $N(2)$ *apolaren Fläche 2. Klasse.*

Die Schar, die sich aus einer solchen Fläche A und einem (bezüglich N konjugierten) Punktepaar P, Q[1]) (5) linear zusammensetzt, enthält eine (und im allgemeinen nur eine) dem Tetraeder T einbeschriebene Fläche 2. Klasse Φ; umgekehrt, enthält eine aus einer Fläche A und einer Fläche Φ gebildete lineare Schar ein Punktepaar, so ist dieses Punktepaar konjugiert bezüglich des Netzes N.

Endlich ist *jede* Fläche der Schar, die sich aus einem (bez. N konjugierten) Punktepaar P, Q[1]) und aus einer Fläche Φ zusammensetzt, eine Fläche A.

Bei dieser Verallgemeinerung sind auch die dualistischen Sätze ohne weiteres auszusprechen. Es mag genügen, zu dem Behuf die geometrische Bedeutung der zu (3) dualistischen Transformation:

$$\sigma u_i v_i = 1, \tag{3'}$$

zu erläutern, wo σ wiederum ein Proportionalitätsfaktor und die u_i, v_i Koordinaten zweier Ebenen sind.

Zwei vermöge (3') zugeordnete Ebenen (u), (v) sind konjugiert in Bezug auf die Scharschar N von Flächen 2. Klasse:

$$N \equiv \varkappa' (u_1^2 - u_2^2) + \lambda' (u_1^2 - u_3^2) + \mu' (u_1^2 - u_4^2) = 0, \tag{2'}$$

der die Punktepaare:

$$\begin{cases} u_1^2 - u_2^2 = 0, & u_1^2 - u_3^2 = 0, & u_1^2 - u_4^2 = 0, \\ u_2^2 - u_3^2 = 0, & u_2^2 - u_4^2 = 0, & u_3^2 - u_4^2 = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

---

1) Dieses Punktepaar P, Q ist in dem ersten und dritten der angeführten Sätze ersetzbar durch eine bez. N konjugierte Fläche 2. Klasse B. Und da die Schar $B + \lambda K = 0$ nichts anderes ist als die Schar der zu B konfokalen Flächen, so gilt unmittelbar:

„Ist B eine Fläche 2. Klasse, die konjugiert ist zum Flächennetze N eines Tetraeders T, d. h. für die die von irgend einer Kante von T an sie gehenden Tangentialebenen stets gleich geneigt sind gegen die Halbierungsebenen des zugehörigen Flächenwinkels, so geht diejenige Fläche der zu B konfokalen Schar, die durch irgend eine Ecke von T geht, auch durch die drei andern Ecken von T" und:

„Ist Φ irgend eine einem Tetraeder T einbeschriebene Fläche 2. Klasse, so ist jede Fläche der zu Φ konfokalen Schar konjugiert zum Flächennetze N von T, d. h. die von irgend einer Kante von T an die Fläche gehenden Tangentialebenen sind gleichgeneigt gegen die Halbierungsebenen des zugehörigen Flächenwinkels. Die sämtlichen Paare der so entstehenden Tangentialebenen bilden gerade die Involution, deren Doppelelemente die fraglichen Halbierungsebenen sind."

angehören. Diese sechs Punktepaare sind offenbar die auf den Kanten von T von den Halbierungsebenen (1) der gegenüberliegenden Flächenwinkel ausgeschnittenen Punktepaare.

Die in der Transformation (3′) sich selbst entsprechenden Ebenen („Einheitsebenen") haben zu Koordinaten die positive oder negative Einheit, d. h. ihre Gleichungen sind:

$$(30') \quad \begin{cases} E_1 \equiv \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, & E_5 \equiv \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ E_2 \equiv \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, & E_6 \equiv \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ E_3 \equiv \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, & E_7 \equiv \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ E_4 \equiv - x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0; & E_8 \equiv - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Vertauscht man hier die x mit den u, so sind die entsprechenden Gleichungen:

$$(30) \quad \begin{cases} M_1 \equiv \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, & M_5 \equiv \quad u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0, \\ M_2 \equiv \quad u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0, & M_6 \equiv \quad u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0, \\ M_3 \equiv \quad u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0, & M_7 \equiv \quad u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0, \\ M_4 \equiv - u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0; & M_8 \equiv - u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der acht Mittelpunkte M der T einbeschriebenen Kugeln, oder auch die der acht „Einheitspunkte" der Transformation (3). Und zwar sind genauer die vier Kugeln mit den Mittelpunkten M_5, M_6, M_7, M_8 die vier „Ankugeln" von T, die je eine T-Ebene von außen, die drei anderen von innen berühren, hingegen von den vier anderen Kugeln mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 die erste die „Inkugel" von T, die übrigen die in den Scheitelräumen der Flächenwinkel von T gelegenen.

Die beiden Ebenenquadrupel (30′) $E_1 \ldots E_4$; $E_5 \ldots E_8$ bilden zwei Tetraeder T_1, T_2, die offenbar auf vierfache Art perspektiv liegen; denn aus den Gleichungen (30′) geht sofort hervor, daß jede Ebene des einen Quadrupels die vier Ebenen des andern Quadrupels in vier Geraden trifft, die in einer Ebene von T liegen, und daß auf diese Weise gerade die vier Ebenen von T erschöpft werden. Diese Beziehungen der beiden Tetraeder T_1, T_2 (30′) zu T werden kürzer durch die eine Identität zusammengefaßt:

$$(31) \qquad T_1 - T_2 \equiv - 48\, x_1 x_2 x_3 x_4,$$

d. h. die drei Tetraeder T, T_1, T_2 bilden ein Tripel „desmischer" Tetraeder.

Genau das Dualistische gilt von den beiden Tetraedern, die aus den beiden Quadrupeln $M_1 \ldots M_4$; $M_5 \ldots M_8$ der Punkte (30) gebildet werden. *Aber diese beiden Tetraeder sind keine anderen als* T_1, T_2. Denn jede Ebene des ersten Quadrupels (30′) geht gerade durch je drei der Punkte des ersten Quadrupels (30), und das nämliche gilt für die zweiten Quadrupel (30′), (30).

Es ergibt sich somit der Satz:

„Die Mittelpunkte der acht einem Tetraeder T einbeschriebenen Kugeln lassen sich, und zwar nur auf eine Art, zu zwei Tetradern T_1, T_2 *zusammenfassen, die mit T in desmischer Lage sind. Während die Ecken der beiden Tetraeder* T_1, T_2 *die Einheitspunkte der Transformation* (3) *sind, sind die*

Ebenen der beiden Tetraeder T_1, T_2 *die Einheitsebenen der Transformation* (3′).

Und während irgend zwei durch die Transformation (3) *einander zugeordnete Punkte von jeder Kante des Tetraeders* T *durch ein Ebenenpaar projiziert werden, das harmonisch ist zu dem Paar von Halbierungsebenen des bezüglichen Flächenwinkels, schneiden irgend zwei durch die Transformation* (3′) *einander zugeordnete Ebenen jede Kante von* T *in einem Punktepaar, das harmonisch ist zu dem Punktepaar, in dem die Kante von den Halbierungsebenen des gegenüberliegenden Flächenwinkels von* T *getroffen wird.*"

Endlich ergibt sich auf demselben Wege, daß die drei Tetraeder T, T_1, T_2 auch insofern ein symmetrisches Verhalten zeigen, als immer die acht Ecken je zweier derselben die Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung sind, und die bezüglich des Netzes konjugierten Raumpunkte eine Transformation von der Art (3) involvieren, deren Fundamentaltetraeder eben das dritte der obigen Tetraeder ist (sodaß also jede Ecke desselben bez. jeder Fläche des Netzes der Pol der Gegenebene ist).

Königsberg i. P. W. F. Meyer.

Zu **74.** (Bd. IV, S. 350) (G. Olitsch). B kann unter folgender Bedingung nie gewinnen: Wenn $n-1$ die höchste Zahl der Gegenstände bedeutet, die jeder wegnehmen darf, so hat A darauf zu achten, daß zuletzt n Dinge liegen bleiben; dies erreicht er mit Sicherheit dadurch, daß der vorige Rest $2n$ ist; geht man in dieser Weise rückwärts, so ergibt sich, daß A zu Anfang r Gegenstände wegzunehmen hat, die durch die Gleichung

$$s \equiv r \,(\text{mod.}\, n)$$

bestimmt sind.

Es ist nicht nötig, daß s eine Primzahl darstellt. Es genügt, daß n nicht ohne Rest in s enthalten ist. Das Verfahren ist eine Abart des zu meiner Zeit in Studentenkreisen oft geübten Spieles, durch fortwährende Addition einer Zahl innerhalb des Intervalles 1 bis 10 zuerst die Zahl 100 zu erreichen.

Sagan. P. Kokott.

---

2. Kleinere Notizen.

Über die Darstellung der Zahlen einiger algebraischen Körper als Summen von Quadraten aus Zahlen des Körpers.

Es bedeute P den absoluten Rationalitätsbereich. Dann ist nach Fermat jede ganze positive Zahl

$$z = \sum_{\nu=1}^{4} \zeta_\nu^2. \tag{1}$$

Dasselbe gilt offenbar für jede gebrochene positive Zahl:

$$\frac{p}{q} = pq\,\frac{1}{q^2} = \frac{\pi}{q^2} = \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\pi_\nu}{q}\right)^2. \tag{2}$$

Es ist nun merkwürdig, daß in $P(i)$, das heißt dem durch Adjunktion von

$$i = \left|\sqrt{-1}\right|$$

zu P entstehenden Körper *alle* Zahlen sich als Summe von nur zwei Quadraten auf unendlich mannigfache Art darstellen lassen:

$$a + bi = \left(\frac{ac}{b} + \frac{b}{4c} + ci\right)^2 + \left(c - \frac{ac}{b}\,i + \frac{b}{4c}\,i\right)^2, \tag{3}$$

wo c eine beliebige Zahl aus P bedeutet. Falls $b = 0$, $a < 0$, ist:

$$-a = \sum_{\nu=1}^{4} (\alpha_\nu i)^2. \tag{4}$$

Es werde jetzt zu P der reelle Wert von $\sqrt[m]{z}$, wo z positiv-rational sei, adjungiert. Falls dann $m = 2\mu + 1$, so kann man jede Zahl

$$k = \sum_{\nu=0}^{2\mu} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \sqrt[2\mu+1]{z^\nu}\,\Big|,$$

in der alle $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ und natürlich rational sind, in $8\mu + 4$ Quadrate zerlegen auf diese Art:

$$\sqrt[2\mu+1]{z^\nu}\,\Big| = z^\nu \left\{\frac{1}{z^\nu} \sqrt[2\mu+1]{z^{\nu(\mu+1)}}\,\Big|\right\}^2,$$

$$k = \sum_\nu \alpha_\nu \beta_\nu z^\nu \left\{\frac{1}{\beta_\nu z^\nu} \sqrt[2\mu+1]{z^{\nu(\mu+1)}}\,\Big|\right\}^2 = \sum_\nu \sum_{\varrho=1}^{4} \left\{\frac{\gamma_{\nu,\varrho}}{\beta_\nu z^\nu} \sqrt[2\mu+1]{z^{\nu(\mu+1)}}\,\Big|\right\}^2. \tag{5}$$

Hierbei ist

$$\alpha_\nu \beta_\nu z^\nu = \sum_\varrho \gamma_{\nu,\varrho}^2$$

gesetzt worden.

Diese Darstellung ist *nicht* möglich, wenn $m = 2\mu$ grade ist. Z. B. in $P(\sqrt{2})$ ist:

$$\sqrt{2}\,| \neq \sum_\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu \sqrt{2})^2,$$

denn es müßte

$$\sum_\nu \alpha_\nu^2 + 2\beta_\nu^2 = 0$$

sein, was unmöglich ist.

Potsdam, am 16. August 1902. Otto Meissner.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN. Redigiert von AUGUST HELLER. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8 —

——— 18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh.

Bolyai de Bolya, Joannes, Libellus post saeculum quam Anno MDCCCII A. D. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est. Ad celebrandam memoriam eius immortalem. Ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae sculptatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 154 S.] gr. 8. 1902. geh. ℳ 6.—

Braunmühl, Professor Dr. **A. von,** Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 10.—

Brüsch, Dr. phil. **Wilhelm,** Oberlehrer, Grundriß der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen im Text. [XI u. 168 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 3 —

Bucherer, Dr. **A. H.,** Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. ℳ 2.40.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. ℳ 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. ℳ 7.60.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. ℳ 14. —

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Föppl, Prof. Dr. **Aug.,** Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII. u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. [XIV u. 456 S.] 1899. geb. n. ℳ 12.—

Gleichen, Dr. **A.,** Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. (Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.) Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN, HERMANN GRASSMANN der Jüngere, GEORG SCHEFFERS herausgegeben von FRIEDRICH ENGEL. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geb. n. ℳ 14. —

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—

Hammer, Dr. **E.,** sechsstellige Tafel der Werte $\log^{10}\frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10. (Vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 3.60.

*

Hensel, K., und **G. Landsberg,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr 8 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

Krazer, Dr. **Adolf,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinw. geb.

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Dr. **Gino,** ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr 8. 1902. In Leinw. geb n. ℳ 20.—

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 9 —

Perry, Dr. **John,** F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 12.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Schreber, Dr. **K.,** die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. Erster Jahrgang. Sonderabdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. II. Band. 3. u. 4. (Doppel-) Heft und III. Band. Heft 1—4. [IV u. 66 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 2.40.

Stolz, O. und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik. Zweite umgearbeitete Auflage ausgewählter Abschnitte der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Band IV. [XI u. 402 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 10.60.

Study, Professor Dr. **E.,** Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

P. Appell, M. Bauer, O. Biermann, Fr. Daniëls, E. Eckhardt, F. Fitting, M. Großmann, S. Gundelfinger, R. Güntsche, St. Haller, Haskell, G. Hessenberg, C. Heumann, E. Jahnke, Ed. Janisch, F. Jung, S. Kantor, L. Klug, C. Köhler, P. Kokott, J. Kraus, H. Kühne, E. Lampe, Lerch, H. Liebmann, R. v. Lilienthal, F. London, Ph. Maennchen, L. Maurer, G. Meissner, E. Meyer, Fr. Meyer, P. Milau, E. Netto, N. Nielsen, W. Pexider, E. Rehfeld, L. Saalschütz, L. Schlesinger, Schoute, D. Sintzow, P. Stäckel, H. Stahl, W. Stegemann, J. Sudnicka, A. Tachauer, W. Thienemann, W. Velten, E. v. Weber, J. Wellstein, A. Wendler, Wilson, G. Zemplén.



ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN　**W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR.　**E. JAHNKE** IN BERLIN.

5. BAND. 3. UND 4. (DOPPEL-) HEFT.

MIT 8 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 24. JUNI 1903.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Straße 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air;

Par M. Paul Appell à Paris.

1. — Lorsqu'on étudie le mouvement du centre de gravité d'un projectile sphérique pesant dans l'air, on admet ordinairement que la résistance de l'air se traduit par une force R appliquée au centre de gravité, dirigée en sens contraire de la vitesse v de ce point et fonction de cette vitesse. En désignant par m la masse du projectile, par g l'accélération due à la pesanteur, nous poserons

$$R = mg\varphi(v),$$

φ étant une fonction positive et croissante de la quantité positive v. Sans discuter ici la valeur de cette hypothèse, nous indiquerons une méthode permettant de ramener l'intégration des équations différentielles du mouvement à l'intégration d'une équation qui a été étudiée en détail par divers auteurs.

Rappelons d'abord brièvement à quelle équation différentielle on ramène ordinairement le problème. Prenons pour origine O la position initiale du centre, pour plan xOy le plan vertical passant par la vitesse initiale Ov_0, pour axe Oy la verticale ascendante, pour axe Ox l'horizontale faisant avec Ov_0 un angle aigu. Appelons à un instant t, x et y les coordonnées du centre, v la vitesse, α l'angle que fait la vitesse avec Ox, cet angle étant compté positivement de Ox vers Oy. On a alors

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\alpha;$$

le centre de gravité se meut comme un point de masse m sollicité par le poids mg ayant pour projections sur les axes 0 et $-mg$, et par la résistance $R = mg\varphi(v)$ ayant pour projections $-mg\varphi(v)\cos\alpha$ et $-mg\varphi(v)\sin\alpha$. Les équations du mouvement sont donc

$$m\frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = -mg\varphi(v)\cos\alpha,$$

$$m\frac{d(v\sin\alpha)}{dt} = -mg - mg\varphi(v)\sin\alpha.$$

En divisant membre à membre, on a l'équation

$$\frac{d(v\sin\alpha)}{d(v\cos\alpha)} = \frac{1+\varphi(v)\sin\alpha}{\varphi(v)\cos\alpha}$$

qui devient, après réductions,

$$\cos\alpha\, dv = v[\sin\alpha + \varphi(v)]\, d\alpha. \tag{1}$$

Telle est l'équation différentielle classique liant v et α. Une fois cette équation intégrée, on achève le problème par des quadratures. (Voyez, par exemple, mon Traité de mécanique, tome I).

2. — Nous allons montrer que cette équation se ramène à la forme

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3 \tag{2}$$

que j'ai étudiée en détail dans un Mémoire «*Sur les invariants de quelques équations différentielles*» inséré au Journal de Mathématiques de M. Jordan (4ième Série, t. V, 1889). Cette équation a également été étudiée par M. Roger Liouville (Comptes Rendus, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887), par M. Painlevé (Annales de l'Ecole Normale 3ième Série, t. 8, 1891) et, dans des cas particuliers, par M. Elliot (Annales de l'Ecole Normale, 3ième Série, t. 7, 1890). Ces diverses recherches se trouvent résumées et complétées dans un exposé systématique intitulé «*Beitrag zur Integration der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$» von Richard Güntsche (Wissenschaftliche Beilage zum Programm der dritten Realschule zu Berlin, Ostern 1893, Programm Nr. 120, Gärtners Verlagsbuchhandlung).

Chaque cas d'intégrabilité de cette équation (2) donnera ainsi un cas d'intégrabilité du problème balistique, et inversement.

3. — Pour transformer l'équation (1), prenons v comme variable indépendante et remplaçons α par une variable z définie par la relation

$$v[\sin\alpha + \varphi(v)] = \frac{1}{z}, \tag{3}$$

qui donne en différentiant

$$v\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{dz}{z^2} - [\sin\alpha + \varphi(v) + v\varphi'(v)]\, dv.$$

L'équation (1) devient alors, si l'on y remplace $d\alpha$ par la valeur ci-dessus et $\sin\alpha + \varphi(v)$ par $\frac{1}{vz}$:

$$\cos^2\alpha\, dv = -\frac{1}{vz}\left[\frac{dz}{z^2} + \frac{dv}{vz} + v\varphi'(v)\, dv\right].$$

Mais, comme

$$\sin \alpha = \frac{1}{vz} - \varphi(v),$$

on a

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{v^2 z^2} + \frac{2\varphi(v)}{vz} - \varphi^2(v).$$

En remplaçant et réduisant, on a enfin l'équation

$$\frac{dz}{dv} = v[\varphi^2(v) - 1]z^3 - [2\varphi(v) + v\varphi'(v)]z^2 \tag{4}$$

qui est bien du type annoncé (2) où

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad 3c_2 = -[2\varphi(v) + v\varphi'(v)], \quad c_3 = v[\varphi^2(v) - 1].$$

En appliquant alors à cette équation les méthodes employées dans les Mémoires cités plus haut, on obtiendra des cas d'intégrabilité de cette équation (4).

Inversement les cas d'intégrabilité de l'équation (1), tels que le cas classique de Dalembert et de Legendre

$$\varphi(v) = a + bv^n,$$

ou les cas signalés par M. F. Siacci dans les Comptes Rendus (1901, t. 132 p. 1175, t. 133, p. 381) fourniront des cas d'intégrabilité des équations du type (2). Il y aurait évidemment interêt à poursuivre, aussi loin que possible, ce rapprochement entre deux théories qui, jusqu'ici, avaient été développées indépendamment l'une de l'autre.

Paris, 15 mars 1903.

Zur Theorie der Mac-Laurinschen Summenformel.

Von M. Krause in Dresden.

Die unter dem Namen der Mac-Laurinschen oder wohl auch der Eulerschen Summenformel bekannte Formel setzt die Theorie gewisser allgemeiner Reihen und Integrale in einen Zusammenhang mit der Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen. Sie hat sich für eine Anzahl von Reihensummierungen, sowie für die Integraltheorie und die Theorie der Bernoullischen Zahlen von Bedeutung gezeigt.

Es möge in Bezug hierauf u. a. auf das Kompendium der höheren Analysis von Schlömilch, die Vorlesungen über Bernoullische Zahlen von Saalschütz, sowie auf die Differenzenrechnung von Markoff verwiesen werden. Neben den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen sind nun allgemeinere Zahlen in die Analysis eingeführt und untersucht worden, welche zu den ersteren etwa in dem Verhältnis stehen, wie die höheren Differentialquotienten einer Funktion in einem beliebigen Punkte zu den entsprechenden Differentialquotienten im Nullpunkte, und demgemäß einen willkürlichen Parameter in sich enthalten. Diese Größen sind mit dem Namen der ultra-Bernoullischen Zahlen bezeichnet worden.[1] In ähnlicher Weise sind ultra-Bernoullische Funktionen eingeführt worden. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß im Gebiete dieser allgemeineren Größen eine ähnliche Formel, wie die Mac-Laurinsche Summenformel aufgestellt werden kann, welche für die Summierung gewisser Reihen und für die Theorie der ultra-Bernoullischen Zahlen von Bedeutung ist.

1. *Aufstellung einer Summenformel im Gebiete der ultra-Bernoullischen Zahlen und Funktionen.* — Als Ausgangspunkt der Betrachtung dient die bekannte Formel:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \frac{h f'(x)}{1} + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) \\ + \frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+ht)\,dt. \end{aligned}$$

Wir denken uns beide Seiten dieser Gleichung mit einer Größe ε multipliziert, die alle endlichen Werte mit Ausnahme der Einheit annehmen kann, dann erhalten wir die Beziehung:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon f(x+h) - f(x) = (\varepsilon - 1) f(x) + \frac{\varepsilon h}{1} f'(x) + \frac{\varepsilon h^2}{1\,.\,2} f''(x) \\ + \cdots + \frac{\varepsilon h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \frac{\varepsilon h^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+ht)\,dt. \end{cases}$$

---

1) Siehe u. a. Cesàro: Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. Nouv. Annales de Math. 3. Serie, 5. Band 1886; Saalschütz, S. 184 und § 10, sowie die Arbeit des Verfassers: Zur Theorie der ultra-Bernoullischen Zahlen und Funktionen in den Berichten der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1902.

Analog erhalten wir das Gleichungssystem (3):

$$\varepsilon f'(x+h) - f'(x) = (\varepsilon - 1) f'(x) + \frac{\varepsilon h}{1} f''(x) + \cdots$$

$$+ \frac{\varepsilon h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x) + \frac{\varepsilon h^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m+1)}(x+ht)\, dt,$$

. . . .

$$\varepsilon f^{(m-1)}(x+h) - f^{(m-1)}(x) = (\varepsilon - 1) f^{(m-1)}(x) + \frac{\varepsilon h}{1} f^{(m)}(x)$$

$$+ \frac{\varepsilon h^2}{1} \int_0^1 (1-t) f^{(m+1)}(x+ht)\, dt,$$

$$\varepsilon f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x) = (\varepsilon - 1) f^{(m)}(x) + \varepsilon h \int_0^1 f^{(m+1)}(x+ht) dt.$$

Wir multiplizieren die Gleichung (2) und die Gleichungen des Systemes (3) der Reihe nach mit $1, a_1 h, a_2 h^2, \ldots, a_m h^m$, wobei unter $a_1, a_2, \ldots, a_m$ einstweilen völlig willkürliche Größen zu verstehen sind, und addieren die rechten und linken Seiten unserer Gleichungen. Es kann die rechte Seite dann, von den Restgliedern abgesehen, nach Potenzen von h entwickelt werden. Wir wollen versuchen, die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ so zu bestimmen, daß die Koeffizienten von $h, h^2, \ldots, h^m$ der Null gleich werden. Dazu müßte das Gleichungssystem bestehen:

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon + (\varepsilon - 1) a_1 = 0, \\ \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2} + \frac{\varepsilon a_1}{1} + (\varepsilon - 1) a_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\varepsilon}{m!} + \frac{\varepsilon a_1}{(m-1)!} + \cdots \frac{\varepsilon a_{m-1}}{1} + (\varepsilon - 1) a_m = 0. \end{cases}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen:

$$(5) \qquad a_r = \frac{b_r}{r!},$$

so erhalten wir das Gleichungssystem (9), S. 158 der zitierten Arbeit des Verfassers, welchem die ultra-Bernoullischen Zahlen Genüge leisten. Dabei ist definiert:

$$(6) \quad \begin{cases} (2i)^{r+1} c b_r = \dfrac{d^r \operatorname{cotg} u}{du^r}, \\ \varepsilon = e^{2iu}, \quad c = -\frac{1}{2}(1 + i \operatorname{cotg} u). \end{cases}$$

Es sind die ultra-Bernoullinischen Zahlen also, von unwesentlichen Faktoren abgesehen, nichts anderes als die entsprechenden

Differentialquotienten der Kotangente in einem beliebigen von Null verschiedenen Punkte. Unter Aufnahme dieser Größen erhalten wir dann die Beziehung:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon f(x+h) - f(x) + \frac{b_1 h}{1}(\varepsilon f'(x+h) - f'(x)) + \cdots \\ &\qquad + \frac{b_m h^m}{m!}(\varepsilon f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)) = (\varepsilon - 1) f(x) + R_m. \end{aligned}\right.$$

Dabei ist gesetzt worden:

$$(8)\qquad R_m = \frac{\varepsilon h^{m+1}}{m!}\int_0^1 \varphi(t, m) f^{(m+1)}(x + ht)\,dt,$$

und zwar besitzt $\varphi(t, m)$ den Wert:

$$\varphi(t, m) =$$

$$(1-t)^m + m_1 b_1 (1-t)^{m-1} + m_2 b_2 (1-t)^{m-2} + \cdots + m_1 b_{m-1}(1-t) + b_m.$$

Hieraus folgt, daß die Funktion $\varphi(t, m)$, von einer Konstanten abgesehen, nichts anderes ist, als die ultra-Bernoullische Funktion mit dem Argumente $1 - t$, welche in § 5, S. 164 der zitierten Arbeit des Verfassers eingeführt worden ist.

Die Formel (7) schreiben wir:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(\varepsilon - 1) f(x) = \varepsilon f(x+h) - f(x) + \frac{b_1 h}{1}(\varepsilon f'(x+h) - f'(x)) + \cdots \\ &\qquad\qquad + \frac{b_m h^m}{m!}(\varepsilon f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)) - R_m \end{aligned}\right.$$

und setzen in ihr an Stelle von x der Reihe nach x, $x + h$, $x + 2h, \ldots$, $x + (r-1)h$, multiplizieren die Gleichungen der Reihe nach mit $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{r-1}$ und addieren die rechten und linken Seiten derselben, *so erhalten wir die gewünschte Summenformel in der Gestalt*:

$$(10)\quad (\varepsilon - 1)(f(x) + \varepsilon f(x+h) + \cdots + \varepsilon^{r-1} f(x + (r-1)h)) = E_m - P_m,$$

wobei gesetzt worden ist:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} E_m &= \varepsilon^r f(x + rh) - f(x) + \frac{b_1 h}{1}(\varepsilon^r f'(x + rh) - f'(x)) + \cdots \\ &\qquad + \frac{b_m h^m}{m!}(\varepsilon^r f^{(m)}(x + rh) - f^{(m)}(x)), \\ P_m &= \frac{\varepsilon h^{m+1}}{m!}\int_0^1 \varphi(t, m) S_m\,dt, \\ S_m &= \sum_{\varrho=0}^{\varrho=r-1} \varepsilon^{\varrho} f^{(m+1)}(x + \varrho h + ht). \end{aligned}\right.$$

2. *Anwendungen der gefundenen Summenformel.* — Die gefundene Formel nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn der Rest verschwindet. Es geschieht das jedenfalls, wenn die vorgelegte Funktion $f(x)$ eine ganze Funktion vom Grade m ist. Wir erhalten dann den Lehrsatz:

Versteht man unter $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade m, so besteht die Beziehung:

$$(1)\quad \begin{cases} (\varepsilon - 1)\left(f(x) + \varepsilon f(x+h) + \cdots + \varepsilon^{r-1} f(x + (r-1)h)\right) = E_m, \\ E_m = \varepsilon^r f(x + rh - f(x)) + \frac{b_1 h}{1}\left(\varepsilon^r f'(x + rh) - f'(x)\right) + \cdots \\ \quad + \frac{b_m h^m}{m!}\left(\varepsilon^r f^{(m)}(x + rh) - f^{(m)}(x)\right). \end{cases}$$

Die Spezialisierung gibt zu einer Reihe von Resultaten Anlaß, welche für Reihensummierungen und die Theorie der ultra-Bernoullischen Zahlen von Bedeutung sind. Wir setzen:

$$(\mathrm{I})\qquad f(x) = x^m, \quad x = 0,$$

dann erhalten wir die Beziehung:

$$(2)\quad \begin{cases} (\varepsilon - 1)(\varepsilon \,.\, 1^m + \varepsilon^2 \,.\, 2^m + \cdots + \varepsilon^{r-1}(r-1)^m) \\ \quad = \varepsilon^r (r^m + m_1 b_1 r^{m-1} + m_2 b_2 r^{m-2} + \cdots + b_m) - b_m, \end{cases}$$

oder also eine Darstellung der Summe:

$$\varepsilon \,.\, 1^m + \varepsilon^2 \,.\, 2^m + \cdots + \varepsilon^{r-1}(r-1)^m,$$

wie sie schon in anderen Arbeiten gegeben worden ist.

Wir setzen jetzt[1]):

$$(\mathrm{II})\qquad f(x) = x^p (1-x)^q, \quad x = 0, \quad r = 1, \quad h = 1,$$

wobei p und q zwei ganze positive Zahlen bedeuten, von denen $p \leqq q$ ist.

Dann folgt:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-p} n!\, q_{p+q-n},$$
$$f^{(n)}(1) = (-1)^q \quad n!\, p_{p+q-n}.$$

Unsere Formel (1) geht unter solchen Umständen in die Gleichung über:

$$(3)\quad \begin{cases} (-1)^q \varepsilon (p_q b_p + p_{q-1} b_{p+1} + \cdots + b_{p+q}) \\ - (b_p - q_1 b_{p+1} + q_2 b_{p+2} \cdots + (-1)^q b_{p+q}) = 0. \end{cases}$$

---

1) Siehe in Bezug auf den Fall (II) und (III) das Werk von Saalschütz, S. 185 ff.

Das ist aber eine verkürzte Rekursionsformel, die zwischen der p^{ten}, $(p+1)^{\text{ten}}, \ldots, (p+q)^{\text{ten}}$ ultra-Bernoullischen Zahlen besteht.

Wir setzen:

$$\text{(III)} \qquad f(x) = x^p(2-x)^q, \quad x = 0, \quad r = 2, \quad h = 1,$$

wobei zwischen p und q dieselbe Beziehung, wie im Falle (II) bestehen soll.

Bei dieser Annahme erhalten wir die Beziehung:

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon(\varepsilon - 1) = (-1)^q \varepsilon^2 (2^q p_q b_p + 2^{q-1} p_{q-1} b_{p+1} + \cdots + b_{p+q}) \\ \qquad - (2^q b_p - 2^{q-1} q_1 b_{p+1} + \cdots + (-1)^q b_{p+q}), \end{cases}$$

also wieder eine verkürzte Rekursionsformel zwischen der p^{ten}, $(p+1)^{\text{ten}}$, $\ldots$, $(p+q)^{\text{ten}}$ ultra-Bernoullischen Zahl.

Endlich setzen wir:

$$\text{(IV)} \qquad f(x) = x^p(s-x)^q, \quad x = 0, \quad r = s-1, \quad h = 1,$$

wobei für p und q dieselben Annahmen gelten, wie vorhin und erhalten die Beziehung:

$$(5) \quad \begin{cases} (\varepsilon - 1)(\varepsilon 1^p (s-1)^q + \varepsilon^2 2^p (s-2)^q + \cdots + \varepsilon^{s-1}(s-1)^p 1^q) = E_{p+q}, \\ \qquad E_{p+q} = (-1)^q \varepsilon^s (s^q p_q b_p + s^{q-1} p_{q-1} b_{p+1} + \cdots + b_{p+q}) \\ \qquad\qquad - (s^q b_p - s^{q-1} q_1 b_{p+1} + \cdots + (-1)^q b_{p+q}). \end{cases}$$

Diese Formel löst das Problem, die Reihe:

$$\varepsilon 1^p (s-1)^q + \varepsilon^2 2^p (s-2)^q + \cdots + \varepsilon^{s-1}(s-1)^p 1^q$$

mit Hilfe der ultra-Bernoullischen Zahlen zu summieren.

Derartige Summierungen bilden im Gebiete der ultra-Bernoullischen Größen das Analogon zu Summierungen, wie sie etwa von Herrn Glaisher im Gebiete der Bernoullischen Größen im 31. Bande des Quarterly Journal (1900) durchgeführt worden sind. (On the values of the series $x^n + (x-q)^n + (x-2q)^n + \cdots + r^n$ and $x^n - (x-q)^n + (x-2q)^n + \cdots \pm r^n$, p. 193. On $1^n(x-1)^n + 2^n(x-2)^n + \cdots + (x-1)^n 1^n$ and other similar series, p. 241.)

Dresden, den 13. Oktober 1902.

Einige kombinatorische Probleme.

Von E. NETTO in Gießen.

Die in der nachfolgenden Arbeit behandelten Probleme wurden mir von Herrn Peter Rentschizky in Charkow vorgelegt, der ihre Lösung vergeblich in meiner Kombinatorik gesucht hatte. Es ist erklärlich, daß in diesem Zweige der Wissenschaft stets Probleme aus Mangel an Gelegenheit und aus Fülle an Stoff unerledigt bleiben, bis eine Anwendung ihre Lösung fordert. Diese Anwendung war hier musiktheoretischer Natur. So bringt Herr Rentschizky die Frage nach den Permutationen zwischen gleichen und ungleichen Elementen, bei denen aber keine Aufeinanderfolgen gleicher Elemente vorkommen, mit dem „legato"-Spiel in naturgemäße Verbindung; so die cyklischen Permutationen mit der Wiederholung derselben musikalischen Figur.

1. Im § 7, S. 11 meiner Kombinatorik ist gezeigt worden, daß eine ganze Zahl n auf

$$N_\varrho^{(n)} = \binom{n-1}{\varrho-1}$$

Arten in ϱ Teile, d. h. in ϱ gleiche oder von einander verschiedene Summanden zerlegt werden kann, falls man auf die Stellung der Summanden Rücksicht nimmt und also zwei Zerlegungen auch dann als verschieden ansieht, wenn sie sich nur durch die Anordnung der einzelnen Teile unterscheiden.

Ordnet man jede der so auftretenden $N_\varrho^{(n)}$ Zerfällungen auf dem Umfange eines Kreises an und betrachtet statt der geradlinigen die cyklischen Anordnungen (Kombinatorik § 121), so werden verschiedene geradlinige Zerlegungen einer einzigen cyklischen entsprechen. Es soll nun hier die Frage behandelt werden: *in wieviele verschiedene, cyklisch angeordnete Zerlegungen bei gleichen oder ungleichen Summanden, deren Gesamtanzahl ϱ vorgeschrieben ist, läßt sich eine Zahl n zerfällen?*

Die gesuchte Anzahl der Zerlegungen von n in ϱ Summanden werde mit $K_\varrho^{(n)}$ bezeichnet. Im allgemeinen geben ϱ lineare Zerfällungen, wie wir die linear angeordneten kurz nennen wollen, eine einzige cyklische, indem man ja bei der cyklischen ein beliebiges Element der linearen als Anfangselement wählen kann. Nur dann fallen mehrere der so erhaltenen cyklischen Anordnungen in eine zusammen, wenn die lineare Zerfällung sich in identische Teile von geringerer

Gliederanzahl zerlegen läßt So liefern z. B. bei $n = 16$ und $\varrho = 8$ die *cyklischen* Zerfällungen

$$\left.\begin{array}{lll} 1\,1\,1\,5\,1\,1\,1\,5 & \text{nur } 4 & \textit{lineare} \\ 1\,3\,1\,3\,1\,3\,1\,3 & \;\;,,\;\; 2 & \;\;,, \\ 2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 & \;\;,,\;\; 1 & \;\;,, \end{array}\right\}\text{Zerfällungen;}$$

während sonst, z. B. bei 1 1 1 5 1 2 2 3 genau $\varrho = 8$ lineare Zerfällungen einer cyklischen entsprechen. Damit weniger als ϱ cyklische Zerlegungen auftreten, müssen n und ϱ einen gemeinsamen Teiler haben; und umgekehrt, ist dies der Fall, dann kann man auch solche Zerlegungen konstruieren. Ist in diesen Zerlegungen die Gliederanzahl eines der partiellen, identischen Teile gleich ϱ_0, wo ϱ_0 ein Teiler von ϱ ist, dann gibt es, falls diese $\varrho : \varrho_0$ Teile nicht ihrerseits wieder in noch kleinere identische Unterteile zerlegbar sind, für die cyklische Zerlegung entsprechende ϱ_0 lineare, statt wie oben ϱ Zerlegungen.

Hieraus folgt leicht die gesuchte Anzahl $K_\varrho^{(n)}$. Es reicht aus, sie in einem übersichtlichen Spezialfalle herzuleiten. Es sei

$$n = p^\alpha q^\beta s^\gamma \cdot n_1, \quad \varrho = p^\alpha q^\beta s^\gamma \cdot \varrho_1; \qquad (n_1, \varrho_1 \text{ teilerfremd})$$

dann haben also n und ϱ als größten gemeinsamen Teiler

$$m = p^\alpha q^\beta s^\gamma.$$

Wir bestimmen zunächst die Anzahl der *linearen* Zerfällungen von n, *welche ohne identische Unterabteilungen sind.* Jede Zerfällung mit solchen kann aus p oder aus q oder aus s Unterabteilungen gebildet werden, wodurch natürlich die Bildung aus noch mehreren kleineren Unterabteilungen nicht ausgeschlossen ist. Solcher Zerfällungen würde es also

$$N_{\varrho:p}^{(n:p)} + N_{\varrho:q}^{(n:q)} + N_{\varrho:s}^{(n:s)}$$

geben, wenn die zu den einzelnen drei Summanden gehörigen Darstellungen alle von einander verschieden wären. Offenbar aber haben z. B. die zu den beiden ersten Summanden gehörigen Darstellungen alle diejenigen Zerlegungen gemeinsam, die zu

$$N_{\varrho:pq}^{(n:pq)}$$

gehören; und Ähnliches gilt für die übrigen Kombinationen der Summanden unter einander. Bekannte Schlüsse zeigen dann, daß die An-

zahl der linearen Zerfällungen, die ihrerseits nicht in Unterzerfällungen zerlegt werden können, gleich ist

$$N_{\varrho}^{(n)} - \left[N_{\varrho:p}^{(n:p)} + N_{\varrho:q}^{(n:q)} + N_{\varrho:s}^{(n:s)}\right]$$
$$+ \left[N_{\varrho:qs}^{(n:qs)} + N_{\varrho:sp}^{(n:sp)} + N_{\varrho:pq}^{(n:pq)}\right] - N_{\varrho:pqs}^{(n:pqs)}.$$

Um zu der cyklischen entsprechenden Anzahl zu kommen, ist dieses Aggregat mit $1/\varrho$ zu multiplizieren.

Genau so behandeln wir die linearen Teilungen, *welche ihrerseits Zerfällungen in p identische Unterzerfällungen zulassen.* Jede dieser ersten Unterabteilungen enthält $\varrho : p$ Summanden, deren Summe $n : p$ ist. Je $\varrho : p$ solcher zusammengehörigen Zerfällungen gehören einer einzigen cyklischen Zerfällung zu. Die gesuchte Anzahl linearer Darstellungen wird

$$N_{\varrho:p}^{(n:p)} - \left[N_{\varrho:pp}^{(n:pp)} + N_{\varrho:pq}^{(n:pq)} + N_{\varrho:ps}^{(n:ps)}\right]$$
$$+ \left[N_{\varrho:pqs}^{(n:pqs)} + N_{\varrho:pps}^{(n:pps)} + N_{\varrho:ppq}^{(n:ppq)}\right] - N_{\varrho:ppqs}^{(n:ppqs)}.$$

Diese Anzahl ist mit p/ϱ zu multiplizieren, um die Anzahl der zugehörigen cyklischen Zerfällungen zu liefern.

Geht man auf gleichem Wege weiter und nimmt in der Gesamtsumme alle Glieder mit gleichen $N_{\mu}^{(\nu)}$ zusammen, so folgt

$$K_{\varrho}^{(n)} = \frac{1}{\varrho} N_{\varrho}^{(n)} + \frac{p-1}{\varrho} N_{\varrho:p}^{(n:p)} + \cdots + \frac{p^2-p}{\varrho} N_{\varrho:pp}^{(n:pp)} + \cdots$$
$$+ \frac{pq-p-q+1}{\varrho} N_{\varrho:pq}^{(n:pq)} + \cdots + \frac{p^3-p^2}{\varrho} N_{\varrho:ppp}^{(n:ppp)} + \cdots$$

oder einfacher und gleich in allgemeinster Form

$$K_{\varrho}^{(n)} = \frac{1}{\varrho} \sum_{d/m} \varphi(d) N_{\varrho:d}^{(n:d)} = \frac{1}{\varrho} \sum_{d/m} \varphi(d) \binom{n:d-1}{\varrho:d-1}.$$

(m ist der größte gemeinsame Teiler von n und ϱ.)

Dabei bedeutet, wie gewöhnlich d/m, daß d alle Teiler von m, eingeschlossen 1 und m selbst, durchläuft. Die letzte Formel gibt die Lösung der gestellten Aufgabe.

2. Wir gehen zum folgenden zweiten Probleme über. Es seien a Elemente A gegeben, b Elemente B, u. s. f. ..., k Elemente K und endlich l Elemente L. Die Anzahl aller Elemente bezeichnen wir

$$a + b + \cdots + k + l = n + l,$$

so daß die Anzahl aller mit Ausnahme der Elemente L durch n gegeben ist. Aus den gegebenen $(n+l)$ Elementen $A, B, \ldots, K, L$ werden alle möglichen $\frac{(n+l)!}{a!\, b! \ldots k!\, l!}$ Permutationen gebildet; es soll nun bestimmt werden, wie viele unter diesen genau α Folgen der Elemente A, ferner β Folgen $B, \ldots, \varkappa$ Folgen K und endlich λ Folgen der Elemente L besitzen. Dabei repräsentiert eine Aufeinanderfolge von q Elementen der gleichen Art $(q-1)$ Folgen dieser Art, so daß z. B. jede der Permutationen

$$A\,A\,A\,B\,B\,A\,A\,A\,A\,B\,B\,B,$$
$$A\,A\,A\,A\,A\,B\,A\,A\,B\,B\,B\,B,$$
$$B\,A\,B\,B\,B\,B\,A\,A\,A\,A\,A\,A$$

fünf Folgen der A und drei Folgen der B aufweist. Wenn bei den A, deren Anzahl a ist, α Folgen vorkommen, schreiben wir dies A_α^a; für das Auftreten von α Folgen der A ist es charakteristisch, daß die A in $(a-\alpha)$ einzelnen *Komplexen* vorkommen; so in den obigen Beispielen, in welchem $a=7$, $\alpha=5$ ist, in 2 Komplexen. Die B kommen in denselben Beispielen wegen B_3^5 in $5-3=2$ Komplexen vor.

Wir wollen sowohl die Permutationen als auch die Lösungszahlen, die dem vorgelegten Probleme genügen, durch

$$\left[A_\alpha^a,\quad B_\beta^b,\quad \ldots,\quad K_\varkappa^k,\quad L_\lambda^l\right] \tag{1}$$

bezeichnen. Denken wir uns in allen geforderten Permutationen die l Elemente L getilgt, so entstehen Permutationen, die zu

$$\left[A_{\alpha_1}^a,\quad B_{\beta_1}^b,\quad \ldots,\quad K_{\varkappa_1}^k\right] \qquad (\alpha_1 \geqq \alpha,\ \beta_1 \geqq \beta,\ \ldots,\ \varkappa_1 \geqq \varkappa) \tag{2}$$

gehören. Wir liefern für (1) eine Reduktionsformel dadurch, daß wir umgekehrt von allen (2) ausgehen und durch passende Einfügung der L auf die (1) zurückzukommen suchen.

Während in (1) die A in $(a-\alpha)$ Komplexen auftreten, treten sie in (2) nur in $(a-\alpha_1)=(a-\alpha)-(\alpha_1-\alpha)$ Komplexen auf; es muß also durch eingefügte L das Auftreten in jener größeren Anzahl von Komplexen bewirkt werden; die überschüssigen $(\alpha_1-\alpha)$ Folgen sind dadurch zu beseitigen. Setzt man zwischen zwei der A ein L, so ist eine Folge aufgehoben; es sind also $(\alpha_1-\alpha)$ Elemente L einzeln zwischen die A zu fügen. Dies ist an so vielen Zwischenstellen möglich, als Folgen A in (2) vorhanden sind, also auf

$$\binom{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha}=\binom{\alpha_1}{\alpha}$$

verschiedene Arten. Auf ähnliche Art sieht man, daß zur Tilgung der überzähligen $(\beta_1 - \beta)$ Folgen unter den B genau $\binom{\beta_1}{\beta}$ Wege offen stehen u. s. w. Im ganzen kann man also auf

$$(3) \qquad \binom{\alpha_1}{\alpha}\binom{\beta_1}{\beta}\cdots\binom{\varkappa_1}{\varkappa}$$

Arten aus (2) alle existierenden

$$(4) \qquad \left[A^a_\alpha,\quad B^b_\beta,\quad \ldots,\quad K^k_\varkappa,\quad L_0^{(\alpha_1-\alpha)+\cdots+(\varkappa_1-\varkappa)}\right]$$

herleiten; die L kommen in (4) nur einzeln stehend vor.

Von (4) wollen wir weiter in der Richtung auf (1) zu gehen, indem wir

$$(5) \qquad \left[A^a_\alpha,\quad B^b_\beta,\quad \ldots,\quad K^k_\varkappa,\quad L_0^{l-\lambda}\right]$$

zu erreichen suchen. Dies geschieht durch Einschiebung von

$$(6) \qquad (l-\lambda)-(\alpha_1-\alpha)-\cdots-(\varkappa_1-\varkappa)$$

Elementen L an Stellen, durch welche die Komplexe der $A, B, \ldots, K$ nicht gestört werden; ebenso dürfen die einzuschiebenden (6) Elemente L nicht an schon vorhandene L treten. Es bleiben also an besetzbaren Stellen in (5) übrig die Stelle links vor dem ersten, die Stelle rechts hinter dem letzten Elemente und ferner die Stellen zwischen den einzelnen Komplexen in (2). Da nun (2)

$$(a-\alpha_1)+(b-\beta_1)+\cdots+(k-\varkappa_1)$$

Komplexe enthält, so bleiben an besetzbaren Stellen

$$(a-\alpha_1)+(b-\beta_1)+\cdots+(k-\varkappa_1)+1.$$

Auf diesen kann man die (6) Elemente L auf

$$(7) \qquad \binom{a-\alpha_1+b-\beta_1+\cdots+k-\varkappa_1+1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1+\varkappa}.$$

Arten unterbringen; so viele (5) entstehen also aus jedem (4).

Um endlich von (5) auf den geforderten Typus (1) zurückzukehren, hat man nur noch nötig, die übrigen λ Elemente L beliebig den schon an $(l-\lambda)$ Stellen einzeln verteilten ohne Vermehrung der Komplexe anzufügen, d. h. λ Elemente an $(l-\lambda)$ erlaubten Stellen unterzubringen. Dies ist bekanntlich auf

$$(8) \qquad \binom{(l-\lambda)+\lambda-1}{\lambda}=\binom{l-1}{\lambda}$$

Arten möglich.

So erhält man unter Berücksichtigung von (3), (7), (8)

$$(9)\begin{cases} \left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ \cdots,\ K^k_\varkappa,\ L^l_\lambda\right] \\ = \binom{l-1}{\lambda}\sum\limits_{\alpha_1,\cdots,\varkappa_1}\binom{\alpha_1}{\alpha}\cdots\binom{\varkappa_1}{\varkappa}\binom{a-\alpha_1+\cdots+k-\varkappa_1+1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1+\varkappa}\cdot\left[A^a_{\alpha_1},\cdots,K^k_{\varkappa_1}\right] \\ \qquad (\alpha\leqq\alpha_1\leqq a-1;\ \cdots\ \varkappa\leqq\varkappa_1\leqq k-1). \end{cases}$$

Daß für $\alpha_1, \cdots, \varkappa_1$ die Werte $(a-1), \cdots, (k-1)$ obere Grenzen bilden, ist ja klar.

Beispiele. I. Gibt es nur eine Sorte von Elementen, dann folgt, wie leicht ersichtlich ist,

$$\left[A^a_\alpha\right] = 1, \quad \text{für } \alpha = a-1;$$

$$\left[A^a_\alpha\right] = 0, \quad \text{für } \alpha \neq a-1.$$

II. Ist zu untersuchen

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta\right],$$

so ist zu bedenken, daß die Summe auf der rechten Seite von (9) sich auf das eine Glied, welches $\alpha_1 = a-1$ hat, reduziert. Demnach wird unter Zuhilfenahme von Beispiel I

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta\right] = \binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{\beta}\binom{2}{b-\beta-a+\alpha+1}.$$

Wegen des letzten Faktors auf der rechten Seite ist der Wert nur dann von Null verschieden, wenn $b-\beta-a+\alpha+1 = 0$ oder $= 1$ oder $= 2$ wird, d. h. für $b-\beta = a-\alpha$ oder $= a-\alpha \pm 1$. Man findet demgemäß

$$(10)\quad\begin{cases} \left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta\right] = 2\binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{\beta} & \text{für } b-\beta = a-\alpha, \\ \qquad\qquad = \binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{\beta} & \text{für } b-\beta = a-\alpha \pm 1, \\ \qquad\qquad = 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

III. Ist

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ C^c_\gamma\right]$$

zur Untersuchung vorgelegt, so nehmen wir an, es sei

$$b-\beta \geqq a-\alpha$$

und ordnen die Summanden nach absteigenden unteren Indices α_1 in (9)

$$
\begin{array}{lll}
 & \left[A^a_{a-1},\, B^b_{b-1}\right], & \left[A^a_{a-1},\, B^b_{b-2}\right]; \\
\left[A^a_{a-2},\, B^b_{b-1}\right], & \left[A^a_{a-2},\, B^b_{b-2}\right], & \left[A^a_{a-2},\, B^b_{b-3}\right]; \\
\left[A^a_{a-3},\, B^b_{b-2}\right], & \left[A^a_{a-3},\, B^b_{b-3}\right], & \left[A^a_{a-3},\, B^b_{b-4}\right]; \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\left[A^a_{\alpha},\, B^b_{b-a+\alpha+1}\right], & \left[A^a_{\alpha},\, B^b_{b-a+\alpha}\right], & \left[A^a_{\alpha},\, B^b_{b-a+\alpha-1}\right].
\end{array}
$$

Wegen (10) sind dies die einzigen auftretenden Glieder. Für den Fall $b-\beta = a-\alpha$ muß das letzte noch wegfallen, da dann

$$b - a + \alpha - 1 = \beta - 1$$

wird, während doch β der niedrigste untere Index von $B^b_{\beta_1}$ ist. Diese Glieder haben nach (10) die Werte

$$
(11)\quad
\begin{array}{lll}
 & 2\binom{a-1}{a-1}\binom{b-1}{b-1}, & \binom{a-1}{a-1}\binom{b-1}{b-2}; \\
\binom{a-1}{a-2}\binom{b-1}{b-1}, & 2\binom{a-1}{a-2}\binom{b-1}{b-2}, & \binom{a-1}{a-2}\binom{b-1}{b-3}; \\
\binom{a-1}{a-3}\binom{b-1}{b-2}, & 2\binom{a-1}{a-3}\binom{b-1}{b-3}, & \binom{a-1}{a-3}\binom{b-1}{b-4}; \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{b-a+\alpha+1}, & 2\binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{b-a+\alpha}, & \binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{b-a+\alpha-1}.
\end{array}
$$

Setzt man ferner abkürzend

$$(a-\alpha) + (b-\beta) - (c-\gamma) + 1 = \varrho,$$

so werden nach (9) die Koeffizienten der Werte (11) der Reihe nach

$$
(12)\quad
\begin{array}{lll}
 & \binom{a-1}{\alpha}\binom{b-1}{\beta}\binom{3}{\varrho}, & \binom{a-1}{\alpha}\binom{b-2}{\beta}\binom{4}{\varrho}; \\
\binom{a-2}{\alpha}\binom{b-1}{\beta}\binom{4}{\varrho}, & \binom{a-2}{\alpha}\binom{b-2}{\beta}\binom{5}{\varrho}, & \binom{a-2}{\alpha}\binom{b-3}{\beta}\binom{6}{\varrho}; \\
\binom{a-3}{\alpha}\binom{b-2}{\beta}\binom{6}{\varrho}, & \binom{a-3}{\alpha}\binom{b-3}{\beta}\binom{7}{\varrho}, & \binom{a-3}{\alpha}\binom{b-4}{\beta}\binom{8}{\varrho}; \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{\alpha}{\alpha}\binom{b-a+\alpha+1}{\beta}\binom{2a-2\alpha}{\varrho}, & \binom{\alpha}{\alpha}\binom{b-a+\alpha}{\beta}\binom{2a-2\alpha+1}{\varrho}, & \binom{\alpha}{\alpha}\binom{b-a+\alpha-1}{\beta}\binom{2a-2\alpha+2}{\varrho}.
\end{array}
$$

Multipliziert man die Glieder (11) mit den entsprechenden Koeffizienten (12), so erhält man als den Wert der Summe aller dieser Produkte

$$\left[A^a_{\alpha},\, B^b_{\beta},\, C^c_{\gamma}\right] : \binom{c-1}{\gamma}.$$

Ist bei

$$b - \beta > a - \alpha \qquad 2a - 2\alpha + 2 < \varrho,$$
$$b - \beta = a - \alpha \qquad 2a - 2\alpha + 1 < \varrho,$$

so verschwinden alle Koeffizienten (12). Damit dies nicht geschehe, muß für

$$b - \beta > a - \alpha \qquad c - \gamma \geqq (b - \beta) - (a - \alpha) - 1,$$
$$b - \beta = a - \alpha \qquad c - \gamma \geqq 0$$

sein. Andererseits ist klar, daß ϱ nicht negativ sein kann, d. h. es ist

$$c - \gamma \leqq (b - \beta) + (a - \alpha) + 1,$$

wenn $\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ C^c_\gamma\right] > 0$ sein soll.

IV. Aus dem erhaltenen Resultate lassen sich die Werte der Symbole

$$\left[A^a_0,\ B^b_0,\ C^c_0\right]$$

entnehmen. Wir können dabei $a \leqq b \leqq c$ annehmen; dann besteht für c die Bedingung

$$c \leqq a + b + 1,$$

und es wird

$$\varrho = a + b + 1 - c.$$

Die oben angegebene Summe wird dann

$$\begin{aligned} (13)\quad & 2\binom{a-1}{0}\binom{b-1}{0}\binom{3}{\varrho} \qquad + \binom{a-1}{0}\binom{b-1}{1}\binom{4}{\varrho} \\ & + \binom{a-1}{1}\binom{b-1}{0}\binom{4}{\varrho} + 2\binom{a-1}{1}\binom{b-1}{1}\binom{5}{\varrho} + \binom{a-1}{1}\binom{b-1}{2}\binom{6}{\varrho} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \binom{a-1}{a-1}\binom{b-1}{a-2}\binom{2a}{\varrho} + 2\binom{a-1}{a-1}\binom{b-1}{a-1}\binom{2a+1}{\varrho} + \binom{a-1}{a-1}\binom{b-1}{a}\binom{2a+2}{\varrho}. \end{aligned}$$

So ergibt sich

$$[A^1_0,\ B^1_0,\ C^2_0] = 2\tbinom{0}{0}\tbinom{0}{0}\tbinom{3}{1} = 6; \quad \varrho = 1,$$
$$[A^1_0,\ B^1_0,\ C^3_0] = 2\tbinom{0}{0}\tbinom{0}{0}\tbinom{3}{0} = 2; \quad \varrho = 0.$$

Hier fällt in (13) die erste mit der letzten Zeile zusammen, und wegen $a - \alpha = b - \beta$ muß in dieser der letzte Summand getilgt werden. Überhaupt besteht bei $a = 1$ stets nur *eine* Zeile in (13), und bei $b > 1$ wird die Summe

$$\left[A^1_0,\ B^b_0,\ C^c_0\right] = 2\binom{3}{b-c} + (b-1)\binom{4}{2+b-c}.$$

V. Kommen die Elemente $A, B, \cdots, K$ nur je einmal vor, $a=b=\cdots=k=1$, und wird ihre Anzahl, wie oben, durch n bezeichnet, so liefert (9)

$$\left[A_0^1, B_0^1, \cdots, K_0^1, L_\lambda^l\right]=n!\binom{l-1}{\lambda}\binom{n+1}{l-\lambda}.$$

3. — Wir wollen das im vorigen Paragraphen für lineare Permutationen behandelte Problem auch für cyklische Permutationen lösen. Dazu gehen wir von der Aufgabe des § 2 aus, modifizieren sie aber dergestalt, daß wir 1) in jeder linearen Permutation ein Element einer bestimmten Art, etwa ein Element A, an den Anfang links hinsetzen; und daß wir 2), wenn am Schlusse rechts gleichfalls Elemente A auftreten, die Folgen der A so zählen, als ob auf das letzte Element wieder das erste folgte. So liefert jetzt z. B. die Permutation

$$ABBBBABAAAAA$$

fünf Folgen für die A. Das neue bezeichnende Symbol sei

$$\left[A_\alpha^a, B_\beta^b, \cdots, K_\varkappa^k, L_\lambda^l\right]'. \tag{1}$$

Zur Berechnung von (1) wählen wir die entsprechende Methode wie früher. Dann erkennt man leicht, daß der erste Schritt, der von

$$\left[A_{\alpha_1}^a, B_{\beta_1}^b, \cdots, K_{\varkappa_1}^k\right]' \quad \text{zu} \quad \left[A_\alpha^a, B_\beta^b, \cdots, K_\varkappa^k, L_0^{\alpha_1-\alpha+\cdots+k_1-\varkappa}\right]',$$

genau wie der entsprechende frühere durchzuführen sein wird. Beim zweiten Schritte, dem zu

$$\left[A_\alpha^a, B_\beta^b, \cdots K_\varkappa^k, L_0^{l-\lambda}\right]'$$

führenden, findet eine Veränderung statt, da die erste Stelle links von dem ersten A nicht von L besetzt werden darf. Folglich tritt statt (7) § 2 nun

$$\binom{a-\alpha_1+b-\beta_1+\cdots+k-\varkappa_1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1+\varkappa}$$

als Faktor auf. Der letzte Schritt bedingt keine Änderungen; und so entsteht

$$\left\{\begin{aligned}&\left[A_\alpha^a, B_\beta^b, \cdots, K_\varkappa^k, L_\lambda^l\right]'\\ &=\binom{l-1}{\lambda}\sum_{\alpha_1,\cdots,\varkappa_1}\binom{\alpha_1}{\alpha}\cdots\binom{\varkappa_1}{\varkappa}\binom{a-\alpha_1+\cdots+k-\varkappa_1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1-\varkappa}\cdot\left[A_{\alpha_1}^a, \cdots K_{\varkappa_1}^k\right]'.\\ &\qquad (\alpha\leq\alpha_1\leq a-1,\ \beta\leq\beta_1\leq b-1,\ldots).\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Eine Ausnahme bei der Normierung der oberen Grenze von α_1 wird sich sofort herausstellen.

Beispiel I. Gibt es nur eine Sorte von Elementen, dann folgt, wie leicht ersichtlich ist,

$$\left[A^a_\alpha\right]' = 1, \quad \text{für } \alpha = a;$$

$$\left[A^a_\alpha\right]' = 0, \quad \text{für } \alpha \neq a.$$

II. Ist zu untersuchen

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta\right]',$$

so ist zu bedenken, daß die Summe auf der rechten Seite von (2) sich auf das eine Glied, welches $\alpha_1 = a$ hat, reduziert. Demnach wird unter Zuhilfenahme von Beispiel I

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta\right]' = \binom{b-1}{\beta}\binom{a}{\alpha}\binom{0}{b-\beta-a+\alpha}. \tag{3}$$

Damit die letzte Klammer von 0 verschieden sei, muß

$$b - \beta = a - \alpha$$

werden; also gibt es von Null verschiedene Werte nur für

$$\left[A^a_\alpha,\ B^{a+q}_{\alpha+q}\right]' = \binom{a}{\alpha}\binom{a+q-1}{\alpha+q}. \tag{3*}$$

Daß eine Vertauschung von a, α mit b, β die rechte Seite von (3) bez. (3*) ändert, ist natürlich, da den A eine besondere Stellung zu Anfang der Permutationen vorgeschrieben war.

III. Ist

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ C^c_\gamma\right]'$$

zur Untersuchung vorgelegt, so ordnen wir die Summanden in (2) unter Berücksichtigung von II nach abnehmender Größe von α_1. Man erhält dann als Wert des Symbols die Summe

$$\begin{aligned} &\binom{a}{a-1}\binom{a-1}{\alpha}\cdot\binom{b-1}{b-1}\binom{b-1}{\beta}\cdot\binom{2}{\varrho'} \\ +&\binom{a}{a-2}\binom{a-2}{\alpha}\cdot\binom{b-1}{b-2}\binom{b-2}{\beta}\cdot\binom{4}{\varrho'} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +&\binom{a}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha}\cdot\binom{b-1}{b-a+\alpha}\binom{b-a+\alpha}{\beta}\cdot\binom{2a-2\alpha}{\varrho'}, \end{aligned}$$

wobei

$$\varrho' = (a-\alpha) + (b-\beta) - (c-\gamma)$$

bedeutet. Ist $b - \beta < a - \alpha$, so schließt die Summe schon von selbst, durch Verschwinden der letzten Glieder, bereits mit einer

früheren Zeile. Als Bedingung für $c-\gamma$ ergibt sich, ähnlich wie oben,

$$(b-\beta)-(a-\alpha) \leq c-\gamma \leqq (b-\beta)+(a-\alpha).$$

Man erhält beispielsweise

$$[A^3_1 B^3_0 C^2_0]' = \binom{3}{2}\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}\binom{2}{0}\cdot\binom{2}{3} + \binom{3}{1}\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{1}\binom{1}{0}\cdot\binom{4}{3} = 24$$

und natürlich für

$$[A^3_1 B^2_0 C^3_0]' = \binom{3}{2}\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\binom{1}{0}\cdot\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{0}\binom{0}{0}\cdot\binom{4}{1} = 24$$

den gleichen Wert.

4. — Jetzt können wir ohne weiteres zu cyklischen Permutationen übergehen. Wir wollen aber, um die Formeln nicht zu komplizieren, die Annahme machen, daß auf etwa mögliche Unterteilungen, wie sie im ersten Paragraphen behandelt wurden, zunächst keine Rücksicht genommen werde.

Dann lautet die Frage: *Wie viele cyklische Permutationen des Typus*

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ \cdots,\ K^k_\varkappa,\ L^l_\lambda\right]$$

gibt es, d. h. wie viele lassen sich aus a Elementen A, aus b Elementen B u. s. f. bilden, welche α Folgen der ersten, β Folgen der zweiten u. s. w. Elementenarten aufweisen.

Wir wählen als Symbol für die Anzahl

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ \cdots\ L^l_k\right]^0.$$

Da nun jede der zugehörigen Permutationen mit einem beliebigen ihrer Elemente begonnen werden kann, so wählen wir für dieses Anfangselement ein A; und da die Anzahl der vorkommenden A gleich α ist, so folgt

$$\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ \cdots\ K^k_\varkappa,\ L^l_\lambda\right]^0 = \frac{1}{a}\left[A^a_\alpha,\ B^b_\beta,\ \cdots,\ K^k_\varkappa,\ L^l_\lambda\right]'$$

$$= \binom{l-1}{\lambda}\frac{1}{a}\sum_{\alpha_1,\cdots\varkappa_1}\binom{\alpha_1}{\alpha}\cdots\binom{\varkappa_1}{\varkappa}\binom{a-\alpha_1+\cdots+k-\varkappa_1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1+\varkappa}\left[A^a_\alpha,\ \cdots,\ K^k_\varkappa\right]'$$

$$= \binom{l-1}{\lambda}\sum_{\alpha_1,\cdots\varkappa_1}\binom{\alpha_1}{\alpha}\cdots\binom{\varkappa_1}{\varkappa}\binom{a-\alpha_1+\cdots+k-\varkappa_1}{l-\lambda-\alpha_1+\alpha-\cdots-\varkappa_1+\varkappa}\left[A^a_\alpha,\ \cdots,\ K^k_\varkappa\right]^0;$$

d. h. die Reduktionsformel (2) aus § 3 hat auch hier Geltung.

Beispiel I. Es ist

$$\left[A^a_\alpha\right]^0 = 1, \quad \text{für } \alpha = a;$$

$$\left[A^a_\alpha\right]^0 = 0, \quad \text{für } \alpha \neq a.$$

II. Es sei vorgelegt A_α^a, B_β^b; dann findet man durch das entsprechende Resultat des vorigen Paragraphen

$$\left[A_\alpha^a,\ B_\beta^b\right]^0 = \frac{1}{a}\binom{a}{\alpha}\binom{b-1}{\beta} \quad \text{für } b-\beta = a-\alpha,$$
$$= 0 \quad \text{für } b-\beta \neq a-\alpha.$$

Der Wert des Symbols darf sich nicht ändern, wenn man a und α mit b und β vertauscht. In der Tat ist auch

$$\left[\frac{1}{a}\binom{a}{\alpha}\binom{b-1}{\beta}\right]\cdot(a-\alpha) = \left[\frac{1}{b}\binom{b}{\beta}\binom{a-1}{\alpha}\right]\cdot(b-\beta),$$

und da $a-\alpha = b-\beta$ ist, so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Der Übergang zu cyklischen Permutationen, die in gleiche Unterabteilungen zerfallen, bietet nun theoretisch keine weiteren Schwierigkeiten dar. Die Formeln werden aber so kompliziert, daß es bequemer ist, in jedem einzelnen Falle die Rechnung durchzuführen, als die fertigen Resultate zu benutzen.

Gießen, den 5. Januar 1903.

Der Rest der Arcussinus-Reihe für $x = 1$.

Von L. Saalschütz in Königsberg.

Bei der Entwickelung der Reihe für $\arcsin x$ mittels des Taylorschen Lehrsatzes ist der Rest, soweit mir bekannt, bisher direkt nur für $|x| < 1$ betrachtet worden. Der Grenzfall $x = 1$ wird entweder, als nicht mehr elementar, der Funktionenlehre überlassen oder mit Hilfe von Sätzen über Potenzenreihen erledigt, unter denen das Abelsche Theorem, daß eine Potenzenreihe, soweit sie konvergiert, auch den Wert der Funktion, welche sie darstellt, richtig wiedergibt, den Vorzug verdient.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß das allgemeine Restglied des Taylorschen Satzes in seiner Anwendung auf die Arcussinus-Reihe auch zur Beurteilung des Falles $x = 1$ ausreicht[1]), und es gelingt so-

---

1) Die Untersuchung dieses Restes hat reale, nicht etwa nur illusorische, Bedeutung, weil für x zwischen 0 und 1 *mit Einschlufs der Grenzen* $(1-x)^n f^{(n)}(x)$, wo $f(x) = \arcsin x$, verschwindet. In solchem Falle nämlich entscheidet die *Konvergenz*, bez. *Nicht-Konvergenz des Restes* in seiner allgemeinen, von Schlö-

gar unter Benutzung zweier verschiedener Formen des Restes, einen von der Anzahl n der beibehaltenen (bez. berechneten) Glieder abhängigen (mit $n = \infty$ verschwindenden) Ausdruck anzugeben, dem der Rest sich mit wachsendem n mehr und mehr nähert.

1. Je nachdem man das Restglied des Taylorschen Lehrsatzes an das in x^{2n-1} oder an das in x^{2n} multiplizierte Glied anschließt, welches letztere den Wert Null hat, erhält man die folgenden beiden gleichberechtigten Gleichungen:

$$(1)\quad \arcsin x = x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x)\cdot x^{2n}$$

oder

$$(2)\quad \arcsin x = x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x)\cdot x^{2n+1}$$

Hierin bedeuten $R_{2n}(x)$ und $R_{2n+1}(x)$ die Funktionen

$$(3)\quad R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n)}(\vartheta x)(1-\vartheta)^{2n-p}}{p(2n-1)!};\quad R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\vartheta_1 x)(1-\vartheta_1)^{2n+1-p}}{p(2n)!},$$

wenn man unter p eine willkürlich anzunehmende positive Zahl, unter ϑ und ϑ_1 nicht näher bekannte positive echte Brüche versteht und $f(x)$ durch $\arcsin x$ ersetzt.

Bei derselben Bedeutung von $f(x)$ gilt die bekannte und leicht abzuleitende Rekursionsformel:

$$(4)\quad (1-x^2)f^{(m+1)}(x) - (2m-1)xf^{(m)}(x) - (m-1)^2 f^{(m-1)}(x) = 0.$$

Andererseits ist

$$f(x) = \arcsin x,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\ f'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ etc.};$$

man kann hieraus schließen (und leicht beweisen), daß $f^{(m)}(x)$ die Form besitzt:

$$(5)\qquad f^{(m)}(x) = \frac{\varphi_m(x)}{(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}},$$

---

milch (wie Herr Pringsheim angibt) herrührenden Form $\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!\,p}x^n$, in welcher p eine *positive*, außerdem willkürlich wählbare Zahl und θ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch, der auch die Grenzwerte 0 oder 1 erreichen kann, bedeutet, *nach der Null hin* über die *Gültigkeit* bez. *Ungültigkeit* der Taylorschen Entwickelung der Funktion bis zum oberen Grenzwert der Variablen (hier $x = 1$) einschließlich; und dieser *Satz* läßt sich mit ähnlichen Hilfsmitteln wie den von Herrn Pringsheim in seiner zweiten Abhandlung über den Taylorschen Lehrsatz (Bd. 44 der Math. Ann. S. 57 ff.) angewandten beweisen.

wobei $\varphi_m(x)$ eine ganze algebraische Funktion $(m-1)$ten Grades von x bedeutet, die bei geradem m den Faktor x hat. Z. B. sind

(6) $\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = x,\ \varphi_3(x) = 1 + 2x^2,\ \varphi_4(x) = x(9 + 6x^2)$, etc.

Setzt man den Ausdruck (5) (und die entsprechenden) in die Gl. (4) ein, so erhält man nach Multiplikation mit $(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$:

$$\varphi_{m+1}(x) = (2m-1)x\varphi_m(x) + (m-1)^2(1-x^2)\varphi_{m-1}(x); \tag{7}$$

durch Differentiation der Gl. (5) folgt:

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{(1-x^2)\varphi'_m(x) + (2m-1)x\varphi_m(x)}{(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

aber es ist auch

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{\varphi_{m+1}(x)}{(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

also

$$\varphi_{m+1}(x) = (1-x^2)\varphi'_m(x) + (2m-1)x\varphi_m(x)$$

und daher durch Vergleich mit (7):

$$\varphi'_m(x) = (m-1)^2\varphi_{m-1}(x). \tag{8}$$

Auch folgt noch aus (7), wie leicht zu ersehen

$$\varphi_m(1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-3), \tag{9}$$

$$\varphi_{2n}(0) = 0,\ \varphi_{2n+1}(0) = (1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))^2.\text{[1]} \tag{10}$$

Aus (8) und (9) folgt successive für $m = 2, 3, 4$ etc., daß die $\varphi_m(x)$ für positive x positive mit x wachsende Werte haben.

---

1) Als ich in einem mathematischen Kolloquium in Anwesenheit meines Kollegen Herrn Franz Meyer über den Gegenstand vorliegender Arbeit referierte, bemerkte derselbe, daß er einige meiner Formeln ebenfalls gefunden und in sein demnächst (bei Göschen in Leipzig) erscheinendes [unterdessen erschienenes] Werk über Differentialrechnung aufgenommen habe. Wie ich aus den mir freundlichst eingehändigten Korrekturbogen ersehe, sind dies, in analoger Ableitung wie oben, die Gll. (7), (8) und (10), die mit den dortigen (60) und (64) (S. 301, 302) identisch sind. Auch gibt Herr Meyer die expliciten Entwickelungen von $\varphi_m(x)$ (hier (46) und (47)) in seinem Werke S. 303 an; mit Hilfe derselben zeigt er (S. 306, Formel (74)), daß das Restglied der Arcussinus-Reihe für $|x| < 1$ sich der Null nähert. — Außerdem verdanke ich Herrn Fr. Meyer die folgende persönliche Mitteilung: Wenn für p der obige Wert $\frac{1}{2}$ adoptiert wird, so ist auch, wie aus der zitierten Gleichung (74) S. 306 daselbst hervorgeht, für jedes endliche n ($n \gtreqless 2$) und $x = 1$ der Wert des Restes endlich, nämlich < 1, und hieraus kann man von vornherein und ohne weitere Rechnung, da sämtliche Glieder der Entwickelung positiv sind, auf die Konvergenz der Entwickelung von arc sin 1 schließen.

Nunmehr folgt, wenn wir $x = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $\vartheta = x\vartheta = u$, bez. $\vartheta_1 = x\vartheta_1 = u$ und:

$$(11) \qquad f^{(m)}(u)(1-u)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_m(u)}{(1+u)^{m-\frac{1}{2}}} = \psi_m(u)$$

setzen:

$$(12) \qquad R_{2n}(1) = \text{irgend einem Wert von } \frac{2\psi_{2n}(u)}{(2n-1)!},$$

$$(13) \qquad R_{2n+1}(1) = \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \frac{2\psi_{2n+1}(u)}{(2n)!}.$$

Betrachten wir nun den Verlauf von $\psi_m(u)$, und zwar zunächst, ohne gerades von ungeradem m zu unterscheiden. Es ist:

$$(14) \qquad \psi'_m(u) = \frac{P_m(u)}{(1+u)^{m+\frac{1}{2}}},$$

wenn

$$(15) \qquad P_m(u) = (1+u)\varphi'_m(u) - (m - \tfrac{1}{2})\varphi_m(u)$$

oder mit Rücksicht auf (8):

$$(16) \qquad P_m(u) = (m-1)^2(1+u)\varphi_{m-1}(u) - (m - \tfrac{1}{2})\varphi_m(u)$$

gesetzt wird. Dann weiter durch Differentiation von (15) nach u, indem aus (8):

$$(17) \qquad \varphi''_m(u) = (m-1)^2(m-2)^2\varphi_{m-2}(u)$$

folgt:

$$(18) \qquad \frac{dP_m(u)}{du} = (m-1)^2\{(m-2)^2(1+u)\varphi_{m-2}(u) - (m - \tfrac{3}{2})\varphi_{m-1}(u)\}.$$

Der oder die Extremwerte von $P_m(u)$ treten also ein, wenn

$$(19) \qquad (m-2)^2(1+u)\varphi_{m-2}(u) = (m - \tfrac{3}{2})\varphi_{m-1}(u)$$

ist. Setzt man den hieraus folgenden Wert von $\varphi_{m-1}(u)$ in die sich aus (7) ergebende Gleichung

$$(20) \qquad \varphi_m(u) = (2m-3)u\varphi_{m-1}(u) + (m-2)^2(1-u^2)\varphi_{m-2}(u)$$

ein, so sieht man leicht, daß

$$(21) \qquad \varphi_m(u) = (m-2)^2(1+u)^2\varphi_{m-2}(u),$$

und wieder aus (19), daß

$$(22) \qquad \varphi_m(u) = (m - \tfrac{3}{2})(1+u)\varphi_{m-1}(u)$$

ist. Die Substitution von $\varphi_{m-1}(u)$ hieraus in (16) gibt den oder die Extremwerte $\bar{P}_m(u)$ von $P_m(u)$:

(23) $$\bar{P}_m(u) = \frac{\varphi_m(u)}{2(2m-3)}.$$

Derselbe oder dieselben sind also *positiv*. Auch ist $P_m(u)$ positiv für $u = 1$, nämlich mit Rücksicht auf (20) für $u = 1$:

(24) $$P_m(1) = \tfrac{1}{2}\varphi_{m-1}(1).$$

Jetzt sei

$$m = 2n;$$

dann ist für $u = 0$:

(25) $$P_{2n}(0) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2,$$

also auch positiv. Somit ist $P_m(u)$ für $m = 2n$ dauernd positiv, $\psi_{2n}(u)$ nimmt also dauernd zu, wenn u von 0 bis 1 geht, und da nach (11):

(26) $$\psi_m(1) = \frac{\varphi_m(1)}{2^{m-1} \cdot \sqrt{2}},$$

so folgt nach (9) und (12) der Maximalwert, den $R_{2n}(1)$ überhaupt annehmen kann:

(27) $$\text{Max. } R_{2n}(1) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (4n-2)} \cdot \sqrt{2}.$$

Weniger einfach ist der Verlauf der Funktion $\psi_m(u)$ zu beurteilen, wenn m eine ungerade Zahl $= 2n+1$ ist. In diesem Falle hat zunächst wieder der Differentialquotient $\psi'_{2n+1}(u)$ das Zeichen von $P_{2n+1}(u)$ (siehe (14)); für $u = 0$ ist aber der Wert des letzteren negativ, nämlich gemäß (16) und (10):

(28) $$P_{2n+1}(0) = -(2n + \tfrac{1}{2})(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2,$$

während für $u = 1$ nach (24) und (9)

(29) $$P_{2n+1}(1) = \tfrac{1}{2}\varphi_{2n}(1) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-3),$$

also positiv ist. Die Kurve $P_{2n+1}(u)$ schneidet demnach, wenn u von 0 bis 1 wächst, einmal oder eine ungerade Anzahl von Malen die Abscissenachse; im letzteren Falle würde aber $P_{2n+1}(u)$ *negative* Minima haben, was wegen Gl. (23), welche für gerades und ungerades m gilt, nicht stattfindet; folglich hat die Gleichung:

(30) $$P_{2n+1}(u) = 0$$

eine und *nur* eine Wurzel zwischen 0 und 1; sie werde durch u' bezeichnet und kann durch Auflösung der Gl. $(2n)$ten Grades

$$(31) \qquad 4n^2(1+u')\varphi_{2n}(u') - (2n+\tfrac{1}{2})\varphi_{2n+1}(u') = 0$$

gefunden werden. Die Kurve $\psi_{2n+1}(u)$ hat infolgedessen ein Minimum zwischen $u = 0$ und $u = 1$ und zwar für $u = u'$. *Sie besitzt aber auf dieser Strecke keinen Wendepunkt*, und demnach ist, da $1 - u' < 1$ ist:

$$(32) \qquad \text{Min. } \psi_{2n+1}(u) > \psi_{2n+1}(1) - 1 \cdot \psi'_{2n+1}(1).$$

Ehe wir aber an diese Beziehung die sehr einfachen Endschlüsse anknüpfen, müssen wir die voranstehende Behauptung beweisen, müssen also zeigen, daß $\psi''_{2n+1}(u)$ für u zwischen 0 und 1 dasselbe (positive) Vorzeichen beibehält.

Durch Vergleich von (18) mit (16) schließen wir unmittelbar, daß (für gerades oder ungerades m)

$$(33) \qquad \frac{dP_m(u)}{du} = (m-1)^2 P_{m-1}(u)$$

ist, und mit Rücksicht hierauf folgt durch Differentiation von (14) unter Einführung der Bezeichnung:

$$(34) \qquad V_m(u) = (m-1)^2(1+u)P_{m-1}(u) - (m+\tfrac{1}{2})P_m(u)$$

die Gleichung

$$(35) \qquad \psi''_m(u) = \frac{V_m(u)}{(1+u)^{m+\frac{3}{2}}}.$$

Auch führt die Differentiation von (34) leicht zu:

$$(36) \qquad \frac{dV_m(u)}{du} = (m-1)^2 V_{m-1}(u).$$

Ist nun $m = 2n+1$, so ist $V_m(u)$ positiv für $u = 0$ wie für $u = 1$, was sich leicht aus der Definition (34) von $V_m(u)$ mittels (25) und (28), bezw. (24) ergibt; dazwischen hat $V_{2n+1}(u)$ einen oder mehrere Minimalwerte, da $V_{2n}(0)$ negativ für $u = 0$, positiv für $u = 1$ ist, wie aus denselben Gleichungen zu ersehen. Wir zeigen, daß diese Minimalwerte und überhaupt die etwaigen für u zwischen 0 und 1 vorhandenen Extremwerte von $V_m(u)$ (wie diejenigen von $P_m(u)$) *positiv* sind. Drückt man $P_m(u)$ und $P_{m-1}(u)$ mittels (16) durch die $\varphi(u)$ aus, so kommt

$$(37) \qquad 4V_m(u) = 4(m-1)^2(m-2)^2(1+u)^2\varphi_{m-2}(u) \\ - 4(m-1)^2(2m-1)(1+u)\varphi_{m-1}(u) + (4m^2-1)\varphi_m(u);$$

ist v der Wert von u, für den $V_m'(u)$, also $V_{m-1}(u)$ verschwindet, so ist:

$$(38)\quad 0 = 4(m-2)^2(m-3)^2(1+v)^2\varphi_{m-3}(v) - 4(m-2)^2(2m-3)(1+v)\varphi_{m-2}(v) + (2m-1)(2m-3)\varphi_{m-1}(v);$$

dazu fügen wir noch zwei aus (20) folgende allgemein gültige Gleichungen:

$$(39)\quad 0 = (m-3)^2(1-u^2)\varphi_{m-3}(u) + (2m-5)u\varphi_{m-2}(u) - \varphi_{m-1}(u),$$

$$(40)\quad 0 = (m-2)^2(1-u^2)\varphi_{m-2}(u) + (2m-3)u\varphi_{m-1}(u) - \varphi_m(u).$$

Aus diesen vier Gleichungen können wir, wenn wir auch in (37), (39) und (40) für u den Spezialwert v annehmen, die drei Funktionen $\varphi_{m-3}(v)$, $\varphi_{m-2}(v)$ und $\varphi_{m-1}(v)$ eliminieren, oder, wenn wir zuerst $\varphi_{m-3}(v)$ aus (38) und (39) wegbringen, so daß die Gleichung

$$(41)\quad 0 = -4(m-2)^2(1+v)(2m-3-2v)\varphi_{m-2}(v) + \{(4(m-1)^2 + (2m-3)(2m-5)) - (4(2m-3)-1)v\}\varphi_{m-1}(v)$$

entsteht, aus (37), (40) und (41) $\varphi_{m-2}(v)$ und $\varphi_{m-1}(v)$ eliminieren. Multiplizieren wir zu diesem Zweck (37) mit 1, (40) mit A und (41) mit B, und bestimmen diese (auch von v abhängigen) Faktoren so, daß bei der Addition die Koeffizienten von $\varphi_{m-2}(v)$ und $\varphi_{m-1}(v)$ verschwinden, so ergibt sich

$$A = \frac{4(m-1)^2\{(8m^2-8m-7)-(8m+5)v\}}{(4(m-1)^2+(2m-3)(2m-5))-(8m-11)v},$$

$$4V_m(v) = (4m^2-1-A)\varphi_m(v)$$

und hieraus

$$(42)\quad 4\{(8m^2-24m+19)-(8m-11)v\}V_m(v) = 9(1+v)\varphi_m(v).$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist der Faktor von $V_m(v)$, *wo auch* v *zwischen* 0 *und* 1 *liegen mag*, (für $m > 2$) positiv, und die rechte Seite desgleichen, also auch $V_m(v)$ positiv. Daher ist $V_{2n+1}(u)$ auf der Strecke $u = 0$ bis 1 überhaupt positiv, und somit die Richtigkeit der Beziehung (32) erwiesen.

Nun ist nach (14) und (24)

$$\psi_m'(1) = \frac{P_m(1)}{2^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi_{m-1}(1)}{2^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2(2m-3)}\,\frac{\varphi_m(1)}{2^{m+\frac{1}{2}}},$$

d. i. nach (11):

$$\psi_m'(1) = \frac{\psi_m(1)}{4(2m-3)}$$

und also nach (32):

$$(43)\qquad \text{Min}\ \psi_{2n+1}(u) > \psi_{2n+1}(1)\left(1 - \frac{1}{4(4n-1)}\right).$$

Daraus folgt nun ähnlich wie oben (27), daß der Minimalwert, den $R_{2n+1}(1)$ überhaupt annehmen kann:

$$(44)\quad \text{Min}\ R_{2n+1}(1) > \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-3)(4n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(4n-2)\,4n}\cdot\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4(4n-1)}\right)$$

sein muß.[1])

Der wirkliche Rest der Arcussinus-Reihe hat aber, für $x = 1$, einen bestimmten Wert, den wir $R(1)$ nennen wollen; derselbe muß zwischen dem Maximum von $R_{2n}(1)$ und dem (kleineren) Minimum von $R_{2n+1}(1)$ liegen, weil sonst die beiden Gleichungen (1) und (2) mit einander in Widerspruch gerieten, und wir haben also das Resultat

$$(45)\qquad R(1) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(4n-2)}\sqrt{2}\left(1 - \frac{5\theta}{16n}\right)\qquad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

oder auch mit Hilfe des Wallisschen Produktes für π das folgende:

Der Rest der Arcussinus-Reihe für $x = 1$ nähert sich mit wachsendem n dem Ausdruck $1:\sqrt{n\pi}$.

2. Die Funktionen $P_m(u)$ lassen sich auch beiderseits über die Strecke $u = 0$ bis $u = 1$ hinaus verfolgen. Man findet:

Die Kurve $y = P_{2n}(u)$ beginnt, wenn u von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, mit $+\infty$, erreicht zwischen $u = 0$ und $u = 1$ ein positives Minimum und jenseits $u = 1$ ein Maximum; im weiteren Verlauf schneidet sie die Abscissenachse und strebt der negativen Unendlichkeit zu.

Die Kurve $y = P_{2n+1}(u)$ beginnt, für $u = -\infty$, mit $-\infty$, schneidet zwischen $u = 0$ und $u = 1$ die Abscissenachse, erreicht jenseits $u = 1$ ein Maximum, schneidet die Abscissenachse zum zweiten Mal und fällt ebenfalls bis $-\infty$.

Die Punkte, in denen die Kurven $y = P_m(u)$, aus dem Positiven ins Negative übergehend, die Abscissenachse schneiden, rücken mit wachsendem Index m immer weiter hinaus.

Die Diskussion der Funktion $V_m(u)$ scheint weniger einfach zu sein, da zu untersuchen wäre, ob die linke Seite der Gl. (42) auch für $v > 1$ positiv bleibt.

---

1) Der größte Wert von $R_{2n+1}(1)$ wird bei $u = 0$ gewonnen, er ist $2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ und (bei großem n) etwa doppelt so groß als jeder der beiden Werte Max $R_{2n}(1)$ (s. (27)) und Min $R_{2n+1}(1)$ (s. (44)), kommt also nicht weiter in Betracht.

Mittels der Ausdrücke (10), (25) und (28) und der Gl. (8), bez. (33) lassen sich auch $\varphi_m(u)$ und $P_m(u)$, da es ganze Funktionen sind, nach Potenzen von u entwickeln. Man findet mit Hilfe der Maclaurinschen Reihe

$$(46)\quad \varphi_{2n+1}(u) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2 \Big\{ 1 + (2n)^2 \frac{u^2}{2!} + (2n(2n-2))^2 \frac{u^4}{4!} + (2n(2n-2)(2n-4))^2 \frac{u^6}{6!} + \cdots + (2n(2n-2)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n}}{(2n)!} \Big\}$$

und durch Differentiation

$$(47)\quad \varphi_{2n}(u) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2 \Big\{ u + (2n-2)^2 \frac{u^3}{3!} + ((2n-2)(2n-4))^2 \frac{u^5}{5!} + \cdots + ((2n-2)(2n-4)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \Big\}$$ [1],

sodann

$$(48)\quad P_{2n+1}(u) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2 \Big\{ -\frac{4n+1}{2} + (2n)^2 u - \frac{4n-3}{2}(2n)^2 \frac{u^2}{2!} + (2n(2n-2))^2 \frac{u^3}{3!} - \frac{4n-7}{2}(2n(2n-2))^2 \frac{u^4}{4!} \pm \cdots + (2n(2n-2)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} - \tfrac{1}{2}(2n(2n-2)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n}}{(2n)!} \Big\}$$

und endlich:

$$(49)\quad P_{2n}(u) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2 \Big\{ 1 - \frac{4n-3}{2} u + (2n-2)^2 \frac{u^2}{2!} - \frac{4n-7}{2}(2n-2)^2 \frac{u^3}{3!} + ((2n-2)(2n-4))^2 \frac{u^4}{4!} \mp \cdots + ((2n-2)(2n-4)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} - \tfrac{1}{2}((2n-2)\cdots 2)^2 \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \Big\}.$$

Die Funktion $V_m(u)$ läßt sich in gleicher Art entwickeln.

Königsberg, Juli 1901.

---

1) Oder auch in etwas anderer und auf anderem Wege gefundener Form:

$$\varphi_{2n}(u) = \sum_{h=0}^{n-1} (2h+1)!\,((2n-1)_{2h+1}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2h-3))^2 u^{2h+1}$$

$$\varphi_{2n+1}(u) = \sum_{h=0}^{n} (2h)!\,((2n)_{2h}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2h-1))^2 u^{2h}$$

$(0! = 1,\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (-1) = 1.)$

Sätze über Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß.

Von R. v. LILIENTHAL in Münster i. W.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungshalbmesser für einen Punkt (P) einer Fläche, so kann man fragen, unter welchen Umständen eine Gerade, die den Endpunkt von $\varrho_1(\varrho_2)$ mit einem Punkt der Tangente der zu $\varrho_2(\varrho_1)$ gehörenden Krümmungslinie verbindet, ein Normalensystem erzeugt, falls der Punkt (P) die Fläche durchwandert. Für den Abstand des Punktes (P) von dem Schnittpunkt der Geraden mit der genannten Tangente erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die sich bei den Flächen von konstanter negativer Krümmung sofort befriedigen läßt. Die direkte Herleitung der so erhaltenen Normalensysteme und einiger Eigenschaften derselben ist die Absicht der folgenden Betrachtungen, in deren Verlauf sich ein sehr einfacher Weg zur Aufstellung der Quadraturen finden wird, durch die sich, einem Lieschen Satze gemäß, die Krümmungslinien der Weingartenschen Flächen bestimmen lassen.

I.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

Die Koordinaten x, y, z der Punkte einer Fläche seien Funktionen der Veränderlichen u und v. Wir zerlegen die quadratische Form von du und dv, deren Verschwinden die Gleichung der Krümmungslinien liefert, in lineare Faktoren und multiplizieren letztere mit den noch zu bestimmenden Funktionen ν und μ. So entstehe:

$$\nu(\alpha_{11}du + \alpha_{12}dv) = T_1, \quad \mu(\alpha_{21}du + \alpha_{22}dv) = T_2;$$

und $T_2 = 0\ (T_1 = 0)$ sei die Differentialgleichung der zum Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_1(\varrho_2)$ gehörenden Krümmungslinien. Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$dx = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\alpha_{22} - \frac{\partial x}{\partial v}\alpha_{21}}{\nu(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})} T_1 + \frac{-\frac{\partial x}{\partial u}\alpha_{12} + \frac{\partial x}{\partial v}\alpha_{11}}{\mu(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})} T_2 = A_1 T_1 + A_2 T_2,$$

$$dy = B_1 T_1 + B_2 T_2, \quad dz = C_1 T_1 + C_2 T_2$$

und nehmen:

$$\nu = \frac{\sqrt{E\alpha_{22}^2 - 2F\alpha_{21}\alpha_{22} + G\alpha_{21}^2}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad \mu = \frac{\sqrt{E\alpha_{12}^2 - 2F\alpha_{11}\alpha_{12} + G\alpha_{11}^2}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}},$$

sodaß:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = 1.$$

Hiernach sind A_1, B_1, C_1 (A_2, B_2, C_2) nichts weiter als die Richtungskosinus der Tangenten der zu $\varrho_1(\varrho_2)$ gehörenden Krümmungslinien, und wenn wir die Bogenlänge der letzteren mit $s_1(s_2)$ bezeichnen, können wir setzen:

$$A_1 = \frac{dx}{ds_1}, \qquad A_2 = \frac{dx}{ds_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Bei dieser Schreibweise ist, wenn $f(u, v)$ eine Funktion von u und v bedeutet, das Zeichen $\frac{df}{ds_1}$ folgendermaßen als Grenzwert aufzufassen. Längs der durch den Punkt (P) gehenden und zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie sind u und v Funktionen *einer* Veränderlichen, etwa t. Beim Übergang vom Punkte (P) zu einem zweiten Punkt der Kurve mögen u, v, s_1, t die Zuwüchse $\Delta u, \Delta v, \Delta s_1, \Delta t$ erhalten. Dann ist:

$$\frac{df}{ds_1} = \lim_{(\Delta t = 0)} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta s_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}.$$

Weil aber:

$$\alpha_{21}\frac{du}{dt} + \alpha_{22}\frac{dv}{dt} = 0,$$

erhält man:

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\alpha_{22} - \frac{\partial f}{\partial v}\alpha_{21}}{\sqrt{E\alpha_{22}^2 - 2F\alpha_{21}\alpha_{22} + G\alpha_{21}^2}}.$$

Entsprechend folgt:

$$\frac{df}{ds_2} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u}\alpha_{12} + \frac{\partial f}{\partial v}\alpha_{11}}{\sqrt{E\alpha_{12}^2 - 2F\alpha_{11}\alpha_{12} + G\alpha_{11}^2}}.$$

Falls $\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)$ die geodätische Krümmung der zu $\varrho_1(\varrho_2)$ gehörenden Krümmungslinien und $\nu_1(\nu_2)$ einen integrierenden Faktor der Differentialform $T_1(T_2)$ bedeutet, hat man:

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{d\log\nu_1}{ds_2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\log\nu_2}{ds_1}$$

Mit X, Y, Z sollen die Richtungskosinus der Flächennormalen bezeichnet werden. Dann bestehen die Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} dX = -\frac{A_1}{\varrho_1} T_1 - \frac{A_2}{\varrho_2} T_2, \\ dA_1 = \left(\frac{A_2}{R_1} + \frac{X}{\varrho_1}\right) T_1 - \frac{A_2}{R_2} T_2, \\ dA_2 = -\frac{A_1}{R_1} T_1 + \left(\frac{A_1}{R_2} + \frac{X}{\varrho_2}\right) T_2; \end{cases}$$

$$(3)\quad \frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_2} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right), \quad \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_1} = \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Nehmen wir jetzt:

$$\frac{d\frac{df}{ds_1}}{ds_2} = \frac{d^2 f}{ds_1\, ds_2}, \quad \frac{d\frac{df}{ds_2}}{ds_1} = \frac{d^2 f}{ds_2\, ds_1},$$

so besteht die Gleichung:

$$(4)\quad \frac{d^2 f}{ds_1\, ds_2} - \frac{d^2 f}{ds_2\, ds_1} = \frac{1}{R_1}\frac{df}{ds_1} - \frac{1}{R_2}\frac{df}{ds_2}.$$

Der Ausdruck $a T_1 + b T_2$ ist daher ein exaktes Differential, wenn:

$$(5)\quad \frac{da}{ds_2} - \frac{db}{ds_1} = \frac{a}{R_1} - \frac{b}{R_2}.$$

Zum Beweise dieser — für den Fall, daß die Krümmungslinien mit den Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zusammenfallen, längst bekannten[1]) — Formeln sei auf meine Entwicklungen in den Mathematischen Annalen Bd. 42, S. 508 und meine Schrift: „Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen" S. 10 verwiesen. (Vgl. Encyklopädie der mathem. Wissensch. Bd. III, D 3, S. 125, 160.) Man überzeugt sich am einfachsten von der Richtigkeit dieser Formeln, wenn man — $\nu_1 T_1 = dp$, $\nu_2 T_2 = dq$ setzend — berücksichtigt, daß:

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{\nu_1}\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{\nu_2}\frac{\partial f}{\partial q}, \quad ds^2 = \frac{dp^2}{\nu_1^2} + \frac{dq^2}{\nu_2^2},$$

wodurch man in das Fahrwasser der gewöhnlichen Methoden gelangt ist; nur muß man sich darüber klar sein, daß die sich mit Hilfe der Veränderlichen p und q vollziehende Berechnung der Ableitungen nach s_1 und s_2 erst praktisch ausführbar wird nach der Integration der

1) Vergl. E. Cesàro: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsch von G. Kowalewski. S. 198

Differentialgleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, und Berechnung integrierender Faktoren ν_1 und ν_2, während die mit Hilfe der Variabeln u und v sich vollziehende Berechnung jener Ableitungen stets möglich bleibt.

II.

Normalensysteme.

Wir gehen zu den Flächen von konstanter, negativer Krümmung über und setzen $\varrho_1 \varrho_2 = -c^2$. Trägt man von jedem Flächenpunkt (P) aus auf den Tangenten der Krümmungslinien nach beiden Seiten hin die Strecke c auf, so werden dem Punkte (P) vier Punkte P_1, P_1', P_2, P_2' zugeordnet, und ihre x-Koordinaten sind:

$$x_1 = x + cA_1, \quad x_1' = x - cA_1, \quad x_2 = x + cA_2, \quad x_2' = x - cA_2.$$

Die Endpunkte von ϱ_1 und ϱ_2 seien mit $P'(x', y', z')$, $P''(x'', y'', z'')$ bezeichnet, sodaß:

$$x' = x + \varrho_1 X, \quad x'' = x + \varrho_2 X.$$

Die durch die Punkte (P_2, P'), (P_2', P'), (P_1, P''), (P_1', P'') gelegten Geraden erzeugen, wenn (P) die gegebene Fläche durchwandert, vier Strahlensysteme. Wir wollen zeigen, daß jedes derselben ein Normalensystem ist.

Fassen wir das erste dieser Systeme ins Auge und betrachten als Ausgangsfläche seiner Strahlen die von dem Punkte (P_2) beschriebene Fläche.

Die Richtungskosinus der Strahlen des Systems haben die Werte:

$$\xi_1 = \frac{cA_2 - \varrho_1 X}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}, \quad \eta_1 = \frac{cB_2 - \varrho_1 Y}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}, \quad \zeta_1 = \frac{cC_2 - \varrho_1 Z}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}.$$

Die Koordinaten einer beliebigen, durch das Strahlensystem gelegten Fläche können in der Form dargestellt werden:

$$u_1 = x + cA_2 + \lambda\xi_1, \quad v_1 = y + cB_2 + \lambda\eta_1, \quad w_1 = z + cC_2 + \lambda\zeta_1,$$

und man hat bei Anwendung der Gleichungen (2.)

$$\frac{du_1}{ds_1} = A_1\left(1 - \frac{c}{R_1}\right) + \frac{d\lambda}{ds_1}\xi_1 + \lambda\frac{d\xi_1}{ds_1},$$

$$\frac{du_1}{ds_2} = \frac{cA_1}{R_2} + \left(\frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}{c} + \frac{d\lambda}{ds_2}\right)\xi_1 + \lambda\frac{d\xi_1}{ds_2}.$$

Wenn das Strahlensystem ein Normalensystem ist, muß sich λ so als Funktion von u und v bestimmen lassen, daß die Strahlen des

Systems mit den Normalen der Fläche (u_1, v_1, w_1) zusammenfallen. Dies erfordert das Bestehen der Gleichungen:

$$\sum \xi_1 \frac{du_1}{ds_1} = 0, \quad \sum \xi_1 \frac{du_1}{ds_2} = 0,$$

oder:

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = 0, \quad \frac{d\lambda}{ds_2} = -\frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}{c}.$$

Man hat also:

$$d\lambda = -\frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}{c} T_2,$$

d. h. die Differentialform $\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}\, T_2$ muß ein vollständiges Differential sein. Dies ist tatsächlich der Fall. Die Anwendung der Integrabilitätsbedingung (5) liefert nämlich eine Identität, da die zweite Gleichung (3) hier mit der folgenden:

$$\frac{d\varrho_1}{ds_1} = \frac{\varrho_1^2 + c^2}{\varrho_1 R_2}$$

übereinstimmt.

Das betrachtete Strahlensystem ist somit, wie behauptet, ein Normalensystem, und da der Beweis bestehen bleibt, wenn überall c durch $-c$ ersetzt wird, so ist auch das zweite der oben erwähnten Strahlensysteme ein Normalensystem.

Bei dem dritten der fraglichen Strahlensysteme sind die Richtungskosinus der Strahlen die folgenden:

$$\xi_2 = \frac{cA_1 - \varrho_2 X}{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2}}, \quad \eta_2 = \frac{cB_1 - \varrho_2 Y}{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2}}, \quad \zeta_2 = \frac{cC_1 - \varrho_2 Z}{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2}}.$$

Eine Orthogonalfläche des Systems wird dargestellt durch die Gleichungen

$$u_2 = x + cA_1 + \mu\xi_2, \quad v_2 = y + cB_1 + \mu\eta_2, \quad w_2 = z + cC_1 + \mu\zeta_2,$$

falls:

$$\mu = -\frac{1}{c}\int \sqrt{\varrho_2^2 + c^2} \cdot T_1,$$

wo der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein exaktes Differential ist. Da auch hier der Beweis bestehen bleibt, wenn c überall durch $-c$ ersetzt wird, ist unsere Behauptung in allen vier Fällen gerechtfertigt.

Zugleich zeigt unsere Entwicklung die folgenden beiden Sätze:
1. Betrachtet man eine Orthogonalfläche des ersten (zweiten) Strahlensystems, so ist ihre auf den Strahlen des Systems gemessene Entfer-

nung von der Ortsfläche des Punktes $P_2\,(P_2')$ längs jeder zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie konstant. Nimmt man aber eine Orthogonalfläche des dritten (vierten) Strahlensystems, so ist ihre auf den Strahlen des Systems gemessene Entfernung von der Ortsfläche des Punktes $P_1\,(P_1')$ längs jeder zu ϱ_2 gehörenden Krümmungslinie konstant.

2. Die Integration der Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche mit dem konstanten negativen Krümmungsmaß $\frac{-1}{c^2}$ wird bewerkstelligt durch die Quadratur der exakten Differentiale

$$\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}\, T_2, \quad \sqrt{\varrho_2^2 + c^2}\, T_1.$$

Wir geben hierfür noch einen anderen Beweis. Bekanntlich hat Lie[1]) aus dem Weingartenschen Satz über das Linearelement der Krümmungsmittelpunktflächen derjenigen Flächen, bei denen die Hauptkrümmungshalbmesser durch eine Gleichung verbunden sind, die Folgerung gezogen, daß die Krümmungslinien dieser Flächen sich durch Quadraturen bestimmen lassen. Wenn $d\sigma_1\,(d\sigma_2)$ das Linienelement der zu $\varrho_1\,(\varrho_2)$ gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche bezeichnet, so sind nach Lie die Ausdrücke:

$$e^{-\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} \sqrt{d\sigma_1^2 - d\varrho_1^2}, \quad e^{-\int \frac{d\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}} \sqrt{d\sigma_2^2 - d\varrho_2^2}$$

exakte Differentiale. Bei Anwendung der Gleichungen (2) erhält man:

$$d\sigma_1^2 - d\varrho_1^2 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 T_2^2, \quad d\sigma_2^2 - d\varrho_2^2 = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 T_1^2,$$

sodaß die obigen Ausdrücke die Gestalt annehmen:

$$\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) e^{-\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} T_2, \quad \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) e^{-\int \frac{d\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}} T_1.$$

Der Liesche Satz läßt sich mit alleiniger Hilfe unserer Gleichungen (1) und (3) nachweisen. Wir geben den letzteren die Form:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)} \frac{d\varrho_1}{ds_2} = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)} \frac{d\varrho_2}{ds_1} = \frac{1}{R_2},$$

und erkennen nach (5), daß die Ausdrücke

$$e^{\int \frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)} d\varrho_1} T_1, \quad e^{\int \frac{\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)} d\varrho_2} T_2$$

1) Darboux' Bulletin 1880. S. 301.

exakte Differentiale sind. Diese Ausdrücke stimmen mit den obigen überein, da:

$$\frac{\varrho_2 d\varrho_1}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)} = d\log\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) - \frac{d\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}, \quad \frac{\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)} = d\log\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) - \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Für $\varrho_1 \varrho_2 = -c^2$ wird:

$$\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) e^{-\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} = \frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}{c^2}, \quad \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) e^{-\int \frac{d\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}} = \frac{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2}}{c^2},$$

sodaß auch auf diesem Wege sich die Größen $\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}$, $\sqrt{\varrho_2^2 + c^2}$ als integrierende Faktoren von T_2 und T_1 ergeben.

III.

Eigenschaften der betrachteten Normalensysteme.

Um die Krümmungslinien und Hauptkrümmungshalbmesser der Orthogonalflächen des ersten Strahlensystems zu finden, gehen wir von dem Satz aus, daß längs einer Krümmungslinie:

$$dx + h dX = dy + h dY = dz + h dZ = 0$$

ist, wo $1/h$ die Normalkrümmung derjenigen Krümmungslinie bedeutet, auf welche sich die auftretenden Differentiale beziehen. In dem in Rede stehenden Fall ist daher längs einer Krümmungslinie:

$$du_1 + h d\xi_1 = 0$$

oder:

$$A_1 \left\{ \left(1 - \frac{c}{R_1}\right) T_1 + \frac{c}{R_2} T_2 \right\} + (\lambda + h) d\xi_1 = 0.$$

Man hat aber:

$$\frac{d\xi_1}{ds_1} = \frac{A_1\left(1 - \frac{c}{R_1}\right) - \frac{c}{\varrho_1 R_2}(\varrho_1 A_2 + cX)}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}, \quad \frac{d\xi_1}{ds_2} = \frac{A_1 \frac{c}{R_2} - \frac{\varrho_1}{c^2}\left(1 - \frac{c}{R_1}\right)(\varrho_1 A_2 + cX)}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}.$$

Wir können daher die obige Beziehung in folgende Form setzen:

$$A_1 \left\{ \left(1 - \frac{c}{R_1}\right) T_1 + \frac{c}{R_2} T_2 \right\} \left\{ 1 + \frac{\lambda + h}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}} \right\}$$
$$- \frac{(\lambda + h)(\varrho_1 A_2 + cX)}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}} \left\{ \frac{c}{\varrho_1 R_2} T_1 + \frac{\varrho_1}{c^2}\left(1 - \frac{c}{R_1}\right) T_2 \right\} = 0.$$

Die beiden weiteren aus den Gleichungen:

$$dv_1 + h d\eta_1 = 0, \quad dw_1 + h d\zeta_1 = 0$$

hervorgehenden Beziehungen ergeben sich aus der hingeschriebenen, wenn A_1, A_2, X bez. ersetzt wird durch B_1, B_2, Y und C_1, C_2, Z. Es müssen daher die Koeffizienten von A_1 und $\varrho_1 A_2 + cX$ verschwinden. Wir haben somit den Satz gewonnen, daß die beiden Hauptkrümmungsradien h_1 und h_2 durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad h_1 = -\lambda - \sqrt{\varrho_1^2 + c^2}, \quad h_2 = -\lambda,$$

die zugehörigen Krümmungslinien durch die Differentialgleichungen:

$$(7) \quad \frac{c}{\varrho_1 R_2} T_1 + \frac{\varrho_1}{c^2}\left(1 - \frac{c}{R_1}\right) T_2 = 0, \qquad (8) \quad \left(1 - \frac{c}{R_1}\right) T_1 + \frac{c}{R_2} T_2 = 0$$

bestimmt werden. Die gefundenen Werte von h_1 und h_2 zeigen, daß die zu h_2 gehörende Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche unserer Fläche mit der Ortsfläche des Punktes (P_2), die zu h_1 gehörende Schale aber mit der zu ϱ_1 gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche der gegebenen pseudosphärischen Fläche zusammenfällt.

Hinsichtlich der Differentialgleichung (7) gilt der Satz, daß sich ihre Integration auf die Quadratur zurückführen läßt, welche die Größe λ liefert. Mit Hilfe der aus (3) folgenden Beziehungen

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{c^2}{\varrho_1(\varrho_1^2 + c^2)} \frac{d\varrho_1}{ds_2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1^2 + c^2} \frac{d\varrho_1}{ds_1}$$

nimmt nämlich die Differentialgleichung (7) die Form an:

$$\frac{c^2}{\varrho_1 \sqrt{\varrho_1^2 + c^2}} d\varrho_1 = -\frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2}}{c} T_2,$$

die das Integral ergibt:

$$\log \frac{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2} + \varrho_1 - c}{\sqrt{\varrho_1^2 + c^2} + \varrho_1 + c} = \frac{\lambda}{c}.$$

Für das dritte Strahlensystem folgt in ähnlicher Weise, daß die Hauptkrümmungshalbmesser einer Orthogonalfläche durch die Ausdrücke:

$$-\mu - \sqrt{\varrho_2^2 + c^2}, \quad -\mu;$$

die zugehörigen Krümmungslinien durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{\varrho_2}{c^2}\left(1 - \frac{c}{R_2}\right) T_1 + \frac{c}{\varrho_2 R_1} T_2 = 0, \quad \frac{c}{R_1} T_1 + \left(1 - \frac{c}{R_2}\right) T_2 = 0$$

bestimmt werden, von denen die erste das Integral besitzt:

$$\log \frac{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2} + \varrho_2 - c}{\sqrt{\varrho_2^2 + c^2} + \varrho_2 + c} = \frac{\mu}{c},$$

was man leicht erkennt, wenn man die aus (3) folgenden Beziehungen:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_2^2 + c^2} \frac{d\varrho_2}{ds_2}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{c_2}{\varrho_2(\varrho_2^2 + c^2)} \frac{d\varrho_2}{ds_1}$$

anwendet. Die entsprechenden Ergebnisse für das zweite (vierte) Strahlensystem ergeben sich aus den für das erste (dritte) geltenden durch Vertauschung von c mit $-c$.

Berücksichtigt man, daß einer Schar von Krümmungslinien auf der zugehörigen Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche eine Schar geodätischer Linien entspricht, so kennt man nach den obigen Sätzen, falls für eine pseudosphärische Fläche die Gleichungen der Krümmungslinien in endlicher Form gefunden sind, für jede der beiden Schalen ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche die Gleichungen von drei Scharen geodätischer Linien in endlicher Form.

Münster i. W., 22. Mai 1902.

Winkel- und Streckenteilung in der Lobatschefskijschen Geometrie.

Von H. LIEBMANN in Leipzig.

Bekanntlich gibt es außer der Euklidischen Geometrie nur noch zwei Arten von Geometrien, in denen man jede Figur, ohne ihre Bestimmungsstücke zu ändern, frei bewegen kann[1]), die *hyperbolische* (von Lobatschefskij[2]) und Bolyai unabhängig entdeckt) und die *elliptische* (Riemann-Helmholtzsche), von der wiederum die *sphärische* Geometrie ein Spezialfall ist. Zwischen diesen beiden Arten von Geometrien besteht nun aber der wesentliche Unterschied, daß in der elliptischen Geometrie das „vollkommene Prinzip der Dualität" herrscht[3]), insofern die Länge einer geraden Linie endlich ist, wie auch die Summe der Winkel mit gemeinsamem Scheitel, während in der

---

1) Daß diese Annahme (zusammen mit der in allen Geometrien bestehenden Gültigkeit der Euklidischen Geometrien im Unendlichkleinen, zur Ableitung der Grundformeln der Trigonometrie in der hyperbolischen und elliptischen Geometrie ausreicht, hat Gauß gezeigt (Gauß Werke VIII, S. 255).

2) Vgl.: N. J. Lobatschefskij: Zwei Geometrische Abhandlungen, übersetzt und herausgegeben von F. Engel. Leipzig 1898. Im folgenden angeführt mit „L".

3) Vgl.: F. Klein: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. (Math. Annalen 6, 573—625.)

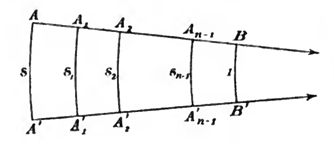
hyperbolischen zwar die letztere Tatsache bestehen bleibt, die Länge der unbegrenzten Geraden aber unendlich wird.

Dieser Unterschied der beiden Geometrien kommt nun aber auch bei der Winkel- und Streckenteilung zur Geltung. In der sphärischen Geometrie z. B. erkennt man ohne weiteres durch Übergang von einer Figur zur Polarfigur, daß die Winkelteilung sich auf die Streckenteilung zurückführen läßt; denn bei diesem Übergang verwandelt sich der Winkel zwischen zwei Richtungen in ein Stück eines größten Kreisbogens. Anders in der hyperbolischen Geometrie: Hier ist die Teilung des Winkels in beliebig viele gleiche Teile selbst dann nicht möglich, wenn man die Möglichkeit der Streckenteilung annimmt.

Dies soll hier gezeigt werden.

1. *Die Streckenteilung in der hyperbolischen Geometrie.*

Gegeben sei eine Strecke AB, und auf ihr $n-1$ Punkte $A_1, \ldots, A_{n-1}$ (s. d. Figur), so daß $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}\,B$ ist. Durch B legen wir den Grenzkreis, dessen Achse AB ist, und legen dann durch den Punkt B' auf ihm die Parallele zu AB, die wir rückwärts verlängern, bis sie den durch A gehenden Grenzkreis schneidet, dessen Achse AB ist.



Durch $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ legen wir ferner lauter Grenzkreise mit der Achse AB, welche die Strecke $A'B'$ in den Punkten $A', A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ treffen mögen. Bezeichnen wir die Längen der Grenzbogenstücke mit $s, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 1$ (B' kann immer so angenommen werden, daß der Bogen $BB' = 1$ ist), so ist[1])

$$s : s_1 = s_1 : s_2 = s_2 : s_3 \ldots = s_{n-1} : 1,$$

also

$$\frac{s}{s_1} = \sqrt[n]{s}\,.$$

Hieraus sieht man: *Um die Strecke AB in n gleiche Teile zerlegen zu können, muß man die $n$te Wurzel aus einem Grenzkreisbogen ziehen.*

2. *Zurückführung auf Konstruktionen der Euklidischen Geometrie.*

Auf der Grenzfläche gilt die Euklidische Geometrie[2]), wobei an Stelle der geraden Linien der Euklidischen Geometrie die Grenzkreisbogen auf der Grenzfläche treten, und man kann alle Konstruktionen, die sich in der Euklidischen Geometrie mit Zirkel und Lineal aus-

1) „L". S. 189. 2) „L". S. 12.

führen lassen, wie sich leicht einsehen läßt, daher auch auf der Grenzfläche ausführen: Man kann jeden Winkel bloß mit Benutzung von Zirkel und Lineal in 2^n gleiche Teile zerlegen, man kann jedes beliebige Grenzbogenstück in n gleiche Teile zerlegen usw. (Genauer gesagt: Wenn Anfangs- und Endpunkt eines Grenzkreisbogens gegeben sind, so kann man die Teilpunkte für eine Teilung in n gleiche Teile angeben.)

Dagegen kann man einen beliebigen Winkel *nicht* in n gleiche Teile zerlegen, man kann auch nicht die $n$te Wurzel aus einem beliebigen Grenzkreisbogen ziehen (sobald nicht $n = 2^m$), usw., weil die entsprechenden Konstruktionen der Euklidischen Geometrie unmöglich sind.

3. *Streckenteilung und Winkelteilung.*

Nimmt man an, daß man in der hyperbolischen Geometrie eine beliebige geradlinige Strecke in n gleiche Teile zerlegen kann, so wäre damit die Möglichkeit gegeben, in der Euklidischen Geometrie (auf der Grenzfläche) *alle* Konstruktionen auszuführen, die die beliebig oft wiederholte Wurzelziehung aus einer positiven reellen Zahl erfordern.

Das genügt aber nicht einmal, um einen beliebigen Winkel in *drei* gleiche Teile zu zerlegen. Denn die Gleichung dritten Grades

$$4\left(\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{\varphi}{3} - \cos\varphi = 0$$

in der $\cos\varphi$ bekannt ist, während $\cos\frac{1}{3}\varphi$ gesucht ist, führt auf den *Casus irreducibilis* der Cardanischen Formel, da sie die drei reellen Wurzeln hat:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right).$$

In diesem Falle aber versagt nicht nur die Cardanische Formel; es läßt sich sogar die Unbekannte überhaupt nicht durch reelles Wurzelziehen bestimmen.[1])

Es ist also, selbst wenn die Teilung geradliniger Strecken in der hyperbolischen Ebene möglich wäre, schon die Dreiteilung des Winkels und umsomehr die n-Teilung unter dieser Voraussetzung noch nicht ausführbar.

Leipzig, 25. Februar 1902.

1) Vgl. O. Hölder: Über den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades. Math. Annalen **38**, S. 307 ff.

Über neuere Fortschritte in der Konstruktion stark auflösender Spektralapparate.

Von E. Gehrcke in Berlin.

Zeeman entdeckte, daß die von einer Lichtquelle emittierten Wellen eine eigentümliche Veränderung erfahren, wenn die Lichtquelle in ein magnetisches Kraftfeld versetzt wird. Durch die Auffindung dieser fundamentalen Erscheinung im Verein mit ihrer von Lorentz gegebenen theoretischen Erklärung ist der Forschung ein bedeutender Anstoß gegeben worden. Während man vordem, unter dem dominierenden Einfluß der Maxwellschen Theorie, bei der Behandlung der optischen Phänomene besonders den im „Äther" stattfindenden Prozeß der Wellenbewegung und Wellenfortpflanzung ins Auge gefaßt hatte, ist in neuerer Zeit und vor allem im Anschluß an die Entdeckung Zeemans die Aufmerksamkeit wieder intensiv auf den eigentlichen Leuchtmechanismus, auf die Vorgänge im Emissionszentrum des Lichtes selbst hingelenkt worden.

Es erscheint heute als sehr aussichtsreich, diesen lange Zeit weniger beachteten Vorgang der Lichtemission zu bearbeiten, umsomehr als wir im Besitz einer Theorie sind, welche offenbar geeignet ist, für die weitere Forschung brauchbare Fingerzeige an die Hand zu geben. Doch stellen sich hier nicht unbedeutende experimentelle Schwierigkeiten in den Weg. Die in Betracht kommenden Erscheinungen sind ziemlich diffizil, und die Änderungen der Wellenlängen, um die es sich hier handelt, sind recht klein im Vergleich zu dem, was mit den vorzüglichsten Apparaten bis vor kurzem beobachtet werden konnte.

Diese außerordentliche Feinheit der auf den Leuchtmechanismus bezüglichen Phänomene, welche teils, wie die oben genannte von Zeeman gefundene Erscheinung, bereits bekannt sind, teils sich aus gewissen theoretischen Überlegungen erwarten lassen, rückt das Problem in den Vordergrund, die zur Trennung der Wellenlängen bisher vorhandenen Apparate zu verbessern. Die Lösung dieser Aufgabe soll uns im folgenden beschäftigen.

Man kannte bis vor kurzem zwei Typen von Spektralapparaten; die einen beruhen auf der Dispersion durch Prismen, die andern auf der Beugung an engen Spalten. Beide Typen, die Prismenapparate sowohl wie die Beugungsgitter, scheinen jedoch mit den heutigen Mitteln der Technik schwerlich einer bedeutenden Verbesserung fähig zu sein.

Wenn man hier weiter kommen will, muß man zu einem neuen Prinzip übergehen.

Das neue Prinzip besteht in der Anwendung von Interferenzen bei hohem Gangunterschied der interferierenden Strahlen. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß solche Interferenzen, *wenn sie sich erzeugen lassen*, vorzüglich geeignet erscheinen, sehr kleine Wellenlängendifferenzen zur Wahrnehmung zu bringen, resp. winzige Änderungen der Wellenlänge merklich zu machen. Angenommen etwa, wir hätten zwei Wellen λ und λ', welche sich von einander nur um $\frac{1}{10\,000}$ der Wellenlänge unterscheiden, und wir könnten durch geeignete Apparate bewirken, daß beide im Raume Interferenzstreifen hohen Gangunterschieds hervorrufen. Dann wird jede einzelne Welle ihre besonderen Interferenzstreifen erzeugen, und die beiden Interferenzsysteme werden sich überlagern. Ist etwa λ die kürzere Welle, so wird das Streifensystem dieser etwas enger sein als dasjenige von λ', so zwar, daß immer auf 10000 Streifen von λ', entsprechend einem Gangunterschied von 10 000 *längeren* Wellen λ', 10 001 Streifen von λ, entsprechend 10 001 *kürzeren* Wellen λ kommen. Dies heißt nichts anderes, als daß nach jedesmal 10 000 Wellenlängen von λ und λ' Interferenzstreifen gezeichnet werden, welche genau *auf einander* liegen; die beiden Interferenzsysteme sind in „Konsonanz". Nach der Hälfte dieses Weges, also nach 5000 Wellenlängen, wird die eine Welle λ' der andern λ erst um eine halbe Länge vorausgeeilt sein, das Interferenzbild ist hier ein anderes, die Streifen beider Wellen liegen *zwischen einander;* sie sind in „Dissonanz". Umgekehrt kann man nun, und darin besteht die neue Methode, aus der beobachteten Lage der Interferenzstreifen auf das Vorhandensein der Wellen λ und λ' schließen. Man würde in unserm Fall z. B. bei Anwendung von 5000 Wellenlängen Gangunterschied, d. i. bei einer Wegstrecke von ungefähr 2,5 mm Luft, aus der Beobachtung eines in Dissonanz befindlichen, doppelten Streifensystems den Schluß ziehen können, daß zwei Wellen vorhanden sind, welche sich um $\frac{1}{10\,000}$ der Wellenlänge von einander unterscheiden. Dieser Differenz würde in einem Prismen- oder Gitterapparat schon ein Linienabstand entsprechen, der etwa $= \frac{1}{10}$ des Abstandes der beiden Natriumlinien oder der beiden dunklen Fraunhoferschen Linien D_1 und D_2 beträgt, also eine Größe, welche nahe an die äußerste Grenze des mit diesen Apparaten noch getrennt Wahrnehmbaren herankommt. Es besteht aber in vielen Fällen durchaus die Möglichkeit, Interferenzen noch höheren Gangunterschieds zu erzeugen, und so sind denn die Leistungen der Prismen- und Gitterapparate bei weitem überholt; man ist in der Tat, wie wir sehen werden, heute im stande, Wellenlängendifferenzen zu beobachten,

welche nur ein Milliontel der Wellenlänge und noch weniger betragen.

Es soll hier nicht in extenso über die verschiedenen, bisher konstruierten Interferenzapparate berichtet werden, mit denen man eine hohe Auflösung der Spektrallinien erzielen kann.[1]) Wir wollen nur *einen* Apparat genauer betrachten, und zwar denjenigen, welcher aus verschiedenen Gründen als der zur Zeit brauchbarste und leistungsfähigste angesehen werden darf. Derselbe ist in der Reichsanstalt von Herrn Lummer in Gemeinschaft mit dem Verfasser konstruiert worden[2]) und bedient sich der an einer planparallelen Glasplatte bei streifendem Austritt der Strahlen entstehenden Lummerschen „Interferenzkurven gleicher Neigung.“

Die gewöhnlich in den Vorlesungen und in vielen Lehrbüchern allein behandelten Interferenzen, wie man sie z. B. beim Newtonschen Farbenglase oder beim Fresnelschen Spiegelversuch erzeugt, sind für unsern Zweck nicht verwendbar. Alle diese Interferenzen sind nämlich sogenannte „Kurven gleicher Dicke“ und werden durch Strahlen gebildet, welche in einem beliebigen Punkte des Interferenzbildes mit mehr oder weniger *verschiedenen* Phasendifferenzen zugleich interferieren. Dadurch aber wird eine Unschärfe des Phänomens hervorgerufen, welche, wie sich zeigen läßt, bei hohem Gangunterschied mehr und mehr stört und schließlich das vollständige Unsichtbarwerden der Streifen zur Folge hat.

Die einzigen bekannten Interferenzerscheinungen, welche auch bei hohem Gangunterschied unter Voraussetzung einer genügend homogenen Lichtquelle noch scharfe, gut beobachtbare Streifen liefern, sind solche, bei denen in jedem Punkte des Bildes allein *parallele* Strahlen interferieren. Die dann entstehenden „Interferenzkurven gleicher Neigung“ sind zuerst in ihrer Bedeutung von Lummer erkannt worden und treten z. B. an jeder planparallelen Platte auf.

1. — Es falle (vergl. Fig. 1) der Lichtstrahl AB, herrührend von einer Welle λ, unter dem Einfallswinkel i auf die planparallele Platte PQ. Dann wird ein Teil des Lichtes reflektiert, ein anderer dringt in die Platte unter dem Brechungswinkel r ein. Verfolgen wir diesen bei C

---

1) A. Boulouch, Journ. de phys. (2) **2**, 316—320. 1893. A. Perot u. Ch. Fabry, Ann. de chim. et phys. (7) **12**, 459—501. 1897; Compt. rend. 1897, 1898, 1899 und 1900; Ann. de chim. et phys. (7) **16**. 1899 und Bulletin Astron. Janvier 1899; vgl. auch M. Hamy, Compt. rend. **125**, 1092—1094. 1897. A. A. Michelson, Astrophys. Journ. **8**, 36—47. 1898; Journ. de phys. (3) **8**, 305—314. 1899. O. Lummer, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellschaft **3**, 85—98, 1901.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 11—17. 1902; Ann. d. Phys. (4) **10**, 457—477, 1903.

nochmals reflektierten, bei D wieder austretenden Strahl weiter, so entstehen also aus AB zwei parallele, interferenzfähige Strahlen BG und DE, welche durch eine Konvexlinse L bei F zur Interferenz gebracht werden können. Da die Linse L parallele Strahlen in demselben Punkte der Brennebene vereinigt, ohne neue Gangunterschiede zu veranlassen, so werden folglich sämtliche einfallende Strahlen, welche AB parallel sind, in demselben Punkte F interferierende Strahlenpaare gleicher Phasendifferenz erzeugen; so z. B. werden die aus $A'B'$ derivierenden Strahlen $B'G'$ und $D'E'$ mit demselben Gangunterschied wie BG und DE und an demselben Orte F vereinigt. Alle Strahlen jedoch, welche unter andern Winkeln als i einfallen, interferieren an

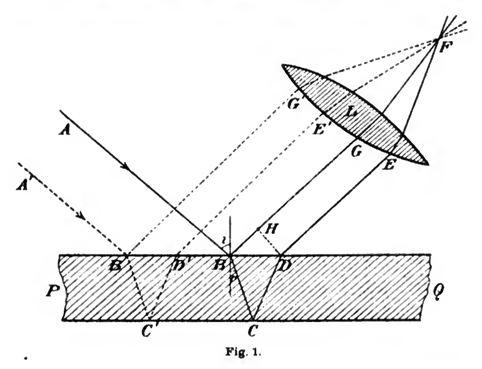


Fig. 1.

einem anderen Punkte der Brennebene von L und mit anderem Gangunterschied. Somit folgt, daß die Phasendifferenz in jedem Punkte des Interferenzbildes (außer von den Konstanten der Platte) nur vom Einfallswinkel i abhängt; die Interferenzkurven, d. i. die Kurven gleicher Phase, sind also „Kurven gleicher Neigung“ und haben die Form von Kreisen, deren Zentrum von solchen Strahlen gebildet wird, welche senkrecht auf die Platte auffallen.

Der Gangunterschied zweier interferierender Strahlen, welcher mit γ bezeichnet werden möge, ist sehr einfach zu berechnen. Fällt man von D auf BG das Lot DH, so ist der Gangunterschied der Strahlen BG und DE offenbar gleich dem Weg $BC + CD$, zurückgelegt in der Platte, vermindert um den Weg BH, zurückgelegt im Außenraum. Rechnet man dies aus, so findet man:

$$\gamma = 2dn \cos r,$$

wenn d die Dicke, n den Brechungsexponenten der planparallelen Platte PQ bedeutet.

Für alle Winkel i, für welche γ ein *gerades* Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, *verstärken* sich die interferierenden Strahlen, für diejenigen Winkel, für welche γ ein *ungerades* Vielfaches von $\lambda/2$, *schwächen* sie sich. Es ist nun von hervorragender Wichtigkeit für uns, nach welchem Gesetz der Übergang der Lichtstärke von einem Interferenzmaximum zu einem Minimum stattfindet. Was wir haben wollen und allein brauchen können, sind scharfe, wohl definierte Interferenzstreifen; präziser ausgedrückt, die Breite eines Streifens soll klein sein im Vergleich zu seinem Abstand von einem benachbarten Streifen. Nur wenn diese Forderung erfüllt ist, sind wir im stande, die durch mehrere Wellen erzeugten Interferenzsysteme über einander und doch getrennt von einander wahrzunehmen.

Obgleich diese Tatsache an sich plausibel erscheint, wollen wir uns dieselbe im einzelnen noch weiter durch eine graphische Darstellung der Intensitätsverteilung verdeutlichen, welche für die folgenden Betrachtungen von Wert ist. Wir denken uns in der Interferenzebene (Brennebene der Linse L) eine Gerade gezogen, welche die Interferenzstreifen senkrecht schneidet. Senkrecht zu dieser Geraden, welche Abscissenachse ist, denken wir uns dann die in jedem Punkte herrschende Lichtstärke als Ordinate aufgetragen; so erhalten wir ein anschauliches Bild von der Intensitätsverteilung der Interferenzen.

Angenommen nun, die Intensitätsverteilung eines durch eine Welle λ erzeugten Streifensystems werde durch die Kurve aa in Fig. 2

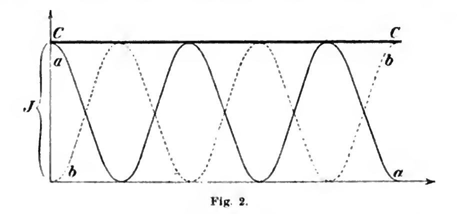


Fig. 2.

dargestellt, dann wird eine andere Welle λ', welche für sich allein ein gegen das erste in „Dissonanz“ befindliches, punktiertes Streifensystem bb erzeugen möge, zusammen mit diesem eine resultierende Intensitätsverteilung hervorrufen, welche erhalten wird, wenn man die Ordinaten beider Wellen addiert. Bei unserer, in Fig. 2 gesetzten Annahme eines sinusartigen Verlaufs der Kurven ergibt sich so die

dick gezeichnete, der Abscissenachse parallele Gerade CC, d. h. wir erhalten durch das Zusammenwirken beider Wellen λ und λ' eine gleichmäßige Helligkeit oder eine *Auslöschung* des Interferenzsystems!

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn, wie in Fig. 3, die Intensitätsverteilung eine steilere ist, sodaß schmale Maxima auf breitem, dunklen Grund entstehen. Hier resultiert aus den beiden Kurven aa

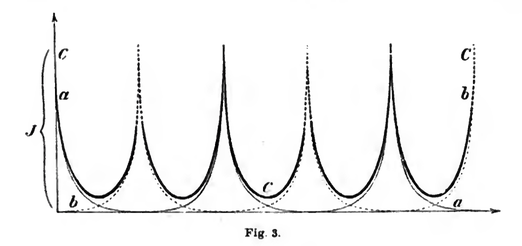


Fig. 3.

und bb eine *Verdoppelung* CCC der Maxima auf nur unbedeutend erhelltem Grund, und man wird hier also die von den Wellen λ und λ' gezeichneten Interferenzen über einander deutlich beobachten können.

Wollen wir also einen für Spektraluntersuchungen brauchbaren Interferenzapparat konstruieren, so müssen wir dafür Sorge tragen, daß die Intensitätsverteilung zwischen den Interferenzen eine möglichst steile wird, so daß schmale, intensive Maxima auf dunklem Grund gezeichnet werden. Es ist nun eine fundamentale Tatsache, welche wir sogleich beweisen wollen, daß durch Interferenz von nur *zwei* parallelen Strahlen wie in Fig. 1 von BG und DE, *niemals* ein steiler Intensitätsabfall (entsprechend etwa der Fig. 3), erzeugt werden kann; der Intensitätsabfall ist vielmehr sinusförmig, wie dies der Fig. 2 entsprechen würde.

Um uns hiervon zu überzeugen, müssen wir auf die Schwingungsverhältnisse der Strahlen im einzelnen näher eingehen. Bekanntlich läßt sich der Schwingungszustand s in einer Entfernung ϱ vom Emissionszentrum der (als eben vorausgesetzten) Wellen durch die Gleichung darstellen:

$$s = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{\varrho}{\lambda} + \Phi\right),$$

wo a die Amplitude der Schwingung, Φ die Phase bedeutet. Für einen zweiten parallelen Strahl von gleicher Amplitude, welcher gegen den ersten den Gangunterschied γ hat, würde gelten:

$$s' = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{\varrho + \gamma}{\lambda} + \Phi\right),$$

sodaß sich die durch Interferenz beider resultierende Schwingung ergibt:

$$s + s' = 2a \cos \pi \frac{\gamma}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\varrho + \frac{1}{2}\gamma}{\lambda} + \Phi\right) \cdot$$

Es resultiert sonach wieder eine Sinusschwingung, aber mit einer vom Gangunterschied γ abhängigen Amplitude der Größe $2a \cos \pi \frac{\gamma}{\lambda}$. Da die in jedem Punkte erzeugte Intensität J gleich dem Quadrat der Amplitude ist, so folgt mithin:

$$J = 4a^2 \cos^2 \pi \frac{\gamma}{\lambda} \cdot \tag{1}$$

Ist der Gangunterschied γ ein *gerades* Vielfaches der halben Wellenlänge, so folgt hieraus für die Intensität der resultierenden Schwingung $J_1 = 4a^2$.

Ist dagegen γ ein *ungerades* Vielfaches der halben Wellenlänge, so wird die Intensität $J_2 = 0$.

Haben wir also, wie bei jedem Interferenzbilde, unendlich viele, gegen einander ein wenig geneigte Strahlenpaare, welche in kontinuierlich benachbarten Punkten des Interferenzbildes mit kontinuierlich veränderlichen Gangunterschieden interferieren, so nimmt in den Orten zwischen einem Interferenzmaximum (wo die Intensität $= J_1$) bis zu einem Minimum (wo die Intensitat $= J_2 = 0$) die Lichtstärke alle möglichen, durch Formel (1) gegebenen Werte an.

Aus dieser Formel ersieht man aber, daß die Intensitätsverteilung eine *sinusförmige* ist, wie sie also etwa in Fig. 2 durch die Kurve aa dargestellt wurde.

Damit haben wir die obige Behauptung bewiesen. Wir wollen nun zeigen, daß man durch Interferenz von *mehr* als 2 Strahlen unter gewissen Umständen eine von der Sinusform abweichende, steile Intensitätsverteilung wie in Fig. 3 erzeugen kann.

Wir nehmen an, es interferierten p parallele Strahlen 1, 2, 3, ..., p gleicher Amplitude a, welche die Beschaffenheit haben, *daß jeder Strahl gegen den folgenden den Gangunterschied γ besitzt.* Dann erhalten wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen für die Schwingungen der einzelnen Strahlen:

$$s_1 = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\varrho}{\lambda} + \Phi\right),$$

$$s_2 = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\varrho + \gamma}{\lambda} + \Phi\right),$$

$$s_3 = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\varrho + 2\gamma}{\lambda} + \Phi\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_p = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\varrho + [p-1]\gamma}{\lambda} + \Phi\right),$$

also für die resultierende Schwingung:

$$S = \sum_1^p s_p = a \cdot \sum_1^p \sin 2\pi \left(\frac{\varrho + [p-1]\gamma}{\lambda} + \Phi \right) \cdot$$

Nun gilt aber die trigonometrische Beziehung:

$$\sum_1^p \sin (\alpha + \beta [p-1]) = \frac{\sin {}^1\!/_2 \beta p}{\sin {}^1\!/_2 \beta} \cdot \sin \left(\alpha + \beta \frac{p-1}{2} \right) \cdot$$

Setzen wir also zur Abkürzung:

$$2\pi \left(\frac{\varrho}{\lambda} + \Phi \right) = \alpha, \quad 2\pi \cdot \frac{\gamma}{\lambda} = \beta,$$

so folgt:

$$S = a \cdot \frac{\sin {}^1\!/_2 \beta p}{\sin {}^1\!/_2 \beta} \cdot \sin \left(\alpha + \beta \cdot \frac{p-1}{2} \right) \cdot$$

Die resultierende Schwingung hat also die Amplitude $a \frac{\sin {}^1\!/_2 \beta p}{\sin {}^1\!/_2 \beta}$ und die Intensität:

$$J = a^2 \cdot \frac{\sin^2 {}^1\!/_2 \beta p}{\sin^2 {}^1\!/_2 \beta} \cdot \tag{2}$$

Für $p = 2$ geht dieser Ausdruck, wie es ja sein muß, in die Formel (1) über. Ist $p > 2$, so müssen wir die Formel (2) weiter diskutieren. Für alle Werte der Phasendifferenz β, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$${}^1\!/_2 \beta p = 2 K \pi \qquad (K = 1, 2, 3, \ldots),$$

verschwindet der Zähler in (2); hier liegen, da der Ausdruck (2) sonst stets positiv ist, somit die Minima der Intensität. Zwischen den Minimis befinden sich verschiedene Maxima, deren Höhe je nach der Größe der Phase β eine verschiedene ist. Ausgezeichnete Maxima entstehen da, wo β ein ganzes Vielfaches von 2π, wo also auch die von *zwei* Strahlen *allein* erzeugten Maxima liegen. Dann verschwindet in (2) der Nenner, und es wird $J = a^2 \cdot p^2$. — Wie die weitere Behandlung zeigt, überwiegen diese Hauptmaxima und gewinnen mehr und mehr an Schmalheit, je größer die Anzahl p der vielfachen, zur Interferenz gebrachten Strahlen ist; die folgende Fig. 4 gibt z. B. für den Fall $p = 15$ die Intensitätsverteilung zwischen zwei Hauptmaximis gemäß der Formel (2) wieder ($a^2 = 1$ gesetzt). Hier ist also tatsächlich der gewünschte Effekt erzielt, und wir haben, abgesehen von den sehr lichtschwachen „Maximis zweiten Grades", eine steile Intensitätsverteilung, wie sie schon in Fig. 3 ungefähr angedeutet war.

Dasselbe Prinzip der Zusammenwirkung vieler paralleler Strahlen von konstantem Gangunterschied γ wendet man auch bei den Beugungsgittern an. Die Theorie dieser letzten Apparate ist aber eine kompliziertere, da hier mit gebeugtem, von der geradlinigen Fortpflanzung abweichendem Licht operiert wird. Es ist merkwürdig, daß der viel einfachere, von uns oben erörterte Fall der *Interferenz* regulärer

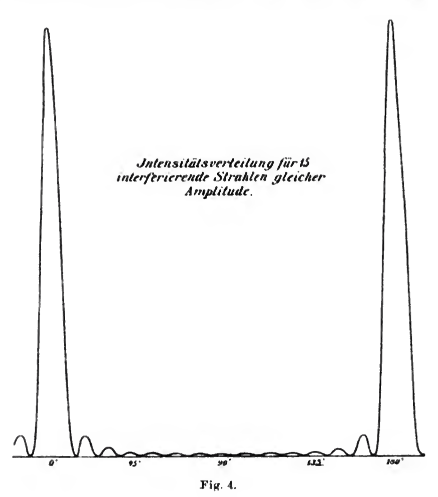


Fig. 4.

Strahlen, welcher sich nach den Regeln der geometrischen Optik in einfacher Weise berechnen läßt, so lange unbeachtet bleiben konnte und erst in allerneuster Zeit wieder behandelt und experimentell benutzt worden ist.

2. — Wir wenden uns jetzt zur Ausführung des zuletzt behandelten theoretischen Falles in der Wirklichkeit. Die vielen interferierenden Strahlen vom Gangunterschied γ erhalten wir, wenn wir das Licht auf eine planparallele Platte auffallen lassen, doch so, daß durch vielfache Reflexion im Innern der Platte viele parallele Strahlen zur Entwicklung kommen, welche man dann interferieren läßt. Im einzelnen hat sich so die folgende Anordnung ergeben:

Das Licht fällt (Fig. 5) nahezu senkrecht auf das kleine, rechtwinklige Prisma p, welches auf die planparallele Glasplatte PQ auf-

gekittet ist. So wird die Plattenoberfläche im Innern nahezu unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion getroffen, nur ein sehr kleiner Anteil tritt nahezu streifend aus; bei weitem das meiste Licht wird somit reflektiert, trifft wieder die Plattenoberfläche, und dann wiederholt sich das Spiel von neuem. Der Endeffekt ist, daß auf jeder Seite der Platte eine Reihe paralleler Strahlen von nahezu gleicher, gegen das ursprüngliche Licht sehr kleiner Intensität austritt, welche, von dem auf ∞ akkommodierten Fernrohr vereinigt, Interferenzsysteme von der oben behandelten Schärfe des Intensitätsabfalls in der Brennebene aufzeichnen.

In einer Beziehung wird durch diese Anordnung aber die durch Formel (2) gegebene Verteilung nur angenähert dargestellt. Die Intensität der interferierenden Strahlen 1, 2, 3, ..., p ist nämlich in der Wirklichkeit nicht für jeden Strahl dieselbe. Bedeutet vielmehr σ^2 den

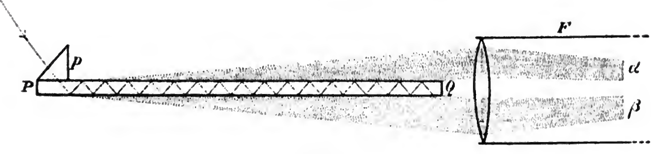


Fig. 5.

Reflexionskoeffizienten des Lichts an der Glasplatte, so bilden die Intensitäten der einzelnen Strahlen 1, 2, 3, ..., wie leicht abzuleiten, eine geometrische Reihe vom Exponenten σ^4.

Die Berechnung dieser so gebildeten Interferenzerscheinung gestaltet sich etwas weniger einfach als diejenige für Strahlen von lauter gleichen Intensitäten. Man erhält eine Formel[1]), deren Diskussion ergibt, daß der durch sie repräsentierte Intensitätsabfall um so steiler ist, je mehr σ^2 sich dem größten Werte 1 nähert, d. h. je mehr der ideale Fall von Strahlen *gleicher* Intensitäten verwirklicht wird. Aus dieser Bedingung, dem Koeffizienten σ^2 einen recht hohen Wert zu erteilen, erhellt auch der Zweck des kleinen Prismas p in Fig. 5. Würde dieses fehlen, so müßte man das Licht, welches ja streifend aus der Platte austreten soll, auch streifend einfallen lassen, und damit wäre ein enormer Intensitätsverlust verbunden. So hat z. B. für einen Einfallswinkel von 88° die Größe σ^2 den Wert 0,883; hier würden also über 88% der gesamten zur Verfügung stehenden Lichtstärke verloren gehen. Diesen Intensitätsverlust verhindert das Prisma p.

1) vergl. O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c.

Die übrige Montierung des Interferenzspektroskops ist eine sehr einfache. Dasselbe wird auf einen Spektrometertisch gesetzt, dessen Kollimator abgenommen ist. Man beleuchtet nicht direkt mit der zu untersuchenden Lichtquelle, sondern dispergiert erst grob durch ein zweites Spektrometer mit Prisma (*ein* solches genügt meistens). Durch ein vor den Interferenzapparat gesetztes Diaphragma kann man dann einen beliebigen Anteil aus dem Spektrum ausblenden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparats besteht noch darin, daß man den Beleuchtungsspalt, hinter welchem sich die Lichtquelle befindet, nicht, wie sonst üblich, vertikal, sondern vorteilhafter *schief* zur Ebene der Apparate stellt. Dadurch wird erreicht, daß man die Interferenzbilder zweier benachbarter Spektrallinien *getrennt* zu gleicher Zeit beobachten kann. Die genauere Erklärung dieses sehr erwünschten Effekts kann aber hier übergangen werden.

Bisher sind erst wenige Interferenzspektroskope in Wirklichkeit ausgeführt worden. Die Schwierigkeit liegt in der Beschaffung von tadellos planparallel geschliffenen, genügend großen Glasplatten. Die für unsere Methode erforderliche Güte derselben geht an die Grenze der Leistungsfähigkeit der heutigen Technik heran. Immerhin gelingt es, Glasplatten von einigen Millimetern Dicke bis auf Bruchteile einer Wellenlänge gleich dick und plan herzustellen, und zwar auf eine Länge, welche die Dicke um etwa das 40fache übertrifft. So haben zur Verfügung des Verfassers bisher Platten von 3 resp. 5 resp. 10 mm Dicke und 120 resp. 140 resp. 200 mm Länge gestanden. Die damit erzielbare Auflösung ist für die verschiedenen Platten nicht die gleiche; sie ist für die zuletzt genannte Platte am größten und beträgt hier rund 1 Milliontel der Wellenlänge; dem entspricht also ein Trennungsvermögen von etwa $^1/_{1000}$ des Abstandes der beiden D-Linien.

3. — Die Untersuchung verschiedener Spektrallinien mit dem neuen Spektroskop hat bisher vor allem das interessante und neue Resultat ergeben, daß keine der mit den gewöhnlichen Prismen- und Gitterapparaten homogen erscheinenden „Linien“ von einfacher Zusammensetzung ist. Vielmehr weist jede Linie eine individuelle Struktur von oft bedeutender Kompliziertheit auf.

Besonders eingehend ist das Quecksilberspektrum untersucht worden, wie es von einer Vacuumbogenlampe mit Quecksilberelektroden ausgesandt wird. Im sichtbaren Teil besteht das Spektrum aus 2 gelben, einer hellgrünen, einer dunkelgrünen, einer blauen und 2 violetten Linien. Jede dieser „Linien“ bildet aber, wie sich herausgestellt hat, einen Komplex von sehr nahe benachbarten, diskreten Wellen, die sich

teilweise nur um $10^{-5} \cdot \lambda$ und weniger voneinander unterscheiden. Man beobachtet meist eine hellere Hauptlinie, welche von weniger hellen „Trabanten" begleitet ist; zuweilen jedoch ist man im Zweifel, welchen von den vielen „Trabanten" man als Hauptlinie ansprechen darf. Betreffs genauerer Einzelheiten muß auf unsere zitierte Abhandlung verwiesen werden; hier sei nur erwähnt, daß die hellgrüne Quecksilberlinie nach den neusten Untersuchungen die komplizierteste Zusammensetzung besitzt und aus 21 Linien besteht.

Eine ähnliche Kompliziertheit der Struktur wiesen außer den Quecksilberlinien auch die Spektren anderer Stoffe auf, wie z. B. Cadmium, Natrium, Wasserstoff. Man muß nur die Bedingungen des Leuchtens so wählen, daß die Struktur beobachtbar wird.

Erzeugt man nämlich die Spektra auf die gewöhnliche Art, etwa mittelst einer Salzperle im Bunsenbrenner oder durch Funkenentladung an Elektroden aus den zu untersuchenden Körpern, so gelingt es nicht, die individuellen Feinheiten der Linien wahrzunehmen; die Linien erscheinen entweder sehr lichtschwach oder sehr verbreitert und verwaschen. Will man scharfe, lichtstarke Linien erhalten, so muß man den zu untersuchenden Dampf bei möglichst großer Verdünnung in einem Geißlerschen Rohr zum Leuchten bringen. So haben wir z. B., unter Benutzung von Erfahrungen des amerikanischen Physikers Michelson, ein Vacuumrohr konstruiert, welches, auf 300° C erhitzt, intensives, homogenes Cadmiumlicht unter der Einwirkung elektrischer Entladungen ausstrahlt.

Sehr schön beobachtet man an dem Interferenzspektroskop die Verbreiterung der Spektrallinien mit zunehmender Dichte des leuchtenden Dampfes. Die rote Wasserstofflinie H_α nimmt z. B. bei Drucken, die oberhalb von $1/_2$ Atmosphäre liegen, eine solche Breite ein, daß an einer Platte von 0,5 cm keine Interferenzen mehr auftreten, da die von benachbarten Teilen der „Linie" erzeugten Interferenzmaxima den ganzen Raum zwischen 2 aufeinanderfolgenden Interferenzstreifen ausfüllen. Noch bedeutender ist die Verbreiterung der blaugrünen Linie H_γ. Bei fortschreitender Verdünnung des Gases aber werden Interferenzen sichtbar, welche mehr und mehr an Schärfe gewinnen, und schließlich treten Einzelheiten der Struktur hervor. So z. B. entpuppt sich die Linie H_α als Doppellinie.

Das Zeemansche Phänomen ist sehr leicht, schon mit verhältnismäßig schwachen magnetischen Feldern, wahrnehmbar. Nach der elementaren Theorie sollte eine Spektrallinie in der Richtung senkrecht zu den Kraftlinien in ein Triplet zerspalten werden. Hiernach müßte also die grüne Quecksilberlinie, welche 21fach ist (vergl. oben), in 63 Komponenten

aufgesplittert werden. Von diesen könnte man allerdings durch ein Nikolsches Prisma 21 auslöschen, sodaß nur 42 übrig blieben. Immerhin aber ist diese Zahl von Linien viel zu groß, um mit den bisher zur Verfügung stehenden, planparallelen Platten wahrgenommen werden zu können; man beobachtet bei Erregung des Magneten eine allgemeine Erhellung des Gesichtsfeldes, und nur das von der Hauptlinie gebildete Triplet hebt sich deutlich ab.

Es ist interessant, daß sich durch die komplizierte Zusammensetzung der Spektrallinien in gewisser Hinsicht der sogenannte „anomale Zeemaneffekt" erklärt. Dieser besteht darin, daß manche Spektrallinien nicht, wie die elementare Theorie dies fordert, einfache Triplets oder Dublets bilden, sondern in eine viel größere Anzahl von Komponenten, wie 6, 9 und mehr, zerspalten werden. Die theoretische Erklärung dieser Anomalie hat viel Schwierigkeiten bereitet. Da man jetzt aber weiß, daß die „Linien" von vornherein aus einer größeren Anzahl von Individuen zusammengesetzt sind, welche nur infolge der Mangelhaftigkeit der Apparate nicht wahrgenommen wurden, so erscheint das beobachtete Verhalten der Linien im Magnetfeld nicht mehr verwunderlich. Vielmehr wird man umgekehrt mit einiger Wahrscheinlichkeit prophezeien dürfen, daß eine Spektrallinie, die den anomalen Zeemaneffekt liefert, sich bei der Untersuchung mit dem Interferenzspektroskop als komplex auch ohne Magnetfeld herausstellen wird. Freilich ist aber zu beachten, daß keineswegs *alle* beim Zeemaneffekt beobachteten Anomalien sich auf diese einfache Weise erklären lassen.

Man kann erwarten, daß die Vervollkommnung des Interferenzspektroskops, insbesondere die Herstellung immer besserer planparalleler Platten, uns zu einem weiteren Eindringen in den Mechanismus des Leuchtprozesses verhelfen wird. Auch die Astrophysik wird vielleicht aus der Verwendung des neuen Apparates Nutzen ziehen können.

Charlottenburg, Januar 1903.

Über die Frobeniusschen Kovarianten einer Bilinearform.

Von J. WELLSTEIN in Straßburg i. E.

In seiner Arbeit „Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form"[1]) hat Herr Frobenius gewisse Kovarianten $\varphi_\sigma(A)$ einer Bilinearform A abgeleitet, die später, anscheinend unabhängig von Frobenius, Herr Study[2]) wiedergefunden und genauer untersucht hat, wobei sehr interessante Eigenschaften der $\varphi_\sigma(A)$ zutage getreten sind. Offenbar unabhängig von beiden Autoren ist dann H. Laurent[3]) auf diese Formen gekommen, die seither in den Frobeniusschen Untersuchungen über vertauschbare Matrizen[4]) und über Gruppencharaktere[5]) eine nicht unwichtige Rolle spielen. Ich möchte nun im folgenden einige Sätze mitteilen, die geeignet scheinen, die Kovarianten $\varphi_\sigma(A)$ vielleicht in den Mittelpunkt der ganzen Reduktionstheorie zu rücken.

§ 1. Bezeichnungen.

1. Wir führen die Untersuchung an Matrizen $n$ten Grades. Den n^2 einfachsten Bilinearformen $x_h y_k$ $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$ entsprechen ebenso viel einfachste Matrizen $T_{h,k}$ $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$, von denen $T_{h,k}$ in der $h$ten Zeile an $k$ter Stelle das Element Eins, sonst lauter Nullen hat; der Darstellung einer Bilinearform durch die $x_h y_k$ entspricht die Zerlegung einer Matrix:

$$A = \{a_{h,1}, a_{h,2}, \ldots, a_{h,n}\} = \{a_{h,k}\} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

in die Summe:

$$A = \sum_{h,k} a_{h,k} T_{h,k}, \tag{2}$$

und für das Rechnen mit den $T_{h,k}$ gelten die Formeln:

$$T_{h,k} T_{p,q} = \delta_{k,p} T_{h,q}. \qquad (h, k, p, q = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Wenn man $T_{\mu,\nu} A$ mit Hilfe von (2) und (3) durch die $T_{h,k}$ linear und homogen ausdrückt, ergibt sich, wie Laurent[6]) gezeigt hat, durch

1) Crelles Journ., Bd. 86. § 6.
2) „Rekurrierende Reihen und bilineare Formen", Monatsh. f. M. u. Ph., 2, 1890.
3) „Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions", J. de Math. (5) 4, 1898.
4) „Über vertauschbare Matrizen", Berl. Ber. 1896, S. 601 ff.
5) „Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante", l. c. 1896, S. 1343 ff., § 5 (9).
6) l. c., S. 82.

Elimination der T unmittelbar die „charakteristische" Gleichung von A, die wir uns in ihre verschiedenen linearen Faktoren zerlegt denken:

$$(4)\qquad F(A, E) = (A - a_1 E)^{r_1}(A - a_2 E)^{r_2} \ldots (A - a_s E)^{r_s} = 0,$$

$$E = T_{1,1} + T_{2,2} + \cdots + T_{n,n}.$$

Die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt, sei:

$$(5)\qquad f(A, E) = (A - a_1 E)^{\varrho_1} (A - a_2 E)^{\varrho_2} \ldots (A - a_s E)^{\varrho_s} = 0.$$

2. Bezeichnet $\{x\}_k$ eine Matrix, die in der $k$ten Spalte, von oben nach unten genommen, die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in den $n - 1$ übrigen Spalten nur Nullen hat, so läßt sich die Substitution:

$$(6)\qquad x_h' = a_{h,1}x_1 + a_{h,2}x_2 + \cdots + a_{h,n}x_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammenfassen in:

$$(7)\qquad \{x'\}_k = A\,\{x\}_k,$$

wo man nach Belieben $k = 1, 2, \ldots, n$ nehmen kann. Das Produkt $A\{x\}_k$, nach den Regeln der Matrizenmultiplikation gebildet, stellt eine Matrix vom Typus $\{x\}_k$ dar, welche eben, Element für Element, gleich $\{x'\}_k$ ist. Die $\{x\}_k$ machen die „Wertsysteme" (x), auf die Ed. Weyr[1]) seine formentheoretischen Untersuchungen gestützt hat, vollkommen entbehrlich und haben den Vorzug, den Rahmen der Matrizensymbolik nicht zu verlassen. — Wir müssen jedoch einige wohlbekannte Sätze über Gleichungssysteme erst in die Sprache der Matrizensymbolik übersetzen.

§ 2. Lineare Gleichungssysteme.

1. Nennt man, wie üblich, die Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_p$ linear unabhängig, wenn sie einer Gleichung:

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_p A_p = 0$$

mit numerischen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_p$ nur dann genügen, wenn diese sämtlich verschwinden, so gilt der

Satz I. Die $\varrho \leqq n$ Matrizen $\{x'\}_k, \{x''\}_k, \ldots, \{x^{(\varrho)}\}_k$ sind nur dann linear unabhängig, wenn die Matrix nten Grades:

$$X = \{x_h', x_h'', \ldots, x_h^{(\varrho)}, 0, 0, \ldots, 0\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

den Rang ϱ hat,

---

1) „Zur Theorie der bilinearen Formen", Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. I, 1890.

denn nur in diesem Falle hat das Gleichungssystem:

$$c_1\{x'\}_k + c_2\{x''\}_k + \cdots + c_\varrho\{x^{(\varrho)}\}_k = 0,$$

oder ausgeführt:

$$c_1 x_h' + c_2 x_h'' + \cdots + c_\varrho x_h^{(\varrho)} = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

nur die eine Lösung $c_1 = c_2 = \cdots = c_\varrho = 0$; wie ersichtlich, ist 0 die „Matrix Null".

Satz II. Sind in dem Büschel linear unabhängiger Matrizen

$$c_1\{x'\}_k + c_2\{x''\}_k + \cdots + c_\varrho\{x^{(\varrho)}\}_k$$

alle Matrizen $\{x\}$ *enthalten, so ist* $\varrho = n$,

denn nur für $\varrho = n$ kann man die c so bestimmen, daß bei *beliebigen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Gleichungen:

$$x_h = c_1 x_h' + c_2 x_h'' + \cdots + c_\varrho x_h^{(\varrho)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, die symbolisch durch:

$$\{x\}_k = c_1\{x'\}_k + c_2\{x''\}_k + \cdots + c_\varrho\{x^{(\varrho)}\}_k$$

wiedergegeben werden.

2. Ebenso läßt sich das Gleichungssystem:

$$(1) \qquad a_{h,1}x_1 + a_{h,2}x_2 + \cdots + a_{h,n}x_n = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammenfassen in:

$$(2) \qquad A\{x\}_k = 0$$

und gibt sich so als Spezialfall der Gleichung:

$$(3) \qquad AX = 0$$

zu erkennen. Damit wenigstens eine Matrix X existiert, die (3) genügt, muß $|A| = 0$ sein; sonst folgte aus (3) durch Multiplikation mit A^{-1} sofort $X = 0$. Zur Lösung von (3) benutzt man am bequemsten ein mit A äquivalentes Diagonalsystem:

$$(4) \qquad PAQ = \mathfrak{A} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots, 0\rangle, \ |P| = 1, \ |Q| = 1,$$

dessen Diagonalelemente $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sind, wenn r den Rang von A bezeichnet. Setzt man $Q^{-1}X = \mathfrak{X}$, so geht (3) über in:

$$(5) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{X} = 0, \quad \mathfrak{A} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots, 0\rangle,$$

und nun kann man unmittelbar die Lösung angeben. Im Falle $X = \{x\}_k$, der allein wegen des Folgenden hier zu besprechen ist, hat man:

$$(6) \qquad \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}_k = 0, \quad \text{wo} \quad \{\mathfrak{x}\}_k = Q^{-1}\{x\}_k,$$

oder ausgeführt $a_1 \mathfrak{x}_1 = 0,\ a_2 \mathfrak{x}_2 = 0, \ldots, a_r \mathfrak{x}_r = 0$, während sich für die $n - r$ übrigen $\mathfrak{x}$ keine Einschränkung ergibt. Die Lösung von (2) ist demnach $\{x\}_k = Q\{\mathfrak{x}\}_k$ mit $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \cdots = \mathfrak{x}_r = 0$ und verfügbaren $\mathfrak{x}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{x}_n$, oder real ausgedrückt:

$$(7) \qquad x_h = q_{h,r+1}\mathfrak{x}_{r+1} + q_{h,r+2}\mathfrak{x}_{r+2} + \cdots + q_{h,n}\mathfrak{x}_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

Schreibt man $q_{h,k} = q_h^{(k)}$, so ist $Q = \{q_h', q_h'', \ldots, q_h^{(n)}\}$ und:

$$(8) \qquad \{x\}_k = \{q^{(r+1)}\}_k \mathfrak{x}_{r+1} + \cdots + \{q^{(n)}\}_k \mathfrak{x}_n.$$

Setzt man die $\mathfrak{x}_{r+1}, \mathfrak{x}_{r+2}, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bis auf eines gleich Null, dieses gleich eins, so erweisen sich $\{q^{(r+1)}\}_k, \ldots, \{q^{(n)}\}_k$ selber als Lösungen von (2), und zwar nach Satz I als linear unabhängige, da $|Q| \neq 0$ ist. So ergibt sich, in etwas fremdartiger Einkleidung, der elementare

Satz III. Ist r der Rang der Matrix A, so hat die Gleichung $A\{x\}_k = 0$ genau $n - r$ linear unabhängige Lösungen:

$$(9) \qquad \{x'\}_k, \{x''\}_k, \ldots, \{x^{(n-r)}\}_k,$$

aus denen sich jede andere linear und homogen mit numerischen Koeffizienten zusammensetzen läßt.

Wir wollen das System (9) eine „Basis" der Lösungen von $A\{x\}_k = 0$ nennen.

§ 3. Die Frobeniusschen Matrizen $\Phi_\sigma(A, E)$.

1. Sei zur Abkürzung:

$$(1) \qquad u_1 - a_\sigma u_2 = l_\sigma. \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

Dann haben die s Formen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1(u_1, u_2) = * \; l_2^{\varrho_2} l_3^{\varrho_3} \ldots l_{s-1}^{\varrho_{s-1}} l_s^{\varrho_s}, \\ \varphi_2(u_1, u_2) = l_1^{\varrho_1} * \; l_3^{\varrho_3} \ldots l_{s-1}^{\varrho_{s-1}} l_s^{\varrho_s}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_s(u_1, u_2) = l_1^{\varrho_1} l_2^{\varrho_2} l_3^{\varrho_3} \ldots l_{s-1}^{\varrho_{s-1}} *, \end{cases}$$

keinen von u_1, u_2 abhängigen größten gemeinschaftlichen Teiler, man kann diesen also gleich eins annehmen und in die Form bringen:

$$(3) \qquad 1 = \varphi_1(u, 1)\psi_1(u, 1) + \varphi_2(u, 1)\psi_2(u, 1) + \cdots + \varphi_s(u, 1)\psi_s(u, 1),$$

wo die $\psi(u, 1)$ vollkommen bestimmte ganze rationale Funktionen von $u = \frac{u_1}{u_2}$ sind. Wenn man (3) wieder homogen macht,

$$(4) \qquad \varphi_\sigma(u_1, u_2)\psi_\sigma(u_1, u_2) = \Phi_\sigma(u_1, u_2) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

setzt und nach Beseitigung der Nenner anstelle von u_1, u_2 die Matrizen A, E treten läßt, so folgt die wichtige Gleichung:

$$E = \Phi_1(A, E) + \Phi_2(A, E_1) + \cdots + \Phi_s(A, E). \tag{5}$$

Von den Funktionen $\Phi(u, 1)$ haben außer $\Phi_\sigma(u, 1)$ alle den Faktor $u - a_\sigma$, also hat $\Phi_\sigma(u,1)$ nach (3) ihn nicht, kann also nicht durch $f(u,1)$ teibar sein (§ 1, (5)), und nach einem Satze von Frobenius ist folglieh $\Phi_\sigma(A, E)$ nicht gleich 0. Damit ist die erste Behauptung des folgenden Satzes bewiesen:

Satz I. Die s Matrizen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ genügen folgenden Bedingungen:

1. *keine ist gleieh* 0,
2. *für* $\sigma \gtrless \sigma'$ *ist* $\Phi_\sigma \Phi_{\sigma'} = 0$,
3. $\Phi_\sigma^2 = \Phi_\sigma$, $\quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$
4. *sie sind linear unabhängig,*

woraus sich dann leicht ihre Identität mit den von Frobenius[1]) definierten Matrizen (Formen) $\varphi_\sigma(A)$ ergibt. Formel *2.* folgt daraus, daß $\Phi_\sigma \Phi_{\sigma'}$ alle Faktoren von $f(A, E)$ hat; multipliziert man (5) mit Φ_σ, so bleibt wegen *2.* gerade $E\Phi_\sigma = \Phi_\sigma^2$, wo E als Einheitsmatrix weggelassen werden kann. Fänden sich Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_s$, sodaß $c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_s\Phi_s = 0$ wäre, so hätte man nach Multiplikation mit Φ_σ sofort $c_\sigma \Phi_\sigma = 0$, also $c_\sigma = 0$.

2. Die Grundlage für alles Folgende bildet der

Satz II. Genügen die Matrizen P_σ, Q_σ den Gleichungen:

$$P_\sigma(A - a_\sigma E)^m = 0, \quad (A - a_\sigma E)^m Q_\sigma = 0 \tag{6}$$

für irgend einen positiven, ganzzahligen Exponenten m, so ist:

$$P_\sigma = P_\sigma \Phi_\sigma, \quad Q_\sigma = \Phi_\sigma Q_\sigma, \tag{7}$$

und dann natürlich auch:

$$P_\sigma(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} = 0, \quad (A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} Q_\sigma = 0, \tag{8}$$

denn $\Phi_\sigma(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} = 0$. — Da man nämlich den größten gemeinschaftlichen Teiler $(u - a_\sigma)^\lambda$ von $(u - a_\sigma)^m$ und $f(u,1)$ in die Form:

$$(u - a_\sigma)^\lambda = h(u, 1)(u - a_\sigma)^m + k(u, 1) f(u, 1), \quad (\lambda \leq \varrho_\sigma) \tag{9}$$

bringen kann, so ist wegen § 1, (5):

$$(A - a_\sigma E)^\lambda = h(A, E)(A - a_\sigma E)^m, \quad (\lambda \leq \varrho_\sigma) \tag{10}$$

---

1) Vergl. Fußnote 4) der Einleitung.

und aus (6) folgt:

$$P_\sigma (A - a_\sigma E)^\lambda = 0, \quad (A - a_\sigma E)^\lambda Q_\sigma = 0,$$

sodaß, wenn man mit $(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma - \lambda}$ multipliziert, in der Tat Gleichung (8) besteht. Außer Φ_σ haben aber alle Φ den Faktor $(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma}$, mithin ist auch $P_\sigma \Phi_{\sigma'} = 0$, $\Phi_{\sigma'} Q_\sigma = 0$ $\left(\sigma \gtrless \sigma'\right)$, und nun ergibt sich (7) indem man mit Benutzung von (5) die Produkte $P_\sigma E$, $E Q_\sigma$ bildet.

3. Auf Grund des Satzes II kann man *ohne jede Rechnung* sämtliche Lösungen der Gleichung:

$$(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} \{x\}_k = 0 \tag{11}$$

angeben. Ist nämlich $n - \tau_{\sigma, \varrho_\sigma}$ der Rang von $(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma}$, und wählt man $\tau_{\sigma, \varrho_\sigma}$ Matrizen $\{\mathfrak{x}'\}_k$, $\{\mathfrak{x}''\}_k$, ... mit vollkommen unbestimmten Elementen in der $k$ten Spalte, so ist:

$$\{x^{\sigma, \tau}\}_k = \Phi_\sigma \{\mathfrak{x}^{(\tau)}\}_k, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \tau_{\sigma, \varrho_\sigma}) \tag{12}$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen der Gleichung (11), und wenn man diese Systeme für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ bildet, wobei, soweit sie reichen, immer wieder dieselben $\{\mathfrak{x}\}_k$ benutzt werden dürfen, so sind auch die $n' = \tau_{1, \varrho_1} + \tau_{2, \varrho_2} + \cdots + \tau_{s, \varrho_s}$ Systeme $\{x^{\sigma, \tau}\}_k$ in ihrer Gesamtheit linear unabhängig; denn wäre $\sum_{\sigma, \tau} c_{\sigma, \tau} \{x^{\sigma, \tau}\}_k = 0$, wofür man nach II auch $\sum_{\sigma, \tau} c_{\sigma, \tau} \Phi \{x^{\sigma, \tau}\}_k = 0$ schreiben kann, so bekäme man durch Multiplikation mit $\Phi_{\sigma'}$ wegen I: $\sum_{\tau} c_{\sigma', \tau} \Phi_{\sigma'} \{x^{\sigma', \tau}\}_k = 0$, sodaß nun doch die zu demselben σ gehörigen $\{x^{\sigma, \tau}\}_k$ linear abhängig wären.

Wie auch immer man $\{x\}_k$ wählen mag, ist aber $\{x'\}_k = \Phi_\sigma \{x\}_k$ eine Lösung von (11), also darstellbar in der Form:

$$\Phi_\sigma \{x\}_k = \sum_\tau \gamma_{\sigma, \tau} \{x^{\sigma, \tau}\}_k, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \tau_{\sigma, \varrho_\sigma})$$

und nach (5) ergibt die Summation über $\sigma = 1, 2, \ldots, s$:

$$\{x\}_k = \sum_{\sigma, \tau} \gamma_{\sigma, \tau} \{x^{\sigma, \tau}\}_k,$$

d. h.: Jede beliebige Matrix $\{x\}_k$ ist durch die n' linear unabhängigen Matrizen $\{x^{\sigma, \tau}\}_k$ darstellbar, folglich ist nach § 2, II ihre Anzahl gleich n, also:

$$\tau_{1, \varrho_1} + \tau_{2, \varrho_2} + \cdots + \tau_{s, \varrho_s} = n. \tag{13}$$

Ganz ebenso ließen sich die allgemeinen Systeme Q_σ des Satzes II behandeln.

4. Wir denken uns die n Matrizen $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ in irgend eine Reihenfolge gebracht, am einfachsten so, daß die zu demselben σ gehörigen $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ nach wachsenden τ geordnet sind; $[\sigma, \tau]$ gebe an, die wievielte Matrix $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ in dieser Reihenfolge ist; die n Zahlen $[\sigma, \tau]$ bilden daher eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$ und können wie einzelne Summationsindices gebraucht werden. Dann ist:

$$X = \sum_{\sigma,\tau} \{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]} = \sum_{\sigma,\tau} \Phi_\sigma \{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]}, \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, s; \\ \tau = 1, 2, \ldots, \tau_{\sigma,\varrho_\sigma}; \\ \sum_\sigma \tau_{\sigma,\varrho_\sigma} = n; \end{pmatrix} \tag{14}$$

eine Matrix, deren $[\sigma, \tau]$te Spalte von oben nach unten gelesen die Elemente $x_1^{\sigma,\tau}, x_2^{\sigma,\tau}, \ldots, x_n^{\sigma,\tau}$ hat. Ihr Rang ist nach § 2, I bei der linearen Unabhängigkeit der $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ gleich n, also $|X| \neq 0$. Mittels I, (2), (3) schließt man daraus:

$$\Phi_\sigma X = \sum_\tau \Phi_\sigma \{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]} = \sum_\tau \{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]}, \tag{15}$$

wo der Faktor Φ_σ in der Summe nach Satz II stehen oder fehlen kann. Nun geht aber $\{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]}$ aus X hervor, indem man alle Elemente von X außer denen der $[\sigma, \tau]$ten Spalte in Nullen verwandelt; das leistet aber gerade die Multiplikation von X mit $T_{[\sigma,\tau],\,[\sigma,\tau]}$, denn allgemein ist $CT_{h,h}$ eine Matrix, die in der $h$ten Spalte mit C übereinstimmt und sonst nur Nullen zu Elementen hat. Daher ist:

$$\Phi_\sigma X = X \sum_\tau T_{[\sigma,\tau],\,[\sigma,\tau]}, \quad X^{-1}\Phi_\sigma X = \sum_\tau T_{[\sigma,\tau],\,[\sigma,\tau]},$$

d. h.

Satz III. Die s Matrizen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ lassen sich simultan in Aggregate n der einfachsten Matrizen $T_{1,1}, T_{2,2}, \ldots, T_{n,n}$ transformieren:

$$X^{-1}\Phi_\sigma X = \sum_\tau T_{[\sigma,\tau],\,[\sigma,\tau]}, \quad (\tau = 1, 2, \ldots, \tau_{\sigma,\varrho_\sigma}) \tag{16}$$

$$X = \sum_{\sigma,\tau} \{x^{\sigma,\tau}\}_{[\sigma,\tau]}, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s). \tag{17}$$

Durch diesen schönen Satz werden alle bisher gefundenen Eigenschaften der Φ_σ auf das einfachste aufgeklärt, speziell ist Formel (5) eine unmittelbare Folge von $E = T_{1,1} + T_{2,2} + \cdots + T_{n,n}$.

§ 4. Normalform der Matrizen im Falle $s = n$.

1. Auf § 3, III läßt sich sehr leicht die Lehre von der normalen oder kanonischen Form der Matrizen gründen. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle $s = n$, wo alle n Linearfaktoren der charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind, $r_\sigma = \varrho_\sigma = 1$, $\sigma = 1, 2, \ldots, n$. Dann sind die in § 3, (2) definierten $s = n$ Formen $(n-1)$ten Grades $\varphi_\sigma(u_1, u_2)$ wegen ihrer linearen Unabhängigkeit zur linearen Darstellung jeder anderen Form $(n-1)$ten Grades geeignet:

$$(1)\qquad u_1^\nu u_2^{n-1-\nu} = c_{\nu,1}\varphi_1(u_1,u_2) + c_{\nu,2}\varphi_2(u_1,u_2) + \cdots + c_{\nu,n}\varphi_n(u_1,u_2),$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und es ist zunächst für $u_1 = a_\sigma$, $u_2 = 1$:

$$a_\sigma^\nu = c_{\nu,\sigma}\varphi_\sigma(a_\sigma, 1), \quad 1 = c_{0,\sigma}\varphi_\sigma(a_\sigma, 1),$$

oder, wenn man

$$(2)\qquad \frac{\varphi_\sigma(u_1,u_2)}{\varphi_\sigma(a_\sigma, 1)} = \Phi_\sigma(u_1,u_2),$$

setzt,

$$(3)\qquad u_1^\nu u_2^{n-1-\nu} = a_1^\nu \Phi_1(u_1,u_2) + a_2^\nu \Phi_2(u_1,u_2) + \cdots + a_n^\nu \Phi_n(u_1,u_2).$$

Hieraus folgt unmittelbar für $\nu = 0$, $u_1 = A$, $u_2 = E$:

$$(4)\qquad E = \Phi_1(A,E) + \Phi_2(A,E) + \cdots + \Phi_n(AE)$$

übereinstimmend mit § 3, (5), für $\nu = 1$ aber außerdem:

$$(5)\qquad A = a_1\Phi_1(A,E) + a_2\Phi_2(A,E) + \cdots + a_n\Phi_n(A,E).$$

Ehe wir diese Formel mit § 3, III in Verbindung bringen, ist noch die Matrix X zu bilden. Läßt man $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ völlig unbestimmt, so kann man nach § 3, (12), (14) einfach setzen:

$$(6)\qquad X = \Phi_1(A,E)\{\mathfrak{x}\}_1 + \Phi_2(A,E)\{\mathfrak{x}\}_2 + \cdots + \Phi_n(A,E)\{\mathfrak{x}\}_n,$$

und nach § 3, (16) ist:

$$(7)\qquad X^{-1}\Phi_\sigma X = T_{\sigma,\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

sodaß aus (5) sich:

$$(8)\qquad X^{-1}AX = a_1 T_{1,1} + a_2 T_{2,2} + \cdots + a_n T_{n,n}$$

ergibt, d. h.:

Satz I. Hat die charakteristische Gleichung einer Matrix nten Grades A lauter verschiedene Linearfaktoren, so werden $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ und A

durch die mit unbestimmten Variabeln $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ *gebildete Matrix:*

$$X = \Phi_1 \{\mathfrak{x}\}_1 + \Phi_2 \{\mathfrak{x}\}_2 + \cdots + \Phi_n \{\mathfrak{x}\}_n$$

transformiert in:

$$X^{-1} \Phi_\sigma X = T_{\sigma,\sigma}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

$$X^{-1} A X = a_1 T_{1,1} + a_2 T_{2,2} + \cdots + a_n T_{n,n}.$$

Das ist die bekannte Normalform von A. Will man für $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bestimmte Werte einsetzen, so haben sie nur der einen Bedingung zu genügen, daß $|X| \neq 0$ sein muß.

2. Will man im Falle $s < n$ für A eine zu (5) analoge Darstellung haben, so versagt die in **1.** angewandte Methode. Zwar hat Study[1]) durch Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{F(u,1)}$ — was im wesentlichen auf das Verfahren des Artikels 1 hinauskommt — für A eine Darstellung:

$$(9) \qquad A = (a_1 \Phi_1 + \theta_1) + (a_2 \Phi_2 + \theta_2) + \cdots + (a_s \Phi_s + \theta_s)$$

gefunden, wo:

$$(10) \qquad \Phi_\sigma \theta_{\sigma'} = \theta_{\sigma'} \Phi_\sigma = 0, \quad \theta_\sigma \theta_{\sigma'} = 0, \quad \sigma' \lesseqgtr \sigma, \quad \theta_\sigma \Phi_\sigma = \theta_\sigma,$$

aber diese Zerlegung von A erweist sich nicht als vollständig.

Aus (9) folgt übrigens durch Multiplikation mit Φ_σ unmittelbar

$$(11) \qquad A \Phi_\sigma = a_\sigma \Phi_\sigma + \theta_\sigma,$$

sodaß man die θ_σ ganz einfach durch:

$$(12) \qquad \theta_\sigma = (A - a_\sigma E)\, \Phi_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

definieren könnte; in der Tat folgen vermöge § 3, I aus (12) unmittelbar die Formeln (10) sowie $\theta_\sigma^{\varrho_\sigma} = 0$, genau wie bei Study. Die Matrizen θ_σ sind aber noch weiter zerlegbar. Wir wählen daher einen anderen Weg, der über die Matrix X zur Normalform führt; dazu ist eine etwas umständliche, aber durchaus elementare Erörterung des Lösungssystems von $(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} \{x\}_k = 0$ erforderlich.

§ 5. Normalform der Matrizen im Falle $s \leqq n$.

1. Wir scheiden die Lösungen $\{x^{\sigma,\tau}\}$ der Gleichung:

$$(1) \qquad (A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma} \{x\}_k = 0$$

in Lösungen $L_{\sigma,\varrho}$, die der Gleichung:

$$(2) \qquad (A - a_\sigma E)^{\varrho} \{x\}_k = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma)$$

1) l. c. § 7.

genügen, oder, wie wir sagen wollen, „zum Exponenten ϱ gehören", und in Lösungen $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}$, die zwar zum Exponenten ϱ, aber zu keinem niedrigeren gehören.

1. Hilfssatz. Die Gleichung (1) hat mindestens *eine* $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho_\sigma}$.

Denn gehörten alle $L_{\sigma,\varrho_\sigma}$ schon zum Exponenten $\varrho'_\sigma \leqq \varrho_\sigma$, so hätte die Gleichung:

$$\prod_\sigma (A - a_\sigma E)^{\varrho'_\sigma} \{x\}_k = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

die n linear unbhängigen Lösungen $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ des § 3, 3, und $\prod_\sigma (A - a_\sigma E)^{\varrho'_\sigma}$ wäre nach § 2, III vom Range Null, also gleich 0; dann hätte $\prod_\sigma (u - a_\sigma)^{\varrho'_\sigma}$ den Faktor $f(u, 1)$, sodaß also ϱ'_σ nicht kleiner als ϱ_σ sein kann.

Wie $n - \tau_{\sigma,\varrho_\sigma}$ bisher den Rang von $(A - a_\sigma E)^{\varrho_\sigma}$ bezeichnete, so sei $n - \tau_{\sigma,\varrho}$ der Rang von $(A - a_\sigma E)^{\varrho}$. Dann hat (2) genau $\tau_{\sigma,\varrho}$ linear unabhängige Lösungen, sie bilden eine „Basis" $B_{\sigma,\varrho}$ der $L_{\sigma,\varrho}$. Von einer $B_{\sigma,\varrho-1}$ ausgehend wird man, um zu einer $B_{\sigma,\varrho}$ zu gelangen, noch eine gewisse Anzahl $\theta_{\sigma,\varrho}$ linear unabhängiger $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}$ hinzunehmen müssen, also ist:

$$(3) \qquad \tau_{\sigma,\varrho} \geqq \tau_{\sigma,\varrho-1}, \quad \theta_{\sigma,\varrho} = \tau_{\sigma,\varrho} - \tau_{\sigma,\varrho-1}, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma;$$

jene noch hinzuzufügenden linear unabhängigen $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}$ konstituieren eine „Basis" $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$.

2. Hilfssatz. Durch die $\theta_{\sigma,\varrho}$ Matrizen einer $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ läßt sich keine $L_{\sigma,\varrho'}$ $(\varrho' < \varrho)$ linear, homogen und mit nicht durchaus verschwindenden konstanten Koeffizienten ausdrücken.

Befände sich nämlich im Büschel der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ eine $L_{\sigma,\varrho-1}$ oder $L_{\sigma,\varrho-2}, \ldots$, so könnte man sie mittels der $B_{\sigma,\varrho-1}$ linear und homogen darstellen, sodaß zwischen den Matrizen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ und der $B_{\sigma,\varrho-1}$, die doch zusammen eine $B_{\sigma,\varrho}$ bilden, eine lineare Abhängigkeit bestände. Aus demselben Grunde folgt:

3. Hilfssatz. Aus einer $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ entstehen durch linksseitige Multiplikation mit $(A - a_\sigma E)$, $(A - a_\sigma E)^2, \ldots, (A - a_\sigma E)^{\varrho-1}$ je $\theta_{\sigma,\varrho}$ linear unabhängige $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}, \mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-2}, \ldots, \mathfrak{L}_{\sigma,1}$, und diese $\varrho\theta_{\sigma,\varrho}$ Matrizen — die $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ eingeschlossen — sind auch zusammengenommen linear unabhängig.

Denn könnte man, wenn $\{x\}_k, \{y\}_k, \ldots$ eine $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ ist, von Null verschiedene Konstanten $a, b, \ldots$ so bestimmen, daß für $\varrho' \leqq \varrho - 1$ die Gleichung:

$$(A - a_\sigma E)^{\varrho'} [a\{x\}_k + b\{y\}_k + \cdots] = 0$$

bestände, so wäre $a\{x\}_k + b\{y\}_k + \cdots$ als $L_{\sigma,\varrho-1}$ darstellbar durch die $B_{\sigma,\varrho-1}$, und man hätte wiederum zwischen den Individuen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ und der $B_{\sigma,\varrho-1}$, die zusammen die $B_{\sigma,\varrho}$ bilden, eine lineare Gleichung. Hat man aber irgend welche linear unabhängigen $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}$, ebenso linear unabhängige $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}$ u. s. w., so sind auch diese $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}, \mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}, \ldots$ in ihrer Gesamtheit linear unabhängig; denn multipliziert man eine zwischen ihnen vorausgesetzte Gleichung mit $(A - a_\sigma E)^{\varrho-1}$, so fielen die $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}, \mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-2}, \ldots, \mathfrak{L}_{\sigma,1}$ heraus; die $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho}$ können aber nicht bleiben, sonst erwiesen sie sich als $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}$, folglich haben sie von Anfang an in jener Gleichung gefehlt. Diese hat also nur zwischen den $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}, \mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-2}, \ldots, \mathfrak{L}_{\sigma,1}$ bestanden, und nun folgt aus demselben Grunde, daß die $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}$ fehlen müssen u. s. w.

2. Nach dieser Vorbereitung treffen wir folgende

I. Wahl der Basis $B_{\sigma,\varrho_\sigma}$: Die $B_{\sigma,\varrho_\sigma}$ setzen wir zusammen aus je einer

$$\mathfrak{B}_{\sigma,1}, \mathfrak{B}_{\sigma,2}, \ldots, \mathfrak{B}_{\sigma,\varrho_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

und zwar nehmen wir:

1. die $\theta_{\sigma,\varrho_\sigma}$ Matrizen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho_\sigma}$ ganz beliebig;
2. dagegen bilden wir $\theta_{\sigma,\varrho}$ der $\theta_{\sigma,\varrho-1}$ Matrizen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho-1}$ aus denen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ durch Vorsetzen des Faktors $(A - a_\sigma E)$, die $\theta_{\sigma,\varrho-1} - \theta_{\sigma,\varrho}$ fehlenden $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}$ werden willkürlich hinzugefügt, $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma)$,

immer natürlich unter der Einschränkung, daß alle $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho_\sigma}$ bezw. $\mathfrak{L}_{\sigma,\varrho-1}$ linear unabhängig sein müssen.

Bezeichnet man die Matrizen der $\mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}$ wie folgt:

$$(4) \qquad \mathfrak{B}_{\sigma,\varrho}: \quad \{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s;\ \varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma;\ \theta = 1, 2, \ldots, \theta_{\varrho,\sigma})$$

so wird das Bildungsgesetz der $B_{\sigma,\varrho_\sigma}$ wiedergegeben durch die Formeln:

$$(A - a_\sigma E)\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k = \{x^{\sigma,\varrho-1,\theta}\}_k, \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots, \varrho_\sigma)$$

$$(A - a_\sigma E)\{x^{\sigma,1,\theta}\} = 0,$$

die sich zusammenfassen lassen in:

$$(A - a_\sigma E)\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k = (1 - \delta_{\varrho,1})\{x^{\sigma,\varrho-1,\theta}\}_k$$

oder für die beabsichtigte Anwendung aufgelöst:

$$(5) \qquad A\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k = a_\sigma\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k + (1 - \delta_{\varrho,1})\{x^{\sigma,\varrho-1,\theta}\}_k.$$

3. Wie in § 3, 4. die $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$, so werden jetzt die n Matrizen $\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k$, die ja nur ein besonders gewähltes System $\{x^{\sigma,\tau}\}_k$ bilden, in eine gewisse Reihenfolge gebracht, zunächst nach wachsenden σ,

dann die zu demselben σ und θ gehörigen nach abnehmenden ϱ, sodaß $\{x^{\sigma,\varrho-1,\theta}\}_k$ auf $\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k$ folgt. Eine Tabelle mit drei Eingängen gebe etwa zu jedem Tripel σ, ϱ, θ die Ordnungszahl $[\sigma, \varrho, \theta]$ von $\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_k$ in dieser Reihenfolge an. Dann ist:

$$(6) \qquad [\sigma, \varrho - 1, \theta] = [\sigma, \varrho, \theta] + 1,$$

und für die Matrix X des § 3, 4. hat man den Ausdruck:

$$(7) \qquad \begin{cases} X = \sum\limits_{\sigma,\varrho,\theta} \{x^{\sigma,\varrho,\sigma}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]} = \sum\limits_{\sigma,\varrho,\theta} \Phi_\sigma \{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]}. \\ (\sigma = 1, 2, \ldots, s; \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma; \quad \theta = 1, 2, \ldots, \theta_{\sigma,\varrho}.) \end{cases}$$

Nach der Bemerkung zu § 3, (15) ist aber

$$(8) \qquad \{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]} = X T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]},$$

und da allgemein die $k$te Spalte von $C T_{h,k}$ mit der $h$ten von C übereinstimmt, während alle übrigen Stellen von $C T_{h,k}$ mit Nullen besetzt sind, so ist:

$$(9) \qquad \{x^{\sigma,\varrho-1,\theta}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]} = X T_{[\sigma,\varrho-1,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]} = X T_{[\sigma,\varrho,\theta]+1,\,[\sigma,\varrho,\theta]}.$$

Für $k = [\sigma, \varrho, \theta]$ geht daher (5) über in:

$$(10) \quad A X T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]} = a_\sigma X T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]} + (1 - \delta_{\varrho,1}) X T_{1+[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]},$$

wozu wir noch die aus § 3, (15) entspringende Gleichung:

$$(11) \qquad \Phi_\sigma X = \sum_{\varrho,\theta} \{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]} = X \sum_{\varrho,\theta} T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]}$$

stellen wollen. Wie in § 3, 4. ist $|X|$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $\{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}$ von Null verschieden, und so erhalten wir schließlich, mit Rücksicht auf:

$$(12) \qquad \sum_{\sigma,\varrho,\theta} T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]} = E$$

den schönen

Satz II. Jede Matrix A kann so transformiert werden, daß sie außerhalb der Diagonale $T_{1,1}, T_{2,2}, \ldots, T_{n,n}$ und der ersten dazu parallelen Schrägreihe $T_{2,1}, T_{3,2}, \ldots, T_{n,n-1}$ nur verschwindende Elemente enthält:

$$(13) \quad X^{-1} A X = \sum_{\sigma,\varrho,\theta} a_\sigma T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]} + \sum_{\sigma,\varrho,\theta} (1 - \delta_{\varrho,1})\, T_{1+[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]}$$

$$(14) \qquad X = \sum_{\sigma,\varrho,\theta} \{x^{\sigma,\varrho,\theta}\}_{[\sigma,\varrho,\theta]}.$$

Zugleich ist:

$$(15) \qquad X^{-1} \Phi_\sigma X = \sum_{\varrho,\theta} T_{[\sigma,\varrho,\theta],\,[\sigma,\varrho,\theta]},$$

wo:

$$\sigma = 1, 2, \ldots, s; \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \varrho_\sigma; \quad \theta = 1, 2, \ldots, \theta_{\sigma,\varrho}.$$

Die Formel (13) stellt die bekannte[1]) Normalform der Matrix A dar, aus der auf Grund von (15) mühelos ein zu § 4, (5) analoger Ausdruck für A selber abgeleitet werden kann, wobei sich dann zeigt, daß die Studyschen θ_σ (§ 4, (12)) Summen von Gliedern des Typus:

$$X(1-\delta_{\varrho,1})\,T_{1+[\sigma,\varrho,\theta],\ [\sigma,\varrho,\theta]}\,X^{-1}$$

sind. Doch wollen wir uns hierbei nicht aufhalten. Der Vollständigkeit wegen soll nur noch die Zahl:

$$\tau_{\sigma,\varrho_\sigma} = \theta_{\sigma,\varrho_\sigma-1} + \cdots + \theta_{\sigma,2} + \theta_{\sigma,1}$$
$$= (\tau_{\sigma,\varrho_\sigma} - \tau_{\sigma,\varrho_\sigma-1}) + (\tau_{\sigma,\varrho_\sigma-1} - \tau_{\sigma,\varrho_\sigma-2}) + \cdots + (\tau_{\sigma,2} - \tau_{\sigma,1}) + \tau_{\sigma,1}$$

bestimmt werden. Aus (12) und (13) folgt:

$$X^{-1}(Au_2 - Eu_1)\,X = \sum_{\sigma,\varrho,\theta}(a_\sigma u_2 - u_1)\,T_{[\sigma,\varrho,\theta],\ [\sigma,\varrho,\theta]}$$
$$+\, u_2\sum_{\sigma,\varrho,\theta}(1-\delta_{\varrho,1})\,T_{1+[\sigma,\varrho,\theta],\ [\sigma,\varrho,\theta]}.$$

Die Determinante hiervon ist:

$$|Au_2 - Eu_1| = \prod_\sigma (a_\sigma u_2 - u_1)^{\tau_{\sigma,\varrho_\sigma}},$$

andererseits ist nach § 1, (4), da $F(A,E)=0$ die charakteristische Gleichung von A bedeutet:

$$|Au_2 - Eu_1| = (-1)^n F(u_1,u_2) = \prod_\sigma (a_\sigma u_2 - u_1)^{r_\sigma},$$

also:

(16) $$\tau_{\sigma,\varrho_\sigma} = r_\sigma.$$

4. Man könnte die Sätze des § 3 über die Frobeniusschen Matrizen Φ_σ zu einer eleganten Herleitung aller mit A vertauschbaren Matrizen benutzen, welche die von Ed. Weyr, l. c., angegebene an Einfachheit bedeutend übertrifft; ferner zur Transformation zweier Matrizenpaare in einander, wobei man sich im wesentlichen an das von Ed. Weyr mitgeteilte Verfahren halten könnte. Doch dürfte die in § 4 und § 5 entwickelte Theorie der Normalform von A die Verwendbarkeit der Sätze des § 3 hinreichend dargetan haben.

Straßburg i. E., den 12. Juli 1901.

---

1) Vergl. etwa Schlesinger, Handbuch der Th. d. lin. Differentialgl., Bd. I, S. 127.

Über geodätische Krümmung.

Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

In den folgenden Zeilen erlaube ich mir einen Ausdruck für die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche gelegenen Kurve mitzuteilen, dessen ich mich schon seit einer Reihe von Jahren in geometrischen Vorlesungen bediene und dem ich in der Literatur noch nirgends begegnet bin. Für die Herleitung ist es ganz gleichgültig, von welcher geometrischen Definition der geodätischen Krümmung man ausgehen mag; ich stelle die beiden gebräuchlichsten dieser Definitionen an die Spitze.

Will man die geodätischen Linien auf einer Fläche als diejenigen Kurven definieren, für welche in jedem Punkte die geodätische Krümmung verschwindet, so erklärt man[1]) gewöhnlich die geodätische Krümmung einer Kurve C in einem Punkte P als die zu eben diesem Punkte gehörige Krümmung derjenigen ebenen Kurve C', welche als die orthogonale Projection von C auf die Tangentialebene der Fläche im Punkte P erscheint. — Bezeichnen wir also mit P', P'' die dem Punkte P nach beiden Seiten hin unendlich benachbarten Punkte der Kurve C, mit ω den Winkel, den die beiden aufeinander folgenden Tangenten $(P', P) = t_1$ und $(P, P'') = t_2$ von C miteinander einschließen, mit ω' den Winkel, unter welchem sich die orthogonale Projektion t_1' von t_1 auf die Tangentialebene der Fläche im Punkte P zu t_2 neigt, mit ds das Linienelement (P', P) von C, so ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{\omega}{ds} \tag{1}$$

die gewöhnliche Krümmung (Flexion),

$$\frac{1}{r_g} = \frac{\omega'}{ds} \tag{2}$$

die geodätische Krümmung von C im Punkte P.

Setzt man den Begriff der geodätischen Linie als bekannt voraus, so wird die geodätische Krümmung definiert[2]) als der Quotient des Neigungswinkels zweier unendlich benachbarter geodätischer Tangenten,

---

1) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie. Leipzig 1899.

2) Minding, Crelles Journal, Bd. 6, S. 160; vgl. auch Liouville, Note II zu Monges Applications de l'Analyse à la Géométrie, II. édition 1850, S. 576.

in das Bogenelement der Kurve. Bedeutet also Γ die durch P', P gelegte, Γ' die durch P, P'' gelegte geodätische Linie, nennen wir ferner $\overline{P}''$ den auf P folgenden Punkt von Γ, so wird der Winkel $\bar{\omega}$, unter dem sich die beiden geodätischen Tangenten Γ, Γ' in P schneiden, durch den Neigungswinkel der beiden Geraden $(P, \overline{P}'')$ und $(P, P'') = t_2$ gemessen. Da aber die Ebene $(P', P, \overline{P}'')$, als Schmiegungsebene der geodätischen Linie Γ, auf der Tangentialebene $(P, P'', \overline{P}'')$ senkrecht steht, stellt die Gerade $(P, \overline{P}'')$ die orthogonale Projektion von $(P', P) = t_1$ auf die Tangentialebene dar, es ist also $(P, \overline{P}'') = t_1'$, $\bar{\omega} = \omega'$, und somit diese Definition der geodätischen Krümmung auf die vorhergehende zurückgeführt.

In dem längs t_1' rechtwinkligen Dreikant (t_1, t_2, t_1') haben wir nun:

$$\operatorname{tg} \omega' = \operatorname{tg} \omega \cdot \cos \varepsilon,$$

wenn ε den Neigungswinkel der Tangentialebene (t_1', t_2) zur Schmiegungsebene (t_1, t_2) der Kurve C bedeutet, oder, da ω, ω' unendlich klein sind,

$$\omega' = \omega \cdot \cos \varepsilon;$$

wir finden folglich nach (1) und (2) die Liouvillesche Gleichung:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{r} \cos \varepsilon. \tag{3}$$

Bezeichnen λ, μ, ν die Richtungskosinus der Binormalen an die Kurve C, ferner X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormalen im Punkte P, so ist:

$$\cos \varepsilon = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

und indem wir für λ, μ, ν ihre bekannten Ausdrücke[1]):

$$\lambda = r(y'z'' - z'y''), \quad \mu = r(z'x'' - x'z''), \quad \nu = r(x'y'' - y'x'')$$

einsetzen, wo x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten von P, die Accente — wie auch stets im folgenden — die Derivierten nach der Bogenlänge s von C bedeuten, ergibt sich aus (3):

$$\frac{1}{r_g} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \tag{4}$$

1) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, a. a. O. S. 8.

Bedeuten p, q die krummlinigen Koordinaten von P auf der Fläche, also:

$$(5)\quad \begin{cases} ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2, \\ x' = \dfrac{\partial x}{\partial p} p' + \dfrac{\partial x}{\partial q} q', \\ y' = \dfrac{\partial y}{\partial p} p' + \dfrac{\partial y}{\partial q} q', \end{cases}$$

und bedienen wir uns der bekannten Ausdrücke für die zweiten partiellen Derivierten der x, y, z nach den p, q, wie sie z. B. bei Bianchi-Lukat[1]) angegeben sind, so ergibt sich:

$$(6)\quad x'' = a\frac{\partial x}{\partial p} + b\frac{\partial x}{\partial q} + cX,\quad y'' = a\frac{\partial y}{\partial p} + b\frac{\partial y}{\partial q} + cY,\quad z'' = a\frac{\partial z}{\partial p} + b\frac{\partial z}{\partial q} + cZ,$$

wo

$$(7)\quad \begin{cases} a = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} p'^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} p'q' + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} q'^2 + p'', \\ b = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} p'^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} p'q' + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} q'^2 + q'', \\ c = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(Dp'^2 + 2D'p'q' + D''q'^2) \end{cases}$$

gesetzt wurde und D, D', D'' die zweiten Gaußschen Fundamentalgrößen[2]), $\begin{Bmatrix}\iota\varkappa\\\lambda\end{Bmatrix}$ die Christoffelschen Drei-Indices-Symbole zweiter Art[3]) für die binäre Differentialform ds^2 bedeuten. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (5), (6) erscheint die Determinante auf der rechten Seite der Gleichung (4) in der Form eines Produktes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p' & q' & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial z}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q} & \dfrac{\partial y}{\partial q} & \dfrac{\partial z}{\partial q} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

dessen zweiter Faktor bekanntlich den Wert $\sqrt{EG-F^2}$ besitzt, und so finden wir endlich für die geodätische Krümmung den Ausdruck:

$$\frac{1}{r_g} = \sqrt{EG-F^2} \times$$

$$\left[p''q' - p'q'' - p'^3\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - p'^2q'\left(2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right) + p'q'^2\left(2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right) + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} q'^3\right],$$

1) a. a. O. S. 89, Gln. (I).

2) und zwar in der ursprünglichen Gaußschen Bezeichnung (Disquisitiones gen. circa superficies curvas, art. 10), Werke IV, S. 234.

3) Christoffel, Crelles Journal, Bd. 70, S. 49; vergl. Bianchi-Lukat, a. a. O. S. 43, 67.

oder in expliziter Form:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\Big[(EG-F^2)(p''q'-p'q'') + \Big(E\frac{\partial F}{\partial p} - \tfrac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial q} - \tfrac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial p}\Big)p'^3$$

$$-\Big(E\frac{\partial G}{\partial p} + F\frac{\partial F}{\partial p} - \tfrac{3}{2}F\frac{\partial E}{\partial q} - \tfrac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial p}\Big)p'^2q'$$

$$+\Big(G\frac{\partial E}{\partial q} + F\frac{\partial F}{\partial q} - \tfrac{3}{2}F\frac{\partial G}{\partial p} - \tfrac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial q}\Big)p'q'^2$$

$$-\Big(G\frac{\partial F}{\partial q} - \tfrac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial p} - \tfrac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q}\Big)q'^3\Big].$$

Dieser Ausdruck, gleich Null gesetzt, liefert die Differentialgleichung der geodätischen Linien direkt in der Form, wie sie sich aus den Gleichungen am Schlusse des Art. 18 der Gaußschen „Disquisitiones“ nach Elimination von θ ergibt.[1])

Berichtigungen zu dem Aufsatze:

„Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen.“
Dieses Archiv, III. Reihe, Bd. I, S. 262ff.

S. 265 müssen die Gleichungen Zeile 12 und 17 von oben lauten:

$$\varDelta \log \psi = 4c_1^{-1}c_2^{-1}c_3^{-1}\frac{\varphi}{\psi^2},$$

beziehungsweise:

$$\varDelta v = 4c_1^{-1}c_2^{-1}c_3^{-1}e^{-2v+u}.$$

S. 266, Fußnote 4) lies „Eins oder Null“ statt „Null oder Eins“.

Klausenburg, den 19. Dezember 1901.

Über die zweifachen Punkte von Flächen.

Von Otto Biermann in Brünn.

Im Folgenden sollen die analytischen Kennzeichen für die verschiedenartigen zweifachen Punkte von Flächen abgeleitet werden, wann der Punkt ein biplanarer oder ein uniplanarer, wann er ein Selbstberührungspunkt oder ein isolierter Punkt ist, oder wann er ein konischer Knotenpunkt oder das Ende eines Dornes oder das gemeinsame Ende eines Doppeldornes ist, welche Begriffe ihre Definition

1) Werke, IV, S. 243; vergl. Bianchi-Lukat a. a. O. S. 154, Gln. (10), (10*).

finden werden. Und zwar geschieht das mit Hilfe der Bedingung, unter welcher eine der Variablen in der Gleichung der Fläche an einer singulären Stelle eine (zweideutige) analytische Funktion der beiden anderen ist, und der Bedingungen, unter denen eine Form zweiten Grades in zwei beziehungsweise drei Veränderlichen definit oder indefinit oder keines von beiden ist.

Diese Ableitung der analytischen Kriterien für die verschiedenartigen zweifachen Punkte, mit welchen sich Rohn eingehend im 22. Bde der Math. Ann. beschäftigte, dürfte einiges Interesse erwecken. Die Ausführlichkeit in dem ersten Teile der Untersuchung möchte damit hingenommen werden, daß die Aufgabe einheitlich zu entwickeln ist.

Ist $g(x', y', z') = 0$ die Gleichung einer Fläche bezogen auf rechtwinklige Koordinatenebenen, ist ferner x_0', y_0', z_0' ein die Gleichung erfüllendes Wertesystem, und soll die Fläche in dem zugeordneten Punkte O untersucht werden, so verschiebe man die Koordinatenebenen so, daß der Koordinatenanfangspunkt nach O fällt; dann wird die neue Gleichung unserer Fläche $f(x, y, z) = 0$ durch $(0, 0, 0)$ erfüllt.

Der Flächenpunkt O heißt ein *gewöhnlicher Punkt*, wenn die Fläche ein und nur einmal in stetigem Verlaufe durch ihn hindurchgeht, und wenn sich die Stellung der Tangentenebene in ihm stetig ändert.

Wenn die Funktion $f(x, y, z)$ in der Umgebung von O nach der Maclaurinschen Reihe entwickelbar ist, was wir voraussetzen, und die ersten Ableitungen von f in O:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = f_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f_2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = f_3$$

nicht alle verschwinden, insbesondere aber $f_3 \neq 0$ ist, was im gegenteiligen Falle immer durch eine Drehung des Koordinatensystemes um O zu erreichen ist, dann gibt es eine und nur eine analytische Funktion z von x und y, welche die Gleichung $f = 0$ befriedigt, und für $x = 0$, $y = 0$ verschwindet:

$$z = c_{10}x + c_{01}y + \frac{1}{2!}(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2) + \cdots =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right) + \cdots$$

Die Koeffizienten dieser Reihe sind auf Grund der Forderung zu bestimmen, daß die Substitution der Reihe in die Gleichung

$f(x, y, z) = 0$ eine identisch verschwindende Reihe in x und y ergibt. Es soll also

$$f_1 + f_3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad f_2 + f_3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

$$f_{11} + 2f_{13}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + f_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0^2 + f_3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = 0,$$

$$f_{12} + f_{13}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 + f_{23}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + f_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 + f_3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 = 0,$$

$$f_{22} + 2f_{23}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 + f_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0^2 + f_3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = 0$$

sein u. s. w., wo $f_{\lambda\varkappa} = f_{\varkappa\lambda}$ den Wert der zweiten Ableitung von f nach der $\varkappa^{\text{ten}}$ und λ^{ten} der drei Variablen x, y, z an der Stelle $(0, 0, 0)$ bedeutet.

Man entnimmt aus diesen Gleichungen die verlangten Koeffizienten und erhält die geforderte analytische Funktion z. Doch weil die analytische Funktion stetig und differenzierbar ist, *hat man dann, wenn nicht alle drei Größen f_1, f_2, f_3 verschwinden, in O einen gewöhnlichen Punkt.*

Wenn aber die drei ersten Ableitungen von f alle an der Stelle $(0, 0, 0)$ verschwinden, so sind die ersten zwei der früheren fünf angeschriebenen Gleichungen identisch erfüllt, und aus den drei weiteren entfallen die letzten Glieder.

Sind nicht alle Größen $f_{\varkappa\lambda} = 0$, was wir ein für allemal annehmen, um in O stets einen *zweifachen Punkt* zu behalten, so kann man auch voraussetzen, daß $f_{33} \neq 0$ sei, denn wenn das nicht der Fall sein sollte, so kann man wieder durch eine linear-homogene Substitution dazu gelangen. Dann aber sind die drei reduzierten Gleichungen für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$ nur mit einander verträglich, wenn die Funktional-Determinante der ersten Ableitungen von f an der Stelle $(0, 0, 0)$:

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so ergeben sich für alle Ableitungen von z an der Stelle $(x = 0, \ y = 0)$ je zwei bestimmte Werte.

Die Koeffizienten der zwei Entwicklungen für z werden gewiß reell, wenn von den Unterdeterminanten erster Ordnung von F, die mit $F_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet seien,

$$F_{11} < 0 \quad \text{und} \quad F_{22} < 0$$

sind. Doch weil die Hauptunterdeterminanten von F dann, wenn F verschwindet, das gleiche Vorzeichen haben, so sagen wir, *sobald*

$$f_{33} \neq 0, \quad F = 0 \quad \text{und} \quad F_{\varkappa\varkappa} < 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

sind, geht die Fläche in zwei getrennten stetig verlaufenden Zweigen durch O hindurch. Der Punkt O ist ein biplanarer.

Ein biplanarer Punkt bleibt auch erhalten, wenn die erste oder zweite Hauptunterdeterminante verschwindet, oder wenn die erste und dritte, oder die zweite und dritte Hauptunterdeterminante Null sind, die nicht verschwindenden aber kleiner als Null sind.

Ist

$$F = 0, \quad F_{11} = 0, \quad \text{also auch} \quad F_{12} = 0, \quad F_{13} = 0,$$

ferner

$$F_{22} < 0, \quad F_{33} < 0,$$

oder ist

$$F = 0, \quad F_{11} < 0, \quad F_{22} = 0, \quad \text{also auch} \quad F_{21} = 0, \quad F_{23} = 0$$

und ferner

$$F_{33} < 0,$$

so ist nichts zu bemerken. Doch wenn

$$F = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{22} < 0, \quad F_{33} = 0$$

ist, so hat man

$$f_{22} = 0, \quad f_{23} = 0;$$

und wenn

$$F = 0, \quad F_{11} < 0, \quad F_{22} = 0, \quad F_{33} = 0$$

ist, so hat man

$$f_{11} = 0, \quad f_{13} = 0.$$

Verschwinden F, F_{11} und F_{22}, so ist auch $F_{33} = 0$, weil f_{33} als von Null verschieden vorausgesetzt war. Dann aber verschwinden alle Unterdeterminanten $F_{\varkappa\lambda}$,

$$\Phi(x, y, z) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}xz + 2f_{23}yz + f_{33}z^2$$

wird ein vollständiges Quadrat, und die Tangentenebenen der Fläche in O fallen zusammen.

Diese Aussagen ergeben sich auf Grund der Beziehungen

$$Ff_{11} = F_{22}F_{33} - F_{23}^2, \quad Ff_{22} = F_{11}F_{33} - F_{13}^2, \quad Ff_{33} = F_{11}F_{22} - F_{12}^2.$$

Denn ist z. B.

$$F = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{22} < 0, \quad F_{33} = 0,$$

so folgt hier zunächst, daß

$$F_{12} = 0, \quad F_{13} = 0$$

ist. Und weil ferner

$$F = f_{13}F_{13} + f_{23}F_{23} + f_{33}F_{33} =$$
$$= f_{12}F_{12} + f_{22}F_{22} + f_{23}F_{23} = 0$$

ist, so muß $f_{22} = 0$, $f_{23} = 0$ sein. Setzte man nämlich $F_{23} = 0$, so folgte aus dieser Annahme und der Gleichung $F_{12} = 0$ auch die Gleichung

$$F_{22} = 0,$$

was der Voraussetzung widerspräche.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Falle

$$f_{33} \neq 0, \quad F = 0, \quad F_{\varkappa\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3.)$$

Nun wird

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2!}\frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 + \frac{1}{3!}(f_{111}x^3 + 3f_{112}x^2y + \cdots + f_{333}z^3) +$$
$$+ R_4 = 0,$$

wo $f_{\varkappa\lambda\mu}$ die dritten Ableitungen von f nach der $\varkappa^{\text{ten}}$, λ^{ten}, μ^{ten} der drei Variablen x, y, z an der Stelle $(0, 0, 0)$ bedeuten und R_4 ein Aggregat von Gliedern ist, deren Dimensionen größer sind als drei.

Man setze

$$f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z = z_1,$$

und eliminiere z, so findet man

$$\frac{z_1^2}{2!f_{33}} + \frac{1}{3!}[A_{111}x^3 + 3A_{112}x^2y + \cdots + A_{333}z_1^3] + \overline{R}_4 = 0,$$

wobei insbesondere

$$A_{111} = f_{111} - 3f_{113}\frac{f_{13}}{f_{33}} + 3f_{133}\left(\frac{f_{13}}{f_{33}}\right)^2 - f_{333}\left(\frac{f_{13}}{f_{33}}\right)^3$$

ist. Nimmt man hier zuerst A_{111} als von Null verschieden an und setzt

$$x = \varepsilon\xi^2, \quad y = \varepsilon\xi^2\eta, \quad z_1 = \varepsilon\xi^3\zeta,$$

wo über $\varepsilon = \pm 1$ noch verfügt werden soll, so geht nach Division durch ξ^4 die letzte Gleichung in die folgende über:

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{f_{33}}\zeta^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon A_{111}\xi^2\right] + u_3 + u_4 + \cdots = 0,$$

wo u_ν ein Aggregat von Gliedern ν^{ter} Dimension in ξ, η, ζ bezeichnet.

Durch die letzte Gleichung ist eine Fläche dargestellt, die in dem Punkte O, darum weil der Koeffizient von ζ^2 von Null verschieden ist,

die F, f_{22}, F_{11}, F_{33} und F_{22} entsprechenden Größen bis auf die letzte verschwinden, diese aber gleich $\frac{\varepsilon A_{111}}{3 f_{33}}$ ist und bei passend gewähltem ε kleiner als Null ausfällt, einen biplanaren Punkt besitzt. Es gibt zwei Entwickelungen für ζ:

$$\zeta' = \sqrt{-\frac{\varepsilon A_{111} f_{33}}{3}}\,\xi + \frac{1}{2!}(a_{20}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{02}\eta^2) + \cdots,$$

$$\zeta'' = -\sqrt{-\frac{\varepsilon A_{111} f_{33}}{3}}\,\xi + \frac{1}{2!}(b_{20}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{02}\eta^2) + \cdots;$$

aber weil bei positivem oder negativem ε nur positiven, beziehungsweise negativen x-Werten reelle ξ zugehören, so gehen nur bei positiven, bez. negativen x-Werten allein, aber bei positiven und negativen y-Werten reelle ζ-Werte hervor, jenachdem

$$A_{111} f_{33} \lessgtr 0$$

ist, und die Fläche $f(x, y, z) = 0$ verläuft links bez. rechts von der Ebene $x = 0$; aber einem Wertepaare x, y gehören zwei z-Werte zu. Die zwei Flächenzweige haben die gemeinsame Tangentenebene

$$f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z = 0,$$

und sie treten bis an den Schnitt dieser mit der Ebene $x = 0$ an diese Ebene heran. Die Fläche erfährt somit in O eine *Rückkehr;* denn die Flächenzweige verlaufen zu verschiedenen Seiten der Tangentenebene, weil die Werte ζ' und ζ'' von ζ und die entsprechenden Werte von z_1 in genügender Nachbarschaft der Stelle ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$) von verschiedenem Zeichen sind.

Ist aber $A_{111} = 0$, so setze man in der Gleichung

$$\frac{z_1^2}{2! f_{33}} + \frac{1}{3!}[3A_{112}x^2y + \cdots + A_{333}z_1^3] + \overline{R}_4 = 0$$

$$z_1 = xz_2, \qquad y = xy_2,$$

dann erhält man nach Division durch x^2 die Gleichung

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{f_{33}}z_2^2 + 2\frac{A_{112}}{2}xy_2 + 2\frac{A_{113}}{2}xz_2 + \frac{A_{1111}x^2}{3 \cdot 4}\right] + v_3 + v_4 + \cdots = 0,$$

wo wieder v_ν ein Aggregat von Gliedern ν^{ter} Dimension in x, y_2, z_2 ist.

Hier sind die F, F_{11}, F_{22} und F_{33} entsprechenden Größen der Reihe nach

$$\frac{-A_{112}^2}{4 f_{33}}, \quad 0, \quad \frac{A_{1111}}{3 \cdot 4}\frac{1}{f_{33}} - \tfrac{1}{4}A_{113}^2 \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{4}A_{112}^2.$$

Weil wir aber bisher den zweifachen Flächenpunkt nur zu beurteilen verstehen, wenn F verschwindet und mindestens eine der Hauptunterdeterminanten F_{11}, F_{22} negativ ist, müssen wir voraussetzen

$$A_{112} = 0, \quad \frac{1}{3\cdot 4}\frac{A_{1111}}{f_{33}} - \tfrac{1}{4}A_{113}^2 < 0.$$

Dann haben wir für die neue Fläche einen biplanaren Punkt, und die erste Fläche weist in O einen *Selbstberührungspunkt* auf; denn z ist eine zweiwertige Funktion in der Umgebung von O, sowohl für positive, als auch für negative x und y, und es besteht nur eine Tangentenebene.

Zunächst sind nun die Fälle zu betrachten, wo $f_{33} \neq 0$ und $F = 0$ ist, und entweder

$$F_{11} > 0, \quad F_{22} > 0, \quad F_{33} > 0$$

oder

$$F_{11} = 0, \quad F_{22} > 0, \quad F_{33} > 0$$

oder

$$F_{11} = 0, \quad F_{22} > 0, \quad F_{33} = 0, \quad (f_{22} = 0, f_{23} = 0)$$

oder

$$F_{11} > 0, \quad F_{22} = 0, \quad F_{33} > 0$$

oder

$$F_{11} > 0, \quad F_{22} = 0, \quad F_{33} = 0 \quad (f_{11} = 0, \ f_{13} = 0).$$

Das sind Fälle, die wieder zusammengehören, so daß nur der erste einer besonderen Erwägung bedarf.

Es werden nun an der Stelle $(x = 0, \ y = 0)$, wo z verschwindet,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 f_{33} = - f_{13} \pm i\sqrt{F_{22}},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 f_{33} = - f_{23} \pm i\sqrt{F_{11}},$$

und die Gleichungen der Tangentenebenen in O heißen

$$f_{33}\zeta = (- f_{13} \pm i\sqrt{F_{22}})\xi + (- f_{23} \pm i\sqrt{F_{11}})\eta.$$

Der Schnitt dieser konjugierten Tangentenebenen ist reell. Die Schnittlinie ist aber auch Tangente in O; es gibt daher in der Nähe von O reelle Punkte, obgleich man aufs erste meinen sollte, daß sich wegen der komplexen Werte für die Ableitungen von z an der Stelle O nur ein isolierter Punkt ergibt. Wir kommen später wieder auf diesen Fall zurück.

Ein *isolierter Punkt* wird in O gewiß dann eintreten, wenn $\Phi(x,y,z)$ eine positive oder eine negative definite Form ist; denn dann wird bei genügend kleinen Werten von x, y, z

$$\frac{1}{2!}\,\Phi(x, y, z) + R_3$$

immer das Zeichen des ersten Summanden haben und nicht verschwinden. Indem wir aber bemerken, daß

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 + \frac{1}{f_{33}F_{11}}(F_{11}y - F_{12}x)^2 + \frac{F}{F_{11}}x^2$$

ist, so können wir unmittelbar erschließen, *daß der zweifache Punkt ein isolierter ist, wenn*

$$f_{33}F > 0 \quad \textit{und} \quad F_{11} > 0$$

ist. Wäre $f_{33} = 0$, aber eine der Größen f_{11}, f_{22} von Null verschieden, so daß es am einfachsten wäre, x oder y als Funktion der anderen Variablen darzustellen, so würde man ebenso sagen, es gibt in O einen isolierten Punkt, wenn entweder

$$f_{22}F > 0, \quad F_{22} > 0$$

oder

$$f_{11}F > 0, \quad F_{33} > 0$$

ist.

Bleiben wir bei dem Falle $f_{33} \neq 0$, so ist fernerhin noch zu untersuchen, wie die Fläche in dem zweifachen Punkte O beschaffen ist, wenn entweder

$$f_{33}F > 0, \quad F_{11} < 0$$

oder

$$f_{33}F < 0, \quad F_{11} \gtreqless 0$$

ist. Denn der Fall, $f_{33}F > 0$ und $F_{11} = 0$ kann wegen der Relation $f_{33}F = F_{11}F_{22} - F_{12}^2$ nicht vorkommen.

Im Falle $f_{33}F > 0$, $F_{11} < 0$ oder in den Fällen $f_{33}F < 0$, $F_{11} \gtreqless 0$ wird $\Phi(x, y, z)$ gewiß eine indefinite Form. Es gibt also unendlich viele Wertesysteme, für die Φ verschwindet, andere, für die Φ positiv oder negativ ist, und darnach gibt es unendlich viele Stellen in der Umgebung von O, wo

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2!}\,\Phi(x, y, z) + R_3 = 0$$

wird, d. h. in der Nähe des zweifachen Punktes gibt es noch unendlich viele andere Flächenpunkte.

Ist $f_{33}F < 0$, $F_{11} = 0$, so hat man in $\Phi(x, y, z)$ auch eine indefinite Form, was zuerst festgestellt werden soll, damit dann alle die Fälle, wo Φ indefinit ist, zugleich weiter behandelt werden können.

Es ist jetzt

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 + \frac{F_{22}}{f_{33}}x^2 - 2\frac{F_{12}}{f_{33}}xy =$$

$$= \frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 + \frac{1}{f_{33}F_{22}}(F_{22}x - F_{12}y)^2 - \frac{F_{12}^2}{f_{33}F_{22}}y^2,$$

und man sieht, daß diese Form einmal das Zeichen von $F_{22}f_{33}$, dann aber das von $-F_{22}f_{33}$, also Werte von entgegengesetzten Zeichen annimmt.

Ist $f_{33}F < 0$, $F_{11} = 0$ und $F_{22} = 0$, so wird

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 - 2\frac{F_{12}}{f_{33}}xy,$$

und diese Form ist auch indefinit.

Sollte auch $F_{12} = 0$ sein, so verschwände F, weil $f_{33} \neq 0$ ist; und diesen Fall haben wir hier ausgeschlossen.

Um die Fläche in der Nachbarschaft der Stelle O zu untersuchen, wenn $f_{33}F \neq 0$, legen wir durch O stetige Mannigfaltigkeiten von ∞^2 Punkten und sehen nach, ob diese so gewählt werden können, daß sie in genügender Nähe von O nur diesen Punkt mit der gegebenen Fläche gemein haben, und andere solche Mannigfaltigkeiten, welche die Fläche in Kurven schneiden, die in O einen Doppelpunkt besitzen. Indem wir die schneidende Fläche durch ihre Tangentenebene ersetzen, ist die erste Frage die, ob es reelle Werte für α und β gibt, so daß die Ebene

$$z + \alpha x + \beta y = 0$$

die Fläche

$$\frac{1}{2!}\Phi(x, y, z) + R_3 = 0$$

derart schneidet, daß die Schnittkurve in O einen isolierten Punkt besitzt. Zu diesem Zwecke muß die Form zweiten Grades

$$X(x, y) = \frac{1}{f_{33}}((f_{13} - \alpha f_{33})x + (f_{23} - \beta f_{33})y)^2 + \frac{1}{f_{33}F_{11}}(yF_{11} - xF_{12})^2 + \frac{F}{F_{11}}x^2$$

eine definite sein, also muß

$$\Psi(\alpha, \beta) = \left[\frac{1}{f_{33}}(f_{13} - \alpha f_{33})^2 + \frac{F_{12}^2}{f_{33}F_{11}} + \frac{F}{F_{11}}\right]\left[\frac{1}{f_{33}}(f_{23} - \beta f_{33})^2 + \frac{F_{11}}{f_{33}}\right] -$$

$$- \left[\frac{1}{f_{33}}(f_{13} - \alpha f_{33})(f_{23} - \beta f_{33}) - \frac{F_{12}}{f_{33}}\right]^2 > 0$$

gemacht werden können. Es ist nun aber

$$\Psi(\alpha, \beta) = [f_{11} - 2\alpha f_{13} + \alpha^2 f_{33}][f_{22} - 2\beta f_{23} + \beta^2 f_{33}] -$$
$$- [f_{12} - \alpha f_{23} - \beta f_{13} + \alpha\beta f_{33}]^2 =$$
$$= \alpha^2 F_{11} + 2\alpha\beta F_{12} + \beta^2 F_{22} + 2\alpha F_{13} + 2\beta F_{23} + F_{33},$$

und wenn wir α und β als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer (α, β)-Ebene ansehen, so stellt die Gleichung

$$\Psi(\alpha, \beta) = 0$$

eine Kurve zweiter Ordnung dar, die im allgemeinen ein Gebiet von Punkten (α, β), wo $\Psi(\alpha, \beta) < 0$ ist, von einem solchen trennt, wo $\Psi(\alpha, \beta) > 0$ ist, und dann wird die gegebene Fläche in O auch die beiderlei genannten Besonderheiten aufweisen; *dann heiße der Flächenpunkt ein konischer Knotenpunkt.*

Die Determinante der Gleichung $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ ist

$$B = F^2,$$

und die Unterdeterminante des letzten Gliedes ist

$$B_{33} = f_{33} F.$$

Wenn nun $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ eine imaginäre Ellipse darstellte, d. h.

$$B \neq 0, \quad B_{33} > 0, \quad F_{11} B > 0$$

wäre, aber auch die auf die rechtwinkligen Achsen α, β, γ bezogene Fläche

$$\gamma = \Psi(\alpha, \beta)$$

unter der $\alpha\beta$-Ebene läge, wäre niemals $\Psi(\alpha, \beta) > 0$; es gäbe in O keinen konischen Knotenpunkt. Das kann aber nicht eintreten; denn damit die Fläche $\gamma = \Psi(\alpha, \beta)$ einen höchsten Punkt besitzt, muß $F_{11} < 0$ sein, und jetzt müßte auch $B < 0$ sein, was nicht zutrifft, weil $B = F^2$ ist.

Wenn $F \neq 0$, kann die Gleichung $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ auch nicht ein Paar imaginärer Geraden mit einem reellen Schnittpunkte, sie kann nicht ein imaginäres Parallelenpaar oder eine Doppelgerade darstellen, in welchen Fällen $\Psi(\alpha, \beta)$ von negativem Zeichen bleiben könnte. Die Kurve $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ trennt also stets Gebiete von Punkten (α, β), wie sie früher genannt waren, und *wir haben im Punkte O immer einen konischen Knotenpunkt, sobald*

$$f_{33} F > 0, \quad F_{11} < 0$$

oder

$$f_{33} F < 0, \quad F_{11} \lesseqgtr 0$$

ist.

Im Falle

$$f_{33}F < 0, \quad F_{11} = 0$$

ist auch

$$B = F^2,$$

aber

$$B_{33} = -F_{12}^2,$$

und darum kann auch hier die Gleichung $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ nicht am Ende eine Kurve darstellen, welche nicht ein Gebiet von Punkten, wo $\Psi(\alpha, \beta) < 0$ ist, von solchen trennt, wo $\Psi(\alpha, \beta) > 0$ ist. *Wir haben daher auch in diesem Falle in O einen konischen Knotenpunkt.*

Jedesmal kann man durch O ∞^1 Ebenen legen, welche die gegebene Fläche in Kurven schneiden, die in O eine höhere Singularität aufweisen als einen einfachen Doppelpunkt; denn es gibt ∞^1 Wertepaare, welche die Gleichung $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ befriedigen; und nach deren Natur können die konischen Knotenpunkte unterschieden werden.

Und nun könnten wir in der Beschreibung der Flächenpunkte weitergehen, die bei Betrachtung des uniplanaren Punktes auftreten, könnten also

$$A_{112} \neq 0$$

voraussetzen.

Darauf aber sind die einzigen noch zu behandelnden Fälle die, wo

$$f_{33} \neq 0, \quad F = 0, \quad F_{11} \text{ oder } F_{22} \gtreqless 0$$

ist, oder beide der genannten Hauptunterdeterminanten positiv sind, aber nicht beide verschwinden.

Ist

$$F_{11} > 0,$$

so wird

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{f_{33}}(f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z)^2 + \frac{1}{f_{33}F_{11}}(F_{11}y - F_{12}x)^2,$$

und diese Form ist weder definit noch indefinit; sie bewahrt das Zeichen von f_{33}, und es gibt in der Nähe von O noch unendlich viele weitere Flächenpunkte.

Um über die Beschaffenheit der Fläche an der Stelle O etwas aussagen zu können, legen wir wieder durch O Ebenen $z + \alpha x + \beta y = 0$, und sehen nach, ob man α und β so wählen könne, daß

$$X(x, y) = \frac{1}{f_{33}}[(f_{13} - \alpha f_{33})x + (f_{23} - \beta f_{33})y]^2 + \frac{1}{f_{33}F_{11}}(F_{11}y - F_{12}x)^2$$

eine definite Form wird; denn dann gibt es Ebenen durch O, welche die Fläche in O, aber in der Nähe von O nicht treffen. Damit $X(x, y)$ definit werde, muß, wie man mit Rücksicht auf die Beziehung

$$f_{11}F_{11} + f_{12}F_{12} + f_{13}F_{13} = 0$$

direkt findet, wieder die frühere Beziehung erfüllt sein

$$\Psi(\alpha, \beta) > 0.$$

Die Gleichung $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ hat aber jetzt die Determinante $B = 0$, und es ist $B_{\varkappa\lambda} = 0$, weil $B_{ii} = f_{ii}F = 0$ ist. Darum aber gilt

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{F_{11}}[F_{11}\alpha + F_{12}\beta + F_{13}]^2,$$

und weil $F_{11} > 0$ ist, gibt es wirklich Ebenen durch O der verlangten Art, aber keine Ebenen, welche die gegebene Fläche in Kurven schneiden, die in O einen Doppelpunkt haben, wohl aber ∞^1 Ebenen, welche die Fläche im allgemeinen in einer Kurve mit einem Rückkehrpunkt in O schneiden.

Wir sagen jetzt, wo

$$F = 0, \quad F_{11} > 0$$

ist, wir hätten in O das *Ende eines Dornes oder das gemeinsame Ende eines Doppeldornes*, je nachdem die reellen Schnittkurven von einer Seite oder von zwei entgegengesetzten Seiten an O herantreten; wie dies zum Beispiel der Fall ist, wenn die Schnittkurven in O einen Selbstberührungspunkt haben. (Die analytische Unterscheidung der hier genannten Fälle erfordert nur die Anwendung bekannter Kriterien für die Singularitäten ebener Kurven.)

Im Falle

$$F = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{22} > 0$$

ist, wird auch $F_{12} = 0$ und $F_{13} = 0$, und es ist

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{f_{33}}[f_{13}x + f_{23}y + f_{33}z]^2 + \frac{F_{22}}{f_{33}}x^2$$

eine weder definite, noch indefinite Form. Man setze wieder $z = -\alpha x - \beta y$, bilde

$$X(x, y) = (f_{11} - 2\alpha f_{13} + \alpha^2 f_{33})x^2 +$$
$$+ \frac{2}{f_{33}}(f_{13} - \alpha f_{33})(f_{23} - \beta f_{33})xy + \left(\frac{f_{23}^2}{f_{33}} - 2\beta f_{23} + \beta^2 f_{33}\right)y^2$$

und beachte, daß wegen $F_{11} = 0$, beziehungsweise $F_{12} = 0$

$$\frac{f_{23}^2}{f_{33}} = f_{22}, \quad \frac{f_{13}f_{23}}{f_{33}} = f_{12}$$

ist, und hierauf

$$\Psi(\alpha, \beta) = \beta^2 F_{22} + 2\beta F_{23} + F_{33}$$

wird. Wenn $\Psi(\alpha, \beta)$ für ein Gebiet von Werten α, β größer als Null, aber nie kleiner als Null wird, so haben wir in O wieder ein *Dornende* oder *das gemeinsame Ende eines Doppeldornes.*

Das ist aber der Fall; denn wegen der Beziehung $F_{22}F_{33} - F_{23}^2 = 0$ und wegen $F_{22} > 0$ wird

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{F_{22}}(F_{22}\beta + F_{23})^2 \geqq 0.$$

Ist

$$F = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{22} > 0, \quad F_{33} = 0,$$

so wird

$$\Psi(\alpha, \beta) = F_{22}\beta^2 \geqq 0,$$

und wir haben abermals ein *Dornende* oder das *gemeinsame Ende eines Doppeldornes.*

So sind die verschiedenartigen Fälle der zweifachen Flächenpunkte behandelt.

Ist O ein k-facher Punkt, so wird man die Natur der Fläche in O ebenso erledigen mit Hilfe der Bedingungen, unter denen z als Funktion von x und y im singulären Punkte eine analytische Funktion ist, und mit Hilfe der Kriterien, unter denen eine Form k^{ten} Grades in zwei beziehungsweise drei Variablen definit oder indefinit ist, und wann sie weder das eine noch das andere ist.

Brünn, den 23. Januar 1902.

Zur Gruppentheorie.

Von ALFRED LOEWY in Freiburg i. B.

Unsere Kenntnisse über Gruppen linearer homogener Substitutionen, von denen außer dem Gruppencharakter nichts Näheres bekannt ist, sind sehr geringe; daher wird, wie ich hoffen darf, die Vorlegung eines allgemeinen Fundamentalsatzes über Gruppen linearer homogener Substitutionen vielleicht nicht unwillkommen sein. In Bezug auf die nähere Ausführung sei auf eine in den Transactions of the American Mathematical Society erscheinende Arbeit verwiesen.[1])

Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen heißt reduzibel, wenn man $m < n$ lineare homogene Funktionen der

1) Dieselbe ist inzwischen in Bd. 4 der Transactions erschienen.



Variablen mit konstanten Koeffizienten finden kann, welche durch jede Substitution der vorgelegten Gruppe nur unter sich transformiert werden. Z. B. ist eine jede Permutationsgruppe, als Gruppe linearer homogener Substitutionen betrachtet, stets reduzibel; denn bei ihr wird die Summe der Variablen in sich transformiert. Eine jede reduzible Gruppe G linearer homogener Substitutionen läßt sich durch Einführung linearer homogener Funktionen der Variablen in eine ähnliche Gruppe $\overline{G}$ transformieren, die symbolisch in der Form:

$$\text{(a)} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \mathfrak{a}_{\lambda-11} & \mathfrak{a}_{\lambda-12} & \mathfrak{a}_{\lambda-13} & \mathfrak{a}_{\lambda-14} & \ldots \mathfrak{a}_{\lambda-1\lambda-1} & 0 \\ \mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \ldots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

geschrieben werden kann; dabei bedeutet $\mathfrak{a}_{ki}$ $(k \geqq i)$ eine Gesamtheit von Matrices mit $\mathfrak{f}_k$ Zeilen und $\mathfrak{f}_i$ Kolonnen. $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ bedeutet eine Gesamtheit von Matrices, die eine *irreduzible*, mit G isomorphe Gruppe darstellen. Es ist natürlich $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \ldots + \mathfrak{f}_\lambda = n$, wenn G eine Gruppe in n Variablen ist. Hat man eine reduzible Gruppe G in eine ähnliche Gruppe $\overline{G}$ transformiert, daß diese die Form (a) hat und, worauf besonders Gewicht zu legen ist, alle in der Diagonale stehenden Matrices $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ irreduzible Gruppen sind, so sagen wir: *G ist unter Hervorhebung der irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe transformiert worden.* Die in der Diagonale stehenden irreduziblen Gruppen $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ nennen wir die *irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen von G.*

Es gilt nun folgender Satz:

Wie auch immer eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung ihrer irreduziblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe transformiert wird, so kann man die irreduziblen Bestandteile, die sich irgend einmal ergeben, den irreduziblen Bestandteilen, die irgend ein anderes Mal auftreten, so eineindeutig zuordnen, daß zwei zugeordnete irreduzible Teilgruppen gleich viele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.

Dieser Satz ist recht anwendungsfähig; er läßt sich z. B. mit Vorteil für die Theorie der Reduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen verwerten; denn die Reduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen ist ein rein gruppentheoretisches Problem. (Vgl. meine Arbeit über die irreduziblen Faktoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes. Berichte der math.-phys. Klasse der K. sächs.

Gesellsch. der Wiss. 13. Jan. 1902.) Wendet man den obigen Satz auf jene Gattung von Gruppen linearer homogener Substitutionen an, die so beschaffen sind, daß die charakteristischen Gleichungen, welche zu sämtlichen Substitutionen der Gruppe gehören, nur eine endliche Anzahl von unter einander verschiedenen Wurzeln besitzen, und welche ich, da sie die Gruppen einer endlichen Anzahl linearer homogener Substitutionen als Spezialfall enthalten, als Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe bezeichnet habe (Math. Annalen, Bd. 53 S. 225), so erhält man folgendes Resultat:

Wie man auch immer eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe unter Hervorhebung ihrer irreduziblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe transformiert, so werden auf diese Art, wenn man ähnliche Gruppen nicht als verschieden ansieht (und voraussetzt, daß die vorgelegte Gruppe, falls sie nicht endlich ist, wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter unter einander verschiedene Wurzeln hat), *λ irreduzible endliche Teilgruppen $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$, die jedoch nicht alle verschieden zu sein brauchen, eindeutig bestimmt. Notwendig und hinreichend, damit G im besonderen eine endliche Gruppe ist, erweist sich die Ähnlichkeit von G mit der zerlegbaren Gruppe:*

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}. \end{matrix}$$

Die oben eingeführte Voraussetzung, daß die vorgelegte Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, wenn sie nicht endlich ist, wenigstens eine Substitution besitzen soll, deren charakteristische Gleichung lauter unter einander verschiedene Wurzeln haben soll, ist vermutlich überflüssig. Leider ist es mir bisher jedoch nicht gelungen, meine früher über die Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe angestellten Untersuchungen, auf die ich mich für den Beweis des letzten Satzes stützte, von dieser Voraussetzung zu befreien. Die Beseitigung jener Voraussetzung wäre auch deswegen erwünscht, weil dann eine andere, für die Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, von denen nichts weiter als der Gruppencharakter bekannt ist, fundamentale Frage entschieden wäre, nämlich ob eine jede unendliche Gruppe linearer homogener Substitutionen eine Substitution unendlich hoher Ordnung besitzen muß. Ich darf mir erlauben, bei dieser Gelegenheit darauf

hinzuweisen, daß ich diesen Satz unter der Voraussetzung, die Gruppe besitze wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter unter einander verschiedene Wurzeln hat, früher bejahend entschieden habe.

Man kann auch den Begriff der Irreduzibilität einer Gruppe linearer homogener Substitutionen bezüglich eines Zahlkörpers oder Rationalitätsbereiches Ω definieren. Ist Ω ein Zahlkörper oder Rationalitätsbereich, d. h. ein System von unendlich vielen Zahlen, das von der Vollständigkeit ist, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit Ausnahme der Division durch Null) irgend welcher Zahlen des Systemes nur zu Zahlen desselben Systemes führt, und G eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen, deren Substitutionskoeffizienten ausnahmslos dem Körper Ω angehören, so sagen wir: G ist bezüglich des Körpers Ω reduzibel, wenn man $m < n$ lineare homogene Funktionen der Variablen mit konstanten Koeffizienten finden kann, welche durch eine jede Substitution der Gruppe nur unter sich transformiert werden und dabei *nur Transformationen mit Koeffizienten aus* Ω *erleiden.*

Der zuerst mitgeteilte Satz läßt sich auch auf die Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω derartig ausdehnen, daß man statt der Irreduzibilität schlechtweg diejenige bezüglich Ω anwendet. Man kann ferner beweisen: *Eine jede Gruppe einer endlichen Anzahl linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus einem Zahlkörper* Ω *ist einer Gruppe ähnlich, die in bezüglich* Ω *irreduzible endliche Gruppen zerlegbar ist.*

Für die Theorie der endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus einem Körper Ω kann man sich daher, wenn man ähnliche Gruppen nicht als verschieden ansieht, auf die Aufsuchung der bezüglich Ω irreduziblen endlichen Gruppen beschränken. Dieses Resultat ist vielleicht auch deswegen wertvoll, weil höchst wahrscheinlich durch die Gruppen einer endlichen Anzahl linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus den speziellen Zahlkörpern, die aus dem absoluten Rationalitätsbereiche durch Adjunktion von Einheitswurzeln hervorgehen, sämtliche endliche Gruppen erschöpft werden, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht (Maschke: Über den arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen, Math. Annalen, Bd. 50, S. 492).

Freiburg, August 1902.

Analytische Sphärik in homogenen Koordinaten.

Von FR. DANIËLS in Freiburg (Schweiz).

Erster Teil.

Es werden in nachstehender Untersuchung die folgenden Sätze der Vektorenrechnung benutzt:

1. Die Summe der Vektoren $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}, \ldots$ (geometrische Summe) ist denselben Rechengesetzen unterworfen wie die algebraische. Ist A der Tensor von $\boldsymbol{A}$, und sind A_1, A_2, A_3 die Längen seiner Komponenten nach drei rechtwinkligen Achsen, so ist $\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{i} + A_2 \boldsymbol{j} + A_3 \boldsymbol{k}$, wenn $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ Einheitsvektoren in den drei Achsen sind. Von diesen sei vorausgesetzt, daß sie ein Rechtssystem bilden: $\boldsymbol{i}$ nach vorn, $\boldsymbol{j}$ nach rechts, $\boldsymbol{k}$ nach oben.

2. Die *skalare* Größe:

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \equiv AB \cos(\boldsymbol{AB}) \tag{1}$$

wird $\boldsymbol{AB}$ geschrieben und *skalares Produkt* genannt. Aus dieser Definition geht hervor:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \cdots) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} + \cdots;$$

$$\boldsymbol{A}^2 \equiv \boldsymbol{AA} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2 \tag{2}$$

und

$$\boldsymbol{AB} = 0, \tag{3}$$

falls $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ ist.

3. Der neue *Vektor:*

$$(A_2 B_3 - A_3 B_2)\boldsymbol{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\boldsymbol{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\boldsymbol{k} \tag{4}$$

wird $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ geschrieben und *Vektorprodukt* genannt. Er ist nach § 2, (3) senkrecht zu $\boldsymbol{A}$ und zu $\boldsymbol{B}$ und hat nach § 2, (2) den Tensor $AB \sin(\boldsymbol{AB})$. Es bilden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ ein Rechtssystem: nimmt man für die beiden ersten Vektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$, so findet sich der dritte gleich $\boldsymbol{k}$. Aus der Definition (4) geht hervor: $\mathrm{V}\boldsymbol{BA} = -\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$; $\mathrm{V}\boldsymbol{AB} + \mathrm{V}\boldsymbol{AC} + \cdots = \mathrm{V}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \cdots)$; $\mathrm{V}\boldsymbol{AA} = 0$; $\mathrm{V}\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$; $\mathrm{V}\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$; $\mathrm{V}\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$.

4. Das skalare Produkt $\boldsymbol{C}\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ der Vektoren $\boldsymbol{C}$ und $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ ist nach § 2, (1) $C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)$ oder $|C_1A_2B_3|$: folglich wird:

$$(5) \qquad \boldsymbol{A}\mathrm{V}\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{B}\mathrm{V}\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{C}\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$$

sein. Es verschwindet dieses Produkt, sobald die drei Vektoren koplanar sind.

Für das Vektorprodukt $\mathrm{V}\boldsymbol{C}\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ der Vektoren $\boldsymbol{C}$ und $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ findet sich nach § 3, (4):

$$[C_2(A_1B_2 - A_2B_1) - C_3(A_3B_1 - A_1B_3)]\boldsymbol{i} + [-]\boldsymbol{j} + [-]\boldsymbol{k} \equiv$$
$$[(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)A_1 - (C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3)B_1]\boldsymbol{i} + [-]\boldsymbol{j} + [-]\boldsymbol{k} \equiv$$
$$(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)(A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) - (C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3).(B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k});$$

folglich ist:

$$(6) \qquad \mathrm{V}\boldsymbol{C}\mathrm{V}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{BC} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{CA}.$$

Bildet man von den hier vorkommenden Vektoren das skalare Produkt mit $\boldsymbol{D}$, so bekommt man $\boldsymbol{D}\mathrm{V}\boldsymbol{C}\mathrm{V}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AD}.\boldsymbol{BC} - \boldsymbol{BD}.\boldsymbol{CA}$, oder mit Gebrauchmachung von § 4, (5):

$$(7) \qquad \mathrm{V}\boldsymbol{AB}\mathrm{V}\boldsymbol{DC} = \boldsymbol{AD}.\boldsymbol{BC} - \boldsymbol{AC}.\boldsymbol{BD}.$$

5. Sind $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ drei von O ausgehende, nicht koplanare Einheitsvektoren, so ist $a\mathfrak{r}_1 + b\mathfrak{r}_2 + c\mathfrak{r}_3$ die von O ausgehende Hauptdiagonale im Parallelepipedum, dessen in O zusammenstoßende Kanten $a\mathfrak{r}_1$, $b\mathfrak{r}_2$, $c\mathfrak{r}_3$ sind. Es ist klar, daß umgekehrt jeder beliebige Vektor auf diese Form gebracht werden kann.

6. *Das sphärische Dreieck.* — Jeder vom Zentrum O ausgehende Vektor $\mathfrak{r}$ bestimmt auf der Kugelfläche (Radius $= 1$) einen Punkt R; wir nennen $\mathfrak{r}$ den Vektor des Punktes R. Jedes positive Vielfache dieses *Einheitsvektors* $\mathfrak{r}$ bestimmt denselben Punkt. Ein großer Kreis oder eine sphärische Gerade $(\mathfrak{L})$ wird bestimmt durch den von O ausgehenden zu seiner Ebene senkrechten Vektor $(\mathfrak{l})$; wir nennen $(\mathfrak{l})$ den Vektor der sphärischen Geraden. Jedes positive oder negative Vielfache dieses Einheitsvektors $(\mathfrak{l})$ bestimmt dieselbe Gerade.

7. Das sphärische Dreieck $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ habe (Fig. 1) die äußeren Winkel $A_1A_2A_3$ oder A_{23}, A_{31}, A_{12}, die Seiten a_1, a_2, a_3 oder a_{23}, a_{31}, a_{12} und die Höhen h_1, h_2, h_3. Nimmt man beim Durchlaufen der Seiten im angegebenen Sinn die Vektoren dieser sphärischen Geraden links, so entsteht das Polardreieck, dessen Spitzen, äußere Winkel und Seiten

resp. $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ und A_{23}, A_{31}, A_{12} sind. Die Eigenschaften des skalaren Produktes (§ 2) liefern nun die Beziehungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_k = \cos a_{ik}, & \mathfrak{l}_i\mathfrak{l}_k = \cos A_{ik}, \\ \mathfrak{r}_i^2 = \cos a_{ii} = 1, & \mathfrak{l}_i^2 = \cos A_{ii} = 1, \\ \mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i = \sin h_i, & \mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_k = 0, \end{cases}$$

und ebenso ergeben die Eigenschaften des Vektorproduktes (§ 3):

$$(9)\qquad \sin a_1 \mathfrak{l}_1 = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3, \quad \sin a_2 \mathfrak{l}_2 = V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1, \quad \sin a_3 \mathfrak{l}_3 = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2,$$

$$(10)\qquad \sin A_1 \mathfrak{r}_1 = V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3, \quad \sin A_2 \mathfrak{r}_2 = V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1, \quad \sin A_3 \mathfrak{r}_3 = V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2.$$

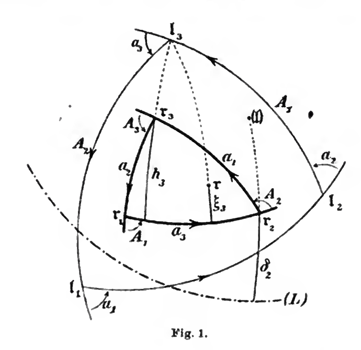


Fig. 1.

8. Aus (9) und (10) findet man durch Bildung skalarer Produkte und Anwendung der Gleichungen (8) und (7):

$$\sin a_1 \sin a_2 \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \,.\, V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1, \qquad \sin A_1 \sin A_2 \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1,$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \,.\, \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1 \,.\, \mathfrak{r}_3^2, \qquad \sin A_1 \sin A_2 \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \,.\, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 - \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_1 \,.\, \mathfrak{l}_3^2,$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \cos A_3 = \cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3, \qquad \sin A_1 \sin A_2 \cos a_3 = \cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3,$$

also die Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ resp. $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ ergeben die Gleichungen (9) und (10):

$$(11)\quad \begin{cases} \sin a_1 \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_1 = \sin a_1 \sin h_1 = \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3, & \sin A_1 \mathfrak{r}_1\mathfrak{l}_1 = \sin A_1 \sin h_1 = \mathfrak{l}_1 V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3, \\ \sin a_2 \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_2 = \sin a_2 \sin h_2 = \mathfrak{r}_2 V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1, & \sin A_2 \mathfrak{r}_2\mathfrak{l}_2 = \sin A_2 \sin h_2 = \mathfrak{l}_2 V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1, \\ \sin a_3 \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_3 = \sin a_3 \sin h_3 = \mathfrak{r}_3 V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, & \sin A_3 \mathfrak{r}_3\mathfrak{l}_3 = \sin A_3 \sin h_3 = \mathfrak{l}_3 V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2, \end{cases}$$

woraus nach § 4, (5) hervorgeht, daß:

(12) $\sin a_i \sin h_i$, $\sin A_i \sin h_i$ und $\sin A_i : \sin a_i$

unabhängig sind von i.

9. *Homogene sphärische Koordinaten.*

Der Vektor $\mathfrak{r}$ eines Kugelpunktes kann (§ 5) auf die Form:

(13) $\sigma \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$

gebracht werden, wenn μ_i beliebige gegebene Konstanten, σ ein Proportionalitätsfaktor, $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3$ *das Fundamentaldreieck und* x_1, x_2, x_3 *die Koordinaten des Punktes* sind.

Der Vektor $(\mathfrak{l})$ einer Kugelgeraden kann auf die Form:

(13) $\pi \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$

gebracht werden, wenn ν_i beliebige gegebene Konstanten, π ein Proportionalitätsfaktor, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$ *das Polardreieck und* u_1, u_2, u_3 *die Koordinaten der Geraden* sind.

Werden die Gleichungen (13) skalar multipliziert mit $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{r}_1$, so bekommt man, weil $\mathfrak{l}_1$ / $\mathfrak{r}_1$ senkrecht ist zu $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ / $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$:

$$\sigma \,.\, \mathfrak{r}\mathfrak{l}_1 = \mu_1 x_1 \,.\, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{l}_1 \qquad \pi \,.\, \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 = \nu_1 u_1 \,.\, \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_1$$

oder (Fig. 1):

$$\sigma \sin \xi_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1, \qquad \pi \sin \delta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1,$$

allgemein:

$$x_i = \frac{\sigma \sin \xi_i}{\mu_i \sin h_i} \quad \text{und} \quad u_i = \frac{\pi \sin \delta_i}{\nu_i \sin h_i}. \tag{14}$$

Die Punkt- und Linienkoordinaten sind also proportional den Größen $\frac{\sin \xi_i}{\mu_i \sin h_i}$ und $\frac{\sin \delta_i}{\nu_i \sin h_i}$, *wenn* ξ_i *die sphärische Entfernung des Punktes von der Seite* a_i *und* δ_i *diejenige der Geraden von dem Eckpunkte* A_i *des Fundamentaldreiecks ist.*

10. Der Punkt $\mathfrak{r}(x_1 x_2 x_3)$ liegt nur dann in der Geraden $\mathfrak{l}(u_1 u_2 u_3)$, wenn das skalare Produkt

Die Gerade $\mathfrak{l}(u_1 u_2 u_3)$ geht nur dann durch den Punkt $\mathfrak{r}(x_1 x_2 x_3)$, wenn das skalare Produkt

$$\mathfrak{l}\mathfrak{r} \equiv (\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \cdots)(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \cdots) \equiv \mu_1 \nu_1 x_1 u_1 \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \nu_2 x_2 u_2 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \nu_3 x_3 u_3 \mathfrak{l}_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\equiv \sum \mu_i \nu_i x_i u_i \sin h_i$$

Null ist. Es wird also die Gleichung der Geraden u_i in Punktkoordinaten

(15) $\sum \mu_i \nu_i u_i x_i \sin h_i = 0$,

Null ist. Es wird folglich die Gleichung des Punktes x_i in Linienkoordinaten

(15) $\sum \nu_i \mu_i x_i u_i \sin h_i = 0$,

oder wenn μ_i und ν_i so gewählt werden, daß $\mu_i \nu_i \sin h_i$ konstant ist [was der Fall sein wird (§ 8), wenn wir $\mu_i = 1$, $\nu_i = \sin A_i$ nehmen]:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \qquad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0.$$

11. Umgekehrt ist $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ eine Kugelgerade, deren Koordinaten den b_i proportional, und dessen Vektor $\pi \mathfrak{l} = \sin A_1 . b_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 . b_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 . b_3 \mathfrak{l}_3$ ist. Ebenso ist $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0$ die Gleichung des Punktes $\sigma \mathfrak{r} = \beta_1 \mathfrak{r}_1 + \beta_2 \mathfrak{r}_2 + \beta_3 \mathfrak{r}_3$. Die Faktoren π und σ findet man durch Quadrierung:

$$\pi^2 = \sum \sin A_i \sin A_k . b_i b_k . \cos A_{ik} \quad {\scriptstyle (i, k = 1, 2, 3)} \qquad \sigma^2 = \sum \beta_i \beta_k \cos a_{ik}.$$

12. Die Geraden L', L'', L''', deren Vektoren sind $(\mathfrak{l}')$, $(\mathfrak{l}'')$, $(\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'')$, gehen durch einen Punkt; denn ist $\mathfrak{r}_0$ der Schnittpunkt der beiden ersten, also $\mathfrak{l}' \mathfrak{r}_0 = 0$, $\mathfrak{l}'' \mathfrak{r}_0 = 0$, so wird $(\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'')\mathfrak{r}_0 = 0$, folglich der Punkt auch der dritten angehören. Außerdem werden, weil zu $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}''$ der Vektor $\mathfrak{r}_0$ senkrecht ist, die Produkte $V \mathfrak{l}' (\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'')$ und $V \mathfrak{l}'' (\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'')$ die Richtung mit $\mathfrak{r}_0$ gemein haben; sind $1, 1, \tau$, die Tensoren der drei genannten Vektoren, so sind $\tau \sin(L'L''')$ und $\tau \sin(L''L''')$ diejenigen der Produkte, und es ist:

$$V \mathfrak{l}'(\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'') = \tau \sin(L'L''') . \mathfrak{r}_0 = \lambda V \mathfrak{l}' \mathfrak{l}''; \quad V \mathfrak{l}''(\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'') = \tau \sin(L''L''') . \mathfrak{r}_0 = -V \mathfrak{l}' \mathfrak{l}'',$$

folglich das Teilverhältnis $(L'L''L''') = \sin(L'L''') : \sin(L''L''') = -\lambda$. Ebenso ist für die Punkte $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}' + \lambda \mathfrak{r}''$ das Teilverhältnis $(R'R''R''') = \sin(R'R''') : \sin(R''R''') = -\lambda$. Bestehen drei Koeffizienten k_i derart, daß $k_1 \mathfrak{r}' + k_2 \mathfrak{r}'' + k_3 \mathfrak{r}''' = 0$ oder $k_1 \mathfrak{l}' + k_2 \mathfrak{l}'' + k_3 \mathfrak{l}''' = 0$ ist, so liegen die drei Punkte in einer Geraden, resp. gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

13. Offenbar ist $\lambda : \mu$ das Doppelverhältnis der Geraden $(\mathfrak{l}')$, $(\mathfrak{l}'')$, $(\mathfrak{l}' + \lambda \mathfrak{l}'')$, $(\mathfrak{l}' + \mu \mathfrak{l}'')$, sowie das der Punkte $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}' + \lambda \mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}' + \mu \mathfrak{r}''$.

Werden die Seiten eines sphärischen n-Ecks $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_n$ von einer Geraden $(\mathfrak{l})$ geschnitten in den Punkten $\mathfrak{r}_1 - \lambda' \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_2 - \lambda'' \mathfrak{r}_3, \ldots$, $\mathfrak{r}_n - \lambda^{(n)} \mathfrak{r}_1$, so haben wir:

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{r}_1 - \lambda' \mathfrak{r}_2) = 0, \quad \mathfrak{l}(\mathfrak{r}_2 - \lambda'' \mathfrak{r}_3) = 0, \ldots$$

oder

$$\lambda' = \frac{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_1}{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_2}, \quad \lambda'' = \frac{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_2}{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_3}, \ldots, \lambda^{(n)} = \frac{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_n}{\mathfrak{l} \mathfrak{r}_1},$$

folglich:

$\lambda' \lambda'' \lambda''' \ldots \lambda^{(n)} = 1$ (Satz von Carnot).

Werden die Ecken eines sphärischen n-Seits $(\mathfrak{l}_1)(\mathfrak{l}_2) \ldots (\mathfrak{l}_n)$ mit einem Punkte $\mathfrak{r}$ verbunden durch die Geraden $(\mathfrak{l}_1 - \lambda' \mathfrak{l}_2)$, $(\mathfrak{l}_2 - \lambda'' \mathfrak{l}_3), \ldots$, $(\mathfrak{l}_n - \lambda^{(n)} \mathfrak{l}_1)$, so haben wir:

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{l}_1 - \lambda' \mathfrak{l}_2) = 0, \quad \mathfrak{r}(\mathfrak{l}_2 - \lambda'' \mathfrak{l}_3) = 0, \ldots$$

oder:

$$\lambda' = \frac{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_1}{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_2}, \quad \lambda'' = \frac{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_2}{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_3}, \ldots, \lambda^{(n)} = \frac{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_n}{\mathfrak{r} \mathfrak{l}_1}$$

folglich:

$\lambda' \lambda'' \lambda''' \ldots \lambda^{(n)} = 1$ (Satz von Ceva).

Für $n=3$ sind beide Sätze umkehrbar.

Werden die Strahlen $(\mathfrak{l}')$, $(\mathfrak{l}'')$, $(\mathfrak{l}'+\lambda\mathfrak{l}'')$, $(\mathfrak{l}'+\mu\mathfrak{l}'')$ von einer Transversalen geschnitten in $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'+\lambda_0\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'+\mu_0\mathfrak{r}''$, so ist $\mathfrak{l}'\mathfrak{r}'=0$, $\mathfrak{l}''\mathfrak{r}''=0$, $(\mathfrak{l}'+\lambda\mathfrak{l}'')(\mathfrak{r}'+\lambda_0\mathfrak{r}'')=0$, $(\mathfrak{l}'+\mu\mathfrak{l}'')(\mathfrak{r}'+\mu_0\mathfrak{r}'')=0$, also auch $\lambda\mathfrak{l}''\mathfrak{r}'+\lambda_0\mathfrak{l}'\mathfrak{r}''=0$ und $\mu\mathfrak{l}''\mathfrak{r}'+\mu_0\mathfrak{l}'\mathfrak{r}''=0$ oder $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ (Satz von Pappus).

14. Der Punkt $\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1+\mu_2 x_2\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3\mathfrak{r}_3$ liegt in der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{r}_1$ und $\mu_2 x_2\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3\mathfrak{r}_3$, ebenso in der von $\mathfrak{r}_2$ und $\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1+\mu_3 x_3\mathfrak{r}_3$ u. s. w.

Die Gerade $(\nu_1 u_1\mathfrak{l}_1+\nu_2 u_2\mathfrak{l}_2+\nu_3 u_3\mathfrak{l}_3)$ geht durch den Schnittpunkt von $(\mathfrak{l}_1)$ und $(\nu_2 u_2\mathfrak{l}_2+\nu_3 u_3\mathfrak{l}_3)$, ebenso durch den von $(\mathfrak{l}_2)$ und $(\nu_1 u_1\mathfrak{l}_1+\nu_3 u_3\mathfrak{l}_3)$ u. s. w.

Für den Punkt $\mu_1\mathfrak{r}_1+\mu_2\mathfrak{r}_2+\mu_3\mathfrak{r}_3$ wie für die Gerade $(\nu_1\mathfrak{l}_1+\nu_2\mathfrak{l}_2+\nu_3\mathfrak{l}_3)$ sind die allgemeinen Koordinaten alle Eins: Einheitspunkt und Einheitsgerade. Es ist die Einheitsgerade die Harmonikale des Einheitspunktes, wenn $\mu_i\nu_i\sin h_i$ konstant ist, wie die folgende Überlegung zeigt.

Die Ecktransversalen durch den Punkt $\mu_1 x_1'\mathfrak{r}_1+\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3$ bestimmen in den Seiten die Punkte $\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3$, $\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3+\mu_1 x_1'\mathfrak{r}_1$, $\mu_1 x_1'\mathfrak{r}_1+\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2$, deren harmonisch konjugierte $\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2-\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3$, $\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3-\mu_1 x_1'\mathfrak{r}_1$, $\mu_1 x_1'\mathfrak{r}_1-\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2$ in einer Geraden — Harmonikale von x_i' — liegen, weil (§ 12) ihre Summe Null ist. Der Gleichung dieser Geraden $\sum\mu_i\nu_i u_i x_i\sin h_i=0$ genügen $(0,\ x_2',\ -x_3')$ und $(-x_1',\ 0,\ x_3')$; die Elimination von $\mu_i\nu_i u_i\sin h_i$ ergibt also $\frac{x_1}{x_1'}+\frac{x_2}{x_2'}+\frac{x_3}{x_3'}=0$ für die Harmonikale von x_i' und in analoger Weise $\frac{u_1}{u_1'}+\frac{u_2}{u_2'}+\frac{u_3}{u_3'}=0$ für den Pol von u_i', was auch μ_i und ν_i sein mögen.

Die Gleichung der Einheitsgeraden $\sum\mu_i\nu_i\sin h_i\,.\,x_i=0$ wird $x_1+x_2+x_3=0$, d. i. die Harmonikale des Einheitspunktes, wenn $\mu_i\nu_i\sin h_i$ konstant ist.

15. Werden durch den Schnittpunkt der Seiten $x_3=0$, $x_2=0$ Geraden gezogen, welche die Punkte (x_1', x_2', x_3') und $(1, 1, 1)$ enthalten, so ist das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen $\frac{x_3'}{x_2'}$; denn sie bestimmen in der Seite $x_1=0$ die Punkte $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mu_2 x_2'\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3'\mathfrak{r}_3$, $\mu_2\mathfrak{r}_2+\mu_3\mathfrak{r}_3$, deren Doppelverhältnis $\frac{x_3'}{x_2'}$ nach dem Satze von Pappus dem der Strahlen gleich ist.

Wird die Verbindungsgerade der Punkte $u_3=0$, $u_2=0$ zum Schnitt gebracht mit den Geraden (u_1', u_2', u_3') und $(1, 1, 1)$, so ist das Doppelverhältnis dieser vier Punkte $\frac{u_3'}{u_2'}$; denn ihre Verbindungsgeraden mit dem Eckpunkte $u_1=0$ sind $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, $\nu_2 u_2'\mathfrak{l}_2+\nu_3 u_3'\mathfrak{l}_3$, $\nu_2\mathfrak{l}_2+\nu_3\mathfrak{l}_3$, und diese haben nach dem Satze von Pappus dasselbe Doppelverhältnis $\frac{u_3'}{u_2'}$ wie die vier Punkte.

16. *Merkwürdige Punkte im sphärischen Dreieck,* in der Voraussetzung $\mu_i = 1$, $\nu_i = \sin A_i$. a) Der *Medianenschnittpunkt* G ist:

$$\sigma \mathfrak{r}_g = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3, \qquad \sigma^2 = \sum \cos a_{ik}; \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

denn er liegt in den Verbindungsgeraden von $\mathfrak{r}_1$ mit $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$, von $\mathfrak{r}_2$ mit $\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_1$ u. s. w. Er ist offenbar Einheitspunkt (1, 1, 1); seine Harmonikale — zugleich Einheitsgerade — hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und den Vektor $\sigma \mathfrak{r}_0 = \sin A_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 \mathfrak{l}_3$.

b) Der zuletzt gefundene Vektor $\mathfrak{r}_0$ gehört zum *Umkreiszentrum* O, denn $\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3$. Um seine Koordinaten x_1, x_2, x_3 zu finden, multiplizieren wir $\sin A_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 \mathfrak{l}_3 \equiv x_1 \mathfrak{r}_1 + x_2 \mathfrak{r}_2 + x_3 \mathfrak{r}_3$ skalar mit $\mathfrak{l}_1$; wir bekommen dadurch $\sin A_1 + \sin A_2 \cos A_3 + \sin A_3 \cos A_2 = x_1 \sin h_1$ oder $2 \sin S \cos (S - A_1) = x_1 \sin h_1$; folglich

$$x_1 : x_2 : x_3 = \cos (S - A_1) \sin A_1 : \cos (S - A_2) \sin A_2 : \cos (S - A_3) \sin A_3$$

und

$$\sigma \mathfrak{r}_0 = \cos (S - A_1) \sin A_1 \mathfrak{r}_1 + \cos (S - A_2) \sin A_2 \mathfrak{r}_2 + \cos (S - A_3) \sin A_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\equiv \sum \cos (S - A_i) \sin A_i \mathfrak{r}_i,$$

wenn S die halbe Summe der äußeren Winkel A_i ist.

c) Nebenbei sei bemerkt, daß man genau in derselben Weise für $\mathfrak{l}_i$ findet:

$$\sigma \mathfrak{l}_i = \sin A_1 \cos A_{i1} \mathfrak{r}_1 + \sin A_2 \cos A_{i2} \mathfrak{r}_2 + \sin A_3 \cos A_{i3} \mathfrak{r}_3.$$

d) Offenbar ist $-V \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + V \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 + V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$ oder $-\sin A_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 \mathfrak{l}_3$ oder $\sum \cos (S - A_{1i}) \sin A_i \mathfrak{r}_i$, weil gleichweit entfernt von $-\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, *Umkreiszentrum* O_1 *für das erste Nebendreieck* u. s. w.

e) Wie $\sin A_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 \mathfrak{l}_3$ gleich weit von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, ebenso ist $\sin a_1 \mathfrak{r}_1 + \sin a_2 \mathfrak{r}_2 + \sin a_3 \mathfrak{r}_3$ gleichweit von $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, also von den Seiten entfernt, und $\sigma \mathfrak{r}_i = \sin a_1 \mathfrak{r}_1 + \sin a_2 \mathfrak{r}_2 + \sin a_3 \mathfrak{r}_3$, demnach *Inkreiszentrum* I, ebenso $-\sin a_1 \mathfrak{r}_1 + \sin a_2 \mathfrak{r}_2 + \sin a_3 \mathfrak{r}_3$ *Inkreiszentrum* I_1 *für das erste Nebendreieck* $-\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$.

f) Weil die erste Höhenlinie durch $\mathfrak{r}_1 (1, 0, 0)$ und $\mathfrak{l}_1 (\sin A_1 \cos A_{11}$, $\sin A_2 \cos A_{12}$, $\sin A_3 \cos A_{13})$ geht, ist ihre Gleichung $\frac{x_2}{\operatorname{tg} A_2} - \frac{x_3}{\operatorname{tg} A_3} = 0$. Den drei Höhengleichungen genügt offenbar $(\operatorname{tg} A_1, \operatorname{tg} A_2, \operatorname{tg} A_3)$, und $\sigma \mathfrak{r}_h = \operatorname{tang} A_1 \mathfrak{r}_1 + \operatorname{tang} A_2 \mathfrak{r}_2 + \operatorname{tang} A_3 \mathfrak{r}_3$ ist demnach der *Höhenpunkt* H.

g) Von der ersten Ecktransversalen durch $(x_1' x_2' x_3')$ ist $\frac{x_2}{x_2'} - \frac{x_3}{x_3'} = 0$ die Gleichung und $\frac{\sin A_2}{x_2'} \mathfrak{l}_2 - \frac{\sin A_3}{x_3'} \mathfrak{l}_3$ der Vektor; von der symmetrischen

oder isogonalen Ecktransversalen ist folglich $\frac{x_2'}{\sin A_2}\,\mathfrak{l}_2 - \frac{x_3'}{\sin A_3}\,\mathfrak{l}_3$ der Vektor und $\frac{x_2'}{\sin^2 A_2}\,x_2 - \frac{x_3'}{\sin^2 A_3}\,x_3 = 0$ die Gleichung. Den drei isogonalen Ecktransversalen genügt $\left(\frac{\sin^2 A_1}{x_1'},\ \frac{\sin^2 A_2}{x_2'},\ \frac{\sin^2 A_3}{x_3'}\right)$, welcher also *der mit x_i' isogonal verwandte Punkt* ist. Mit dem Medianenschnittpunkt $(1, 1, 1)$ ist $(\sin^2 A_1, \sin^2 A_2, \sin^2 A_3)$ isogonal verwandt (*Punkt von Lemoine oder Graebe*). Führt man (§ 9) statt der Koordinaten x_i' die Entfernungen $\mathfrak{x}_i$ ein, so findet man für den letztgenannten Punkt $\sin\mathfrak{x}_1 : \sin\mathfrak{x}_2 : \sin\mathfrak{x}_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3$, was für die Ebene wird $\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3$.

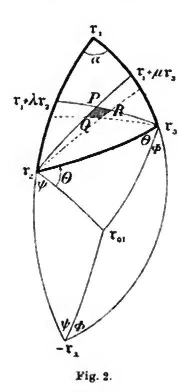


Fig. 2.

h) In ähnlicher Weise findet man für den *Punkt mit (x_i') isotomisch verwandten* $\left(\frac{1}{x_1'},\ \frac{1}{x_2'},\ \frac{1}{x_3'}\right)$. Man sieht leicht ein, daß von zwei isogonalen Geraden die Vektoren in Bezug auf das Polardreieck isotomisch sind.

17. *Fläche des sphärischen Dreiecks.* — a) Ist (Fig. 2) $\mathfrak{r}_{01}$ Umkreiszentrum für das erste Nebendreieck (§ 16d) und sind α, β, γ die inneren Winkel, so wird $\pi - \gamma - \varphi = \theta$, $\pi - \beta - \psi = \theta$, $2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\theta$ und $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \theta$, wenn ε der sphärische Exzeß ist; es ist aber θ auch der Winkel zwischen den Vektoren der Geraden $(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_{01})$ und $(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3)$, welche $V\mathfrak{r}_2(-V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)$ und $V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ sind. Das skalare Produkt liefert uns folglich (§ 4, 7):

$$(16)\quad \begin{cases} \sigma'\sigma''.\sin\frac{\varepsilon}{2} = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{r}_2(V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 - V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3) = (\mathfrak{r}_2^2 - \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3) . \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \\ \qquad = (1 - \cos a_{23}) . \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = 2\sin^2\frac{a_{23}}{2} \cdot \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 . \end{cases}$$

Nun ist aber der Tensor σ' des ersten Vektors $\sin a_{23}$, und der des zweiten σ'' findet sich aus der für drei Einheitsvektoren leicht beweisbaren Identität:

$$(17)\quad [V\mathfrak{r}_i(V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 + V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1)]^2 \equiv 2 . \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) . \mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3) . \mathfrak{r}_3(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1),$$

wenn man das Zeichen von $\mathfrak{r}_1$ ändert. Es wird dann die rechte Seite:

$$2(1 + \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) . (1 - \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3) . (1 + \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1) \equiv 16\cos^2\frac{a_{12}}{2} \cdot \sin^2\frac{a_{23}}{2} \cdot \cos^2\frac{a_{31}}{2},$$

also:

$$\sigma'' = 4 \cos \frac{a_{12}}{2} \sin \frac{a_{23}}{2} \cdot \cos \frac{a_{31}}{2},$$

wodurch (16) übergeht in:

$$\text{(18)} \qquad \sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}{4 \cos \frac{a_{12}}{2} \cdot \cos \frac{a_{23}}{2} \cdot \cos \frac{a_{31}}{2}}.$$

Es vereinfacht sich diese Formel noch durch die Einführung der Seitenmitten $M_1(\mathfrak{r}_{1m})$, $M_2(\mathfrak{r}_{2m})$, $M_3(\mathfrak{r}_{3m})$:

$$\sigma_1 \mathfrak{r}_{1m} = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3, \qquad \sigma_1 = 2 \cos \frac{a_{23}}{2},$$

$$\sigma_2 \mathfrak{r}_{2m} = \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_1, \qquad \sigma_2 = 2 \cos \frac{a_{31}}{2},$$

$$\sigma_3 \mathfrak{r}_{3m} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2, \qquad \sigma_3 = 2 \cos \frac{a_{12}}{2};$$

denn es ist offenbar:

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \mathfrak{r}_{1m} \mathrm{V} \mathfrak{r}_{2m} \mathfrak{r}_{3m} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2) \mathrm{V} (\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3)(\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_1) = 2 \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3,$$

folglich:

$$\text{(19)} \qquad \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon = \mathfrak{r}_{1m} \mathrm{V} \mathfrak{r}_{2m} \mathfrak{r}_{3m},$$

d. h. der Sinus des halben sphärischen Exzesses ist gleich dem Inhalte des auf OM_1, OM_2, OM_3 als Kanten konstruierten Parallelepipeds, wenn P das Kugelzentrum und M_1, M_2, M_3 die Mitten der Seiten auf der Einheitskugel sind.

Für das Dreieck $\mathfrak{r}_1' = x_1' \mathfrak{r}_1 + x_2' \mathfrak{r}_2 + x_3' \mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_2' = x_1'' \mathfrak{r}_1 + x_2'' \mathfrak{r}_2 + x_3'' \mathfrak{r}_3$, ... sind:

$$\sigma_1 \mathfrak{r}_{1m}' = (x_1' + x_1'') \mathfrak{r}_1 + (x_2' + x_2'') \mathfrak{r}_2 + (x_3' + x_3'') \mathfrak{r}_3, \quad \sigma_1^2 = \sum (x_i' + x_i'')(x_k' + x_k'') \cos a_{ik}$$

u. s. w.

die Mitten der Seiten und ist:

$$\text{(20)} \qquad \sin \frac{\varepsilon'}{2} = \frac{8 \cos \frac{a_{12}}{2} \cos \frac{a_{23}}{2} \cos \frac{a_{31}}{2}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Aus (§ 4, 7) geht, wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ ist, hervor $(\boldsymbol{AB})^2 = \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{B}^2 - (\mathrm{V}\boldsymbol{AB})^2$, folglich ist[1]):

$$\text{(21)} \quad \begin{aligned} p^2 &\equiv (\mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3)^2 = (\mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3)^2 - (\mathrm{V} \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3)^2 = \mathfrak{r}_2^2 . \mathfrak{r}_3^2 - (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3)^2 - (\mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)^2 \\ &= 1 - (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3)^2 - (\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1)^2 - (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)^2 + 2 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 = 1 - c_{23}^2 - c_{31}^2 - c_{12}^2 + 2 c_{12} c_{23} c_{31}. \end{aligned}$$

---

1) Wir werden künftighin oft statt $\cos a_{ik}$, $\cos A_{ik}$, $\sin a_{ik}$ und $\sin A_{ik}$ schreiben c_{ik}, C_{ik}, s_{ik} und S_{ik}.

c) Es läßt sich die Dreiecksfläche auch folgenderweise finden (Fig. 2): Gehört $\sigma\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda\mathfrak{r}_2 + \mu\mathfrak{r}_3$ zu P, so sind $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\lambda}d\lambda = \frac{d\lambda}{\sigma}\left(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\right)$ und $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\mu}d\mu = \frac{d\mu}{\sigma}\left(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)$ die unendlichkleinen Vektoren PQ und PR, und das Flächenelement $PQ \,.\, PR \,.\, \sin(QPR)$ ist gleich dem Tensor von $\frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}V\left(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\right)\left(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)$. Dieser Vektor ist aber senkrecht zu PQ und PR, hat also die Richtung $\mathfrak{r}$; setzen wir dann:

$$\frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}V\left(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\right)\left(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right) = \frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}\, m\mathfrak{r},$$

so ist $\frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}m$ das gesuchte Flächenelement, wofür wir durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}$ finden:

$$\frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}m = \frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^2}\mathfrak{r}\, V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^3}\mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3.$$

Die Dreiecksfläche ist nun offenbar:

$$(22)\quad \varepsilon = \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{d\lambda\, d\mu}{\sigma^3} = p\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{d\lambda\, d\mu}{[1+\lambda^2+\mu^2+2\lambda c_{12}+2\mu c_{31}+2\lambda\mu c_{23}]^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1 - c_{23} + c_{31} - c_{12}}{p} - \operatorname{arc\,tang}\frac{c_{13} - c_{12}c_{13}}{p}$$

und

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{p}{4\cos\frac{a_{12}}{2}\cos\frac{a_{23}}{2}\cos\frac{a_{31}}{2}}.$$

18. *Koordinatentransformation.* — Sind (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}) die Koordinaten der Ecken des neuen Koordinatendreiecks $(\mathfrak{r}_1'\mathfrak{r}_2'\mathfrak{r}_3')$, wobei wir die Proportionalitätsfaktoren der Einfachheit wegen schon gleich Eins gemacht voraussetzen, so ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_1' &= \mu_1 b_{11}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{12}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{13}\mathfrak{r}_3, & & B\,.\,\mu_1\mathfrak{r}_1 = B_{11}\mathfrak{r}_1' + B_{21}\mathfrak{r}_2' + B_{31}\mathfrak{r}_3',\\
\mathfrak{r}_2' &= \mu_1 b_{21}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{22}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{23}\mathfrak{r}_3, & \text{und}\quad & B\,.\,\mu_2\mathfrak{r}_2 = B_{12}\mathfrak{r}_1' + B_{22}\mathfrak{r}_2' + B_{32}\mathfrak{r}_3',\\
\mathfrak{r}_3' &= \mu_1 b_{31}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{32}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{33}\mathfrak{r}_3, & & B\,.\,\mu_3\mathfrak{r}_3 = B_{13}\mathfrak{r}_1' + B_{23}\mathfrak{r}_2' + B_{33}\mathfrak{r}_3'.
\end{aligned}$$

Aus dem Punkte $\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3\mathfrak{r}_3$ wird dann $(B_{11}\mathfrak{r}_1' + B_{21}\mathfrak{r}_2' + B_{31}\mathfrak{r}_3')x_1 + \cdots$ oder $(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3)\mathfrak{r}_1' + (B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3)\mathfrak{r}_2' + \cdots$, und sind y_i und v_i die Punkt- und Linienkoordinaten, μ_i' und ν_i' die Konstanten im neuen System, so bestehen die Gleichungen:

$$(23)\qquad \mu_i' y_i \therefore B_{i1}x_1 + B_{i2}x_2 + B_{i3}x_3 \qquad\qquad x_i \therefore \mu_1' b_{1i} y_1 + \mu_2' b_{2i} y_2 + \mu_3' b_{3i} y_3.$$

Die Gleichung der Geraden $\sum u_i x_i = 0$ wird dadurch:

$$\sum u_i (\mu_1' b_{1i} y_1 + \mu_2' b_{2i} y_2 + \mu_3' b_{3i} y_3) \equiv \mu_1' (b_{11} u_1 + b_{12} u_2 + b_{13} u_3) \cdot y_1$$
$$+ \mu_2' (b_{21} u_1 + b_{22} u_2 + b_{23} u_3) \cdot y_2 + \cdots = 0,$$

so daß $v_i \therefore \mu_i' (b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2 + b_{i3} u_3)$ ist; falls aber im neuen System wieder $\mu_i' \nu_i' \sin h_i'$ konstant ist, folgt hieraus:

$$(24) \qquad \begin{cases} \nu_i' \sin h_i' \cdot v_i \therefore b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2 + b_{i3} u_3 & \text{und} \\ u_i \therefore \nu_1' \sin h_1' \cdot B_{1i} v_1 + \nu_2' \sin h_2' \cdot B_{2i} v_2 + \nu_3' \sin h_3' \cdot B_{3i} v_3. \end{cases}$$

19. *Übergang zur Ebene.* — Für ein auf der Kugel mit unendlich großem Radius verzeichnetes Koordinatendreieck liefert (14):

$$(25) \qquad x_i = \frac{\sigma \xi_i}{\mu_i h_i}, \quad u_i = \frac{\pi \delta_i}{\nu_i h_i}.$$

Die allgemeine Gleichung (15) einer Geraden in Punkt-, oder eines Punktes in Linienkoordinaten wird:

$$(26) \qquad \sum \mu_i \nu_i h_i u_i x_i = 0$$

oder

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

wenn $\mu_i \nu_i h_i$ konstant ist.

Für die Entfernungen δ_i einer Geraden von den Ecken A_i und die Entfernungen ξ_i eines Punktes in der Geraden von den Seiten a_i des ebenen Dreiecks liefern (25) und (26) die Gleichung:

$$\frac{\delta_1}{h_1} \xi_1 + \frac{\delta_2}{h_2} \xi_2 + \frac{\delta_3}{h_3} \xi_3 = 0.$$

Die analoge Gleichung für die Sphäre lautet:

$$\sum \frac{\sin \delta_i}{\sin h_i} \sin \xi_i = 0.$$

Unsere sphärischen Punktkoordinaten geben (25) für die Ebene, wenn $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ist:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3} = \xi_1 a_1 : \xi_2 a_2 : \xi_3 a_3,$$

also die baryzentrischen Koordinaten.

20. Es mögen hier die folgenden Anwendungen Platz finden:

a) Von den Punkten: Von den Geraden

$$\sigma' \mathfrak{r}' = \mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3' \mathfrak{r}_3, \qquad \pi' \mathfrak{l}' = \nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3' \mathfrak{l}_3,$$
$$\sigma'' \mathfrak{r}'' = \mu_1 x_1'' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2'' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3'' \mathfrak{r}_3 \qquad \pi'' \mathfrak{l}'' = \nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2'' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3'' \mathfrak{l}_3$$

genügt die sphärische Entfernung d der Gleichung:

$$\operatorname{tang} d = \frac{\text{Tensor}\, V \mathfrak{r}'\mathfrak{r}''}{\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''} = \frac{T V (\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \cdots)(\mu_1 x_1'' \mathfrak{r}_1 + \cdots)}{(\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \cdots)(\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \cdots)}$$

oder wenn $(x_i' x_k'') \equiv x_i' x_k'' - x_i'' x_k''$:

$$\operatorname{tang} d = \frac{T[\mu_1 \mu_2 (x_1' x_2'') V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 + \cdots]}{(\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \cdots)(\mu_1 x_1'' \mathfrak{r}_1 + \cdots)}$$

$$= \frac{T[\mu_1 \mu_2 (x_1' x_2'') \sin a_3 \mathfrak{l}_3 + \cdots]}{(\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \cdots)(\mu_1 x_1'' \mathfrak{r}_1 + \cdots)}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_1^2 \mu_2^2 (x_1' x_2'')^2 s_3^2 + \cdots + 2\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 (x_1' x_2'')(x_2' x_3'') s_3 s_1 \cos A_2 + \cdots}}{\mu_1^2 x_1' x_1'' + \cdots + \mu_1 \mu_2 (x_1' x_2'' + x_1'' x_2') \cos a_{12} + \cdots}$$

Beim Übergang zur Ebene wird $\mu_i x_i \mathrel{.\cdot.} \frac{\xi_i}{h_i} \mathrel{.\cdot.} \xi_i a_i$, $c_{ik} = 1$, und

$\operatorname{tg} d : \sin s_1 : \sin_2 s_2 : \sin s_3 = d : a_1 : a_2 : a_3$, folglich

$$d^2 = \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 [(\xi_1' \xi_2'')^2 + (\xi_2' \xi_3'')^2 + (\xi_3' \xi_1'')^2 + 2(\xi_1' \xi_2'')(\xi_2' \xi_3'') C_2 + \cdots]}{(\xi_1' a_1 + \xi_2' a_2 + \xi_3' a_3)^2 (\xi_1'' a_1 + \xi_2'' a_2 + \xi_3'' a_3)^2}$$

Der Nenner ist aber offenbar $16 F^4$ und $\frac{a_1 a_2 a_3}{4F} = R$, also:

$$d^2 = \frac{R^2}{F^2}[(\xi_1' \xi_2'')^2 + (\xi_2' \xi_3'')^2 + (\xi_3' \xi_1'')^2 + 2(\xi_1' \xi_2'')(\xi_2' \xi_3'') \cos A_2 + \cdots].$$

genügt der Winkel φ der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{T V \mathfrak{l}' \mathfrak{l}''}{\mathfrak{l}' \mathfrak{l}''} = \frac{T V (\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \cdots)(\nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \cdots)}{(\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \cdots)(\nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \cdots)}$$

und falls $(u_i' u_k'') \equiv u_i' u_k'' - u_k'' u_k'$:

$$\operatorname{tang} \Phi = \frac{T[\nu_1 \nu_2 (u_1' u_2'') V \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 + \cdots]}{(\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \cdots)(\nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \cdots)}$$

$$= \frac{T[\nu_1 \nu_2 (u_1' u_2'') \sin A_3 \mathfrak{r}_3 + \cdots]}{(\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \cdots)(\nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \cdots)}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu_1^2 \nu_2^2 (u_1' u_2'')^2 S_3^2 + \cdots 2 \nu_1 \nu_2^2 \nu_3 (u_1' u_2'')(u_2' u_3'') S_3 S_1 \cos a_2 + \cdots}}{\nu_1^2 u_1' u_1'' + \cdots \nu_1 \nu_2 (u_1' u_2'' + u_1'' u_2') \cos A_{12} \cdots}$$

Für die Ebene wird $\nu_i u_i \mathrel{.\cdot.} \frac{\delta_i}{h_i} \mathrel{.\cdot.} \delta_i \sin A_i$, $c_{ik} = 1$, demnach

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\left(\frac{\delta_1' \delta_2''}{h_1 h_2}\right) \sin A_3 + \left(\frac{\delta_2' \delta_3''}{h_2 h_3}\right) \sin A_1 + \left(\frac{\delta_3' \delta_1''}{h_3 h_1}\right) \sin \cdots}{\left(\frac{\delta_1' \delta_1''}{h_1^2} + \frac{\delta_2' \delta_2''}{h_2^2} + \frac{\delta_3' \delta_3''}{h_3^2} + \frac{\delta_1' \delta_2'' + \delta_2' \delta_1''}{h_1 h_2} \cos A_3 + \cdots\right.}$$

Sind $a_1' \xi_1 + a_2' \xi_2 + a_3' \xi_3 = 0$ und $a_1'' \xi_1 + a_2'' \xi_2 + a_3'' \xi = 0$ zwei Geraden in der Ebene, so ist in vorgehender Formel $\frac{\delta_i'}{h_i} = a_i'$ und $\frac{\delta_i''}{h_i} = a_i''$ zu setzen.

b) Ist ϱ der sphärische Radius des Umkreises und $\sigma \mathfrak{r}_0 = V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 + V \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + V \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1$ sein Zentrum, so ist offenbar:

$$\cot \varrho = \frac{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_0}{T V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_0} = \frac{\mathfrak{r}_1 V \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}{T V \mathfrak{r}_1 (V \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + V \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 + V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}$$

oder bei Benutzung der Identität (17):

$$\cot \varrho = \frac{p}{4 \sin \frac{a_{12}}{2} \sin \frac{a_{23}}{2} \sin \frac{a_{31}}{2}}.$$

c) Von der sphärischen Geraden $L(u_i)$ ist $u_1 \sin A_1 \mathfrak{l}_1 + u_2 \sin A_2 \mathfrak{l}_2 + u_3 \sin A_3 \mathfrak{l}_3$ oder (§ 16c):

$$\sin A_1 \sum u_i \sin A_i \cos A_{i1} . \mathfrak{r}_1 + \sin A_2 \sum u_i \sin A_i \cos A_{i2} . \mathfrak{r}_2 + \sin A_3 \sum u_i \sin A_i \cos A_{i3} . \mathfrak{r}_3$$

der Pol, wenn $\mu_i = 1$, $\nu_i = \sin A_i$ ist. Durch diesen Pol muß jede zu $\perp$ senkrechte sphärische Gerade gehen, und soll diese noch den Punkt (x_i') enthalten, so ist ihre Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ S_1 \sum u_i S_i C_{i1} & S_2 \sum u_i S_i C_{i2} & S_3 \sum u_i S_i C_{i3} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin \xi_1}{\sin h_1} & \frac{\sin \xi_2}{\sin h_2} & \frac{\sin \xi_3}{\sin h_3} \\ \frac{\sin \xi_1'}{\sin h_1} & \frac{\sin \xi_2'}{\sin h_2} & \frac{\sin \xi_3'}{\sin h_3} \\ \sin A_1 \sum u_i S_i C_{i1} & \sin A_2 \sum u_i S_i C_{i2} & \sin A_3 \sum u_i S_i C_{i3} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \sin \xi_1 & \sin \xi_2 & \sin \xi_3 \\ \sin \xi_1' & \sin \xi_2' & \sin \xi_3' \\ \sum S_i C_{i1} \sin \delta_1 & \sum S_i C_{i2} \sin \delta_2 & \sum S_i C_{i3} \sin \delta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

und es wird:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \sum S_i C_{i1} \delta_1 & \sum S_i C_{i2} \delta_2 & \sum S_i C_{i3} \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung sein von einer durch (ξ_i') gehenden ebenen Geraden, senkrecht zu $\perp(\delta_i)$.

d) Sind F, F'', ε, ε' die Flächen und sphärischen Exzesse zweier Kugeldreiecke, und R der Kugelradius, so ist $\varepsilon = F : R^2$ und $\varepsilon = F'' : R^2$. Die Substitution in (20) ergibt, da beim Übergang $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$ wird, für zwei ebene Dreiecke:

$$F'' = \frac{F}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' \\ \xi_1''' & \xi_2''' & \xi_3'' \end{vmatrix}$$

Freiburg (Schweiz), 6. Januar 1902.

Zur Theorie der arithmetischen Progression.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Der elementare Beweis der Tatsache, daß die Progression $ay+1$ unendlich viele Primzahlen enthält, ist sehr leicht zu führen; z. B. als eine Anwendung des Fermatschen Satzes. Mit der Progression $ay-1$, in dem speziellen Falle $a=p^\alpha$, haben sich gleichzeitig beschäftigt Herr Daublebsky v. Sterneck[1]) und der Verfasser dieser Note.[2]) Die Beweisführung geht von den Ausdrücken[3]):

$$V_a = \frac{(x+\sqrt{b})^a-(x-\sqrt{b})^a}{2\sqrt{b}}$$

aus und gewinnt den Satz durch die Anwendung des quadratischen Reziprozitätssatzes. In dieser Note beschäftige ich mich mit derselben Frage in einer anderen Weise. Ich hebe hervor, *daß die Beweisführung ausschließlich im Bereiche der rationalen Zahlen geschieht und der Reziprozitätssatz auch nicht angewendet wird.*

2. Sei p eine ungerade Primzahl und führen wir die Bezeichnung ein:

$$F(x) = \frac{x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{\alpha-1}} + 1}{x^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}}.$$

I. *Die ganzen rationalen Zahlen:*

$$\text{(A)} \qquad A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

können eindeutig so bestimmt werden, daß eine Identität von der Form:

$$(1)\ F(x) = A_0\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + A_1\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

---

1) Über einige spezifische zahlentheoretische Funktionen. Wiener Monatshefte Bd. VII.

2) In einer ungarischen Zeitschrift: „Mathematikai és Physikai Lapok" Bd. IV.

3) Für den Fall $a=p$ von Dirichlet untersucht: De formis linearibus in quibus etc. Der allgemeine Fall findet sich bei: Lucas, Théorie des fonctions numériques etc. (American Journal of Math. I).

besteht. Es ist ferner:

$$(2)\quad \begin{cases} A_0 = 1, \quad A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \equiv 1 \pmod 2, \\ A_i \equiv (-1)^i \binom{\frac{p^\alpha (p-1)}{2}}{i} 2^i \pmod p, \end{cases}$$

so daß:

$$(3)\quad \begin{aligned} \Phi(z) &= z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + A_1 z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \\ &\equiv (z-2)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \pmod p \end{aligned}$$

wird.

3. Die Zahlen (A) können fürs erste aus dem linearen Gleichungssystem:

$$(\mathrm{I})\quad A_0\left(k+\frac{1}{k}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + A_1\left(k+\frac{1}{k}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots = F(k)$$

$$\left(k = 2, 3, \ldots, \frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}+2\right),$$

dessen Determinante von Null verschieden ist, rational und eindeutig bestimmt werden. Es leuchtet ein, daß die Gleichungen auch für:

$$\left(k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}+2}\right)$$

bestehen bleiben, und somit sind die Ausdrücke:

$$F(x), \quad A_0\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + \cdots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

für gewisse Werte von x, deren Anzahl $p^{\alpha-1}(p-1)+2$ ist, gleich; und folglich identisch gleich.

Wenn man die Identität (1) mit $x^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$ multipliziert, sieht man, daß $A_0 = 1$, A_i ganz, und wenn $x = 1$ gesetzt wird, daß:

$$A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \equiv 1 \pmod 2$$

ist.

4. Aus der identischen Kongruenz:

$$x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + 1 \equiv A_0 (x^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

$$+ A_1 x (x^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} x^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \pmod p$$

sieht man, daß die Zahlen $A_i \pmod p$ eindeutig bestimmt sind. Nun kann man die Formeln (2) verifizieren. Es ist nämlich:

$$x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + 1 \equiv (x-1)^{p^{\alpha-1}(p-1)} \pmod p,$$

und wenn man (2) für A_i einsetzt, wird:

$$A_0 (x^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + A_1 x (x^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots$$

$$\equiv [(x^2+1)-2x]^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \equiv (x-1)^{p^{\alpha-1}(p-1)} \pmod p.$$

5. Nun legen wir der Untersuchung den Ausdruck $\Phi(z)$ zu Grunde.

II. *Ist $q \gtrless p$ eine beliebige Primzahl, für welche die Kongruenz:*

$$(4)\quad \Phi(z) = z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + A_1 z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1} + \cdots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} = 0 \pmod q$$

eine Lösung besitzt, so ist:

$$(5)\qquad q^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Nehmen wir an, es sei r eine Wurzel von (4), dann ist:

$$\Phi(z) = (z-r) f(z) + q g(z),$$

wo $f(z)$, $g(z)$ ganze rationale Ausdrücke mit ganzen Koeffizienten sind. Es ist ferner:

$$\Phi\left(x+\frac{1}{x}\right) = F(x) = \left(x - r + \frac{1}{x}\right) f\left(x+\frac{1}{x}\right) + q g\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

d. h.

$$(6)\quad x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + 1 \equiv (x^2 - rx + 1)\overline{f(x)} \pmod q;$$

also hat der Ausdruck:

$$(7)\qquad \frac{x^{p^\alpha}-1}{x^{p^{\alpha-1}}-1} = x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + \cdots + 1$$

$(\mathrm{mod}\, q)$ einen quadratischen Faktor.

6. Nun berufen wir uns auf zwei Sätze der Zahlentheorie, deren Beweise rational geführt werden können.[1])

A) Die Ausdrücke:

$$x^{q^n-1}-1, \quad \frac{x^{p^\alpha}-1}{x^{p^{\alpha-1}}-1} \pmod q$$

$$\left(q \gtrless p,\ q,\ p,\ \text{ungerade Primzahlen}\right)$$

sind entweder relativ prim, oder im Falle

$$q^n - 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

ist

$$x^{q^n-1}-1 \quad \text{teilbar durch} \quad \frac{x^{p^\alpha}-1}{x^{p^{\alpha-1}}-1} \pmod q.$$

B) Das Produkt der irreduziblen Funktionen $(\operatorname{mod} q)$, deren Grad ein Teiler von n ist, ist:

$$\equiv x\left(x^{q^n-1}-1\right) \pmod q.$$

Der Ausdruck (7) hat $(\operatorname{mod} q)$ einen quadratischen Faktor, folglich ist nach A) und B):

$$q^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

7. Nun kann der Beweis leicht geliefert werden.

Setzen wir für z einen hinreichend großen, positiven geraden Wert ein, für welchen noch

$$(z-2)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

ist. Sei $z = \beta$ ein solcher Wert, dann ist:

$$\Phi(\beta) > 0, \quad \Phi(\beta) \equiv 1 \pmod 2, \quad \Phi(\beta) \equiv -1 \pmod p \tag{8}$$

Die Primfaktoren von $\Phi(\beta)$ sind nach (5) von der Form:

$$p^\alpha y \pm 1,$$

und so befindet sich unter ihnen nach (8) sicher eine von der Form:

$$p^\alpha y - 1,$$

q. e. d.

Budapest, 23. März 1902.

---

1) Man siehe z. B. Dedekind: Abriß einer Theorie etc. Crelles Journ. 54.

Generalization of a fundamental theorem in the geometry of the triangle.

By M. W. Haskell in Berkeley, California.

The theorem in question is of fundamental importance in the geometry of the triangle[1]), and may be stated as follows:

If A', B', C' be points taken arbitrarily on the sides BC, CA, AB of any triangle ABC, the circles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ pass through one and the same point O.

In a communication presented to the Chicago Section of the American Mathematical Society Jan. 2, 1902 I extended this theorem to the tetrahedron in the following form:

Let F, G, H, P, Q, R be any points on the edges AD, BD, CD, BC, CA, AB, respectively, of any tetrahedron $ABCD$; the four spheres $AFQR$, $BGRP$, $CHPQ$, $DFGH$ pass through one and the same point O.

The theorem is, however, capable of generalization to space of any number of dimensions without any difficulty. I will therefore state and prove it at once for space of n dimensions, — understanding by a spherical space of three dimensions, S_3, a space every section of which by a flat space, R_3, is an ordinary sphere, and, generally, by a spherical S_{n-1} situated in a flat R_n as a space every section of which by a flat R_{n-1} is a spherical S_{n-2}. The general theorem may then be stated as follows: —

Consider the figure formed by $n+1$ points A_{11}, A_{22}, A_{33}, . . ., $A_{n+1,\,n+1}$ in a flat space R_n, and select arbitrarily on each edge of this figure $A_{ii}A_{kk}$ a point A_{ik}. A spherical S_{n-1} is determined by $n+1$ points. The $n+1$ spherical S_{n-1} determined by the $n+1$ groups of points $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{i,\,n+1})$ will all pass through one and the same point O.

We shall use barycentric coordinates $\alpha^{[1]}$, $\alpha^{[2]}$, . . ., $\alpha^{[n+1]}$ where

$$\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]} + \cdots + \alpha^{[n+1]} = K.$$

---

1) McClelland, Geometry of the Circle, p. 40; see also Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, 7th edition, vol. 1, p. 486.

In the plane K is the area of the triangle $A_{11}A_{22}A_{33}$; in ordinary space of three dimensions it is the volume of the tetrahedron $A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$. The equation of the infinite R_{n-1} is then

$$\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]} + \cdots + \alpha^{[n+1]} = 0;$$

and, if we denote by a_{ik} the length of the edge $A_{ii}A_{kk}$ the equation of the spherical S_{n-1} circumscribing the fundamental $(n+1)$-point $A_{11}A_{22} \ldots A_{n+1,n+1}$ will be

$$\Omega \equiv \sum a_{ik}^2 \alpha^{[i]} \alpha^{[k]} = 0,$$

while the equation of *any* spherical S_{n-1} will then be of the form

$$\sum \lambda_i \alpha^{[i]} \cdot \sum \alpha^{[i]} - \sum a_{ik}^2 \cdot \alpha^{[i]} \alpha^{[k]} = 0.$$

The coordinates of any vertex A_{ii} of the fundamental n-point are of course all zero except $\alpha^{[i]}$ which is equal to K; and the coordinates of any one of the intermediate points A_{ik} are all zero except two, $\alpha_{ik}^{[i]}$ and $\alpha_{ik}^{[k]}$, whose sum

$$\alpha_{ik}^{[i]} + \alpha_{ik}^{[k]} = K.$$

The equation of the spherical S_{n-1} through the points $A_{i1}A_{i2} \ldots A_{i,n+1}$ is readily found to be

$$\left(a_{i1}^2 \alpha_{i1}^{[1]} \alpha^{[1]} + a_{i2}^2 \alpha_{i2}^{[1]} \alpha^{[2]} + \cdots + a_{i\,n+1}^2 \alpha_{i,n+1}^{[1]} \alpha^{[n+1]}\right) \sum \alpha^{[i]} - K\Omega = 0,$$

or denoting the quantity in parenthesis by ω_i:

$$\omega_i \sum \alpha^{[i]} - K\Omega = 0.$$

But, we find that

$$K\Omega = \sum \alpha^{[i]} \omega_i$$

identically, and consequently that every one of the S_{n-1} passes through the point for which

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \cdots = \omega_{n+1},$$

and the theorem is thereby proved.

Corollary I. If the points A_{ik} are the middle points of the edges, then

$$\omega_1 = \frac{K}{2}\left(a_{12}^2\alpha^{[2]} + a_{13}^2\alpha^{[3]} + \cdots + a_{1\,n+1}^2\alpha^{[n+1]}\right) = \frac{K}{2}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha^{[1]}},$$

and the point O is the centre of the circumscribing S_{n-1} of the fundamental n-point.

Corollary II. If the flat spaces $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0, \cdots$, $\omega_{n+1} = 0$ have a point in common, that point will be the point O, and it will then lie on the circumscribing S_{n-1} of the fundamental n-point. Now this will be the case, for example, if n is even and the points A_{ik} are determined by the intersection of a flat R_{n-1}, whose equation is

$$\lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' + \cdots + \lambda^{n+1}\alpha^{n+1} = 0.$$

For the coordinates of A_{ik} will then be

$$\alpha_{ik}^{[i]} = \frac{-\lambda^{[k]}K}{\lambda^{[k]} - \lambda^{[i]}} \quad \text{and} \quad \alpha_{ik}^{[k]} = \frac{\lambda^{[i]}K}{\lambda^{[i]} - \lambda^{[k]}},$$

and the determinant of the equations $\omega_i = 0$ will be

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}^2\lambda''k}{\lambda''-\lambda'} & \dfrac{a_{13}^2\lambda'''k}{\lambda'''-\lambda'} & \cdots & \dfrac{a_{1,\,n+1}^2\lambda^{[n+1]}K}{\lambda^{[n+1]}-\lambda'} \\ \dfrac{a_{21}^2\lambda'k}{\lambda'-\lambda''} & 0 & \dfrac{a_{23}^2\lambda'''k}{\lambda'''-\lambda''} & \cdots & \dfrac{a_{2,\,n+1}^2\lambda^{[n+1]}K}{\lambda^{[n+1]}-\lambda''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{n+1,\,1}^2\lambda'k}{\lambda'-\lambda^{[n+1]}} & \dfrac{a_{n+1,\,2}^2\lambda''k}{\lambda''-\lambda^{[n+1]}} & \dfrac{a_{n+1,\,3}^2\lambda'''k}{\lambda'''-\lambda^{[n+1]}} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

If we here divide the successive columns by $\lambda'k$, $\lambda''k$, etc., the quotient is a zero-axial skew-symmetric determinant of odd order, which therefore vanishes; the flat spaces $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0, \cdots$, $\omega_{n+1} = 0$ have a point in common, which is the point O, and it lies on the circumscribing S_{n-1}. For the plane, if A_{23}, A_{31}, A_{12} are collinear, the point O lies on the circumscribing circle, a known theorem.

If, however, n is odd, the above determinant does not vanish. In this case, the point O is a point of the intersecting R_{n-1}. For, since the point O is determined by $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n+1}$, we may write

$$\omega_i - \rho = 0,$$

and the resultant of these $(n+1)$ equations and of the equation of the given R_{n+1} is

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{21}^2 \lambda'' k}{\lambda'' - \lambda'} & \frac{a_{31}^2 \lambda''' k}{\lambda''' - \lambda'} & \cdots & \frac{a_{n+1,1}^2 \lambda^{[n+1]} k}{\lambda^{[n+1]} - \lambda'} & -1 \\ \frac{a_{12}^2 \lambda' k}{\lambda' - \lambda''} & 0 & \frac{a_{32}^2 \lambda''' k}{\lambda''' - \lambda''} & \cdots & \frac{a_{n+1,2}^2 \lambda^{[n+1]} k}{\lambda^{[n+1]} - \lambda''} & -1 \\ \frac{a_{13}^2 \lambda' k}{\lambda' - \lambda'''} & \frac{a_{23}^2 \lambda'' k}{\lambda'' - \lambda'''} & 0 & \cdots & \frac{a_{n+1,3}^2 \lambda^{[n+1]} k}{\lambda^{[n+1]} - \lambda'''} & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{1,n+1}^2 \lambda' k}{\lambda' - \lambda^{[n+1]}} & \frac{a_{2,n+1}^2 \lambda'' k}{\lambda'' - \lambda^{[n+1]}} & \frac{a_{3,n+1}^2 \lambda''' k}{\lambda''' - \lambda^{[n+1]}} & \cdots & 0 & -1 \\ \lambda' & \lambda'' & \lambda''' & \cdots & \lambda^{[n+1]} & 0 \end{vmatrix}$$

If we now divide the first $(n+1)$ columns respectively by λ', λ'', λ''', ..., $\lambda^{[n+1]}$, the quotient is a zero-axial skew-symmetric determinant of odd order, and must vanish. *In ordinary space of three dimensions, then, if the points A_{ik} lie on a plane, the point O lies on the same plane.* The relation is however not uniquely reversible, as in the case of the ordinary null-system, but to every point O correspond *six* planes.

If we consider the S_{n-1} in sets of n, each set will have a second point of intersection besides the point O, and these will be situated in the respective faces of the $(n+1)$-point (meaning by faces the $n+1$ flat R_{n+1} determined by any n of the vertices). It is evident that, if n be odd, these points will lie on the circumscribing S_{n-1} of the $(n+1)$-point; and that if n be even, they will lie on the intersecting R_{n-1} which determines the A_{ik}.

Rome, Jan. 1903.

Zu der vorstehenden Mitteilung des Herrn M. W. Haskell über die Verallgemeinerung[1]) eines Steinerschen Satzes.

Von W. Fr. Meyer.

Der nachfolgende Beweis der Verallgemeinerung des Steinerschen Satzes auf den Raum R_n von n Dimensionen beruht auf einer *einzigen Identität,* und ist so durchsichtig, daß es in der Hauptsache genügt, den Fall $n = 3$ in Betracht zu ziehen.

Anstatt der Kugeln empfiehlt es sich, *in projektiver Verallgemeinerung* die Flächen 2. Grades F durch einen festen Kegelschnitt K zu Grunde zu legen.

Ein festes Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ diene als Koordinatentetraeder. Ein beliebiger Kegelschnitt K kann als bestimmt gedacht werden durch seine Ebene:

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

und die Fläche 2. Grades:

$$A \equiv a_{xx} \equiv a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + a_{34} x_3 x_4 = 0,$$

die ihn mit den Ecken A_i des Tetraeders verbindet. Hierbei wird festgesetzt, daß K von keiner Kante des Tetraeders getroffen werden soll, d. h. es soll keiner der Koeffizienten a_{ik} verschwinden.

Durch den Kegelschnitt K geht eine ∞^4-Schar von Flächen 2. Grades F:

$$F \equiv u_x v_x - a_{xx} = 0, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten v_i von v_x die vier willkürlichen Parameter der Schar repräsentieren.

Soll F durch die Ecke A_i gehen — F sei dann mit F_i bezeichnet — so ist das Kriterium dafür das Verschwinden von v_i, sodaß die Gleichung von F_i lautet:

$$F_i(x) \equiv u_x V_i - a_{xx} = 0, \tag{2}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$V_i \equiv x_k v_{ki} + x_l v_{li} + x_m v_{mi}. \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

---

1) Herr Haskell hat mir die in Rede stehende Verallgemeinerung in Karlsbad (Sept. 1902) ohne Beweis mitgeteilt; eine Einsicht in seine vorstehende Mitteilung habe ich erst genommen, als die meinige bereits redigiert war.

Die drei in F_i noch verbleibenden Parameter sind jetzt genauer durch v_{ki}, v_{li}, v_{mi} angegeben.

Der Schnitt von F_i mit der Kante $x_k = 0$, $x_l = 0$ liefert:

$$x_m [v_{mi}(u_i x_i + u_m x_m) - a_{im} x_i] = 0,$$

also außer der Ecke A_i noch einen Punkt $B_{kl}^{(i)}$:

$$B_{kl}^{(i)} \equiv x_i (u_i v_{mi} - a_{im}) + x_m u_m v_{mi} = 0. \tag{4}$$

Analog schneidet eine Fläche F_m durch A_m aus derselben Kante $x_k = 0$, $x_l = 0$ noch einen Punkt $B_{kl}^{(m)}$ aus:

$$B_{kl}^{(m)} \equiv x_i u_i v_{im} + x_m (u_m v_{im} - a_{im}) = 0. \tag{4'}$$

Sollen beide Punkte (4), (4') in einen einzigen B_{kl} zusammenfallen, so ist dazu notwendig und hinreichend (da das gleichzeitige Verschwinden von x_i und x_m ausgeschlossen ist), daß:

$$(u_i v_{mi} - a_{im})(u_m v_{im} - a_{im}) - u_i u_m v_{im} v_{mi} \equiv - a_{im}(u_i v_{mi} + u_m v_{im} - a_{im}) = 0,$$

also, da $a_{im} \neq 0$:

$$u_i v_{mi} + u_m v_{im} = a_{im}. \tag{5}$$

Auf diese Weise erhält man vier Flächen $F_{i\,(i=1,2,3,4)}$, (2) die jeweils außer der Ecke A_i noch drei Punkte B_{kl}, B_{km}, B_{lm} auf den drei von A_i ausgehenden Kanten enthalten. Die 12 Parameter v der vier Flächen F_i sind dabei an die sechs Bedingungen (5) geknüpft.

Denkt man sich umgekehrt die sechs Punkte B auf den Kanten des Tetraeders gegeben, und bezeichnet $\frac{y_i^{(kl)}}{y_m^{(kl)}}$ die Koordinate $\frac{x_i}{x_m}$ des Punktes B_{kl} auf der Kante $x_k = 0$, $x_l = 0$, so ergibt sich aus (4) oder (4'), in Verbindung mit (5):

$$\frac{y_i^{(kl)}}{y_m^{(kl)}} = \frac{v_{mi}}{v_{im}}, \tag{6}$$

oder, wenn τ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$v_{mi} = \tau y_i^{(kl)}, \quad v_{im} = \tau y_m^{(kl)}. \tag{6a}$$

Alsdann bestimmt sich τ aus (5) durch:

$$\tau = \frac{a_{im}}{u_i y_i^{(kl)} + u_m y_m^{(kl)}},$$

und es resultiert für v_{im} der Wert:

$$v_{im} = \frac{y_m^{(kl)} a_{im}}{u_i y_i^{(kl)} + u_m y_m^{(kl)}}. \tag{7}$$

I. Nimmt man auf jeder Kante ($x_k = 0$, $x_l = 0$) *des Koordinatentetraeders einen Punkt* B_{kl} *an, dessen Koordinate* $\frac{x_i}{x_m}$ *durch den Wert* $\frac{y_i^{(kl)}}{y_m^{(kl)}}$ *gegeben sei, ist ferner ein Kegelschnitt K vorgelegt als Schnitt einer Ebene* $u_x = 0$ *und der ihn mit den Ecken des Tetraeders verbindenden Fläche 2. Grades* $a_{xx} = 0$, *so sind die vier Flächen 2. Grades* F_i, *wo* F_i *durch K, sowie durch die Punkte* B_{kl}, B_{km}, B_{lm} *hindurchgeht, dargestellt durch die Gleichungen* (2), *wo die zwölf Koeffizienten v vermöge der Relationen* (7) *bestimmt sind.*

Läßt man dagegen die Lage der sechs Punkte B willkürlich, so sind die zwölf Koeffizienten v der vier Flächen F_i *nur an die sechs Relationen* (5) *gebunden.*

Multipliziert man jetzt die Relationen (5) je mit dem Faktor $x_i x_m$ und addiert, so gewinnt man mit Rücksicht auf die Abkürzung (3) die Identität:

$$a_{xx} \equiv \sum x_i u_i V_i. \tag{I}$$

Hieraus fließt ohne weiteres der gewünschte Satz. Bestimmt man nämlich einen Punkt (y) durch die Forderung:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \sigma, \tag{8}$$

wo σ ein zunächst von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor sei, so reduziert sich die Identität (I) auf die Gleichung:

$$a_{yy} \equiv \sigma u_y, \tag{9}$$

während anderseits hierdurch die Gleichungen $F_i = 0$ (2) durch den Punkt (y) erfüllt werden. Somit gilt der Satz:

II. Es schneiden sich die vier Flächen F_i *in dem durch die Gleichungen* (8) *festgelegten Punkte* (y).

Das Resultat bleibt indessen auch gültig, wenn die in (8) auftretende Größe σ im besondern verschwindet, was dann und nur dann der Fall ist, wenn die Determinante der vier, in den x linearen Formen V_i (3) verschwindet. Alsdann folgt aus (9) das Verschwinden von a_{yy}, und damit auch vermöge (2) dasjenige der vier Ausdrücke F_i (y). In

diesem Spezialfalle, und nur dann, liegt der gemeinsame Schnittpunkt (y) gleichzeitig auf der Fläche A (s. das zweite Korollar von Herrn Haskell). Offenbar sagt das Verschwinden der vier Ausdrücke $V_i(y)$ aus, daß die Ebenen der vier Kegelschnitte, in denen die Flächen F_i die Fläche A außer K noch schneiden, durch einen und denselben Punkt gehen.

Der Fall der Ebene $(n = 2)$ weist eine eigenartige Besonderheit auf. Verschwindet nämlich hier die Größe σ in den bezüglichen Gleichungen (8): $V_1 = V_2 = V_3 = \sigma$, also auch die Determinante $\varDelta$ der drei Formen V:

$$\varDelta = v_{12}v_{23}v_{31} + v_{21}v_{13}v_{32} = 0, \tag{10}$$

so sagt das offenbar im Hinblick auf die Relationen (6) aus, daß die drei Punkte B auf den Seiten des zu Grunde gelegten Dreiecks *in einer Geraden* liegen und umgekehrt. Daraus fließt unmittelbar das Korollar, daß die vier den vier Dreiseiten eines Vierseits umschriebenen, gleichzeitig durch zwei feste Punkte K_1, K_2 gehenden Kegelschnitte sich in einem und demselben Punkte schneiden. Im Falle, daß man K_1, K_2 als die beiden Kreispunkte der Ebene wählt, ist das das Steinersche Korollar, daß die vier Umkreise der vier Dreiseite eines Vierseits sich in einem Punkte schneiden.

Hieraus aber läßt sich sofort schließen, daß der entsprechende Satz im Raume R_n $(n \geqq 3)$ nicht mehr gilt. Gesetzt, es liegen die sechs Punkte B auf den Kanten des Tetraeders zugleich auf einer Ebene E, so schneidet diese aus dem Tetraeder ein Vierseit aus, und die vier Flächen F_i (2) schneiden E in den vier Kegelschnitten, die den vier Dreiseiten des Vierseits umbeschrieben sind und zugleich durch die beiden Punkte K_1, K_2 gehen, in denen E dem Kegelschnitt K begegnet. Diese vier Kegelschnitte, und damit die vier Flächen F_i selbst schneiden sich also in einem auf E gelegenen Punkte.

Wiederholt man diese Betrachtung für die fünf Tetraeder, die von je vier der fünf Ebenen, die sich aus E und den Ebenen des ursprünglichen Tetraeders zusammensetzen, so schneiden sich immer vier der fünf Flächen 2. Grades, die durch K gehen und je einem der fünf Tetraeder umbeschrieben sind, in einem Punkte der fünften Ebene, und ersichtlich können diese fünf Punkte niemals in einen einzigen zusammenfallen. Aber auch die Vermutung, daß diese fünf Punkte selbst auf einer durch K gehenden Fläche 2. Grades liegen, erweist sich als hinfällig. Denn wäre G diese Fläche, so müßte entweder G mit den fünf obigen Flächen in eine einzige zusammenfallen, was offenbar nicht stattfinden kann, oder aber es müßten sich sämtliche sechs Flächen

(außer K) in einem Kegelschnitte C schneiden, der durch die fünf obigen Punkte ginge. Da aber irgend zwei der obigen fünf Flächen durch eine Ecke A des ursprünglichen Tetraeders gehen, so müßten auch die vier Ecken A auf C liegen, was wiederum unmöglich ist.

Offenbar gilt der Beweis des Hauptsatzes II unmittelbar auch für den R_n, man hat nur in den Formeln (2) bis (9) die Indices die Werte 1 bis n durchlaufen zu lassen.

Wählt man im besondern für $n = 3$ den Kegelschnitt K als den *Kugelkreis* (und entsprechend im R_n), so ergibt sich der Haskellsche Satz, resp. sein zweites Korollar.

Es ist wohl kaum erforderlich hinzuzufügen, daß mit dem Satze II auch der *dualistische* gilt.

Wählt man im besondern die sechs Punkte B_{kl} als die Punkte, die auf jeder Kante $A_i A_m$ bezüglich der Ecken A_i, A_m harmonisch liegen zu dem Schnittpunkt der Kante mit der Ebene u des Kegelschnitts, so ist in (6) der Quotient $\frac{y_i^{(kl)}}{y_m^{(kl)}}$ zu ersetzen durch $\frac{u_m}{u_i}$, wodurch (7) übergeht in:

$$v_{im} = \frac{a_{im}}{2u_i}. \tag{7a}$$

Alsdann sind aber die zur Bestimmung des Punktes (y) dienenden Gleichungen (8) $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \sigma$ *dieselben*, wie die zur Bestimmung des Poles der Ebene u bez. der Fläche A erforderlichen Gleichungen. Ist im besondern wiederum K der Kugelkreis, so ergibt sich das erste Haskellsche Korollar.[1]) Bleibt man aber bei einem beliebigen Kegelschnitt K, so tritt noch ein weiterer bemerkenswerter Spezialfall ein.

Läßt man nämlich bei der Annahme, die zu den Relationen (7a) führte, auch noch die Determinante der Formen V verschwinden, sodaß also die Größe σ in (8) den Wert Null hat, so zieht das Verschwinden jener Determinante auch das der Determinante $|A|$ der Form A nach sich.

Somit artet die Fläche A in einen Kegel aus, und der Schnittpunkt (y) der vier Flächen F_i (2) fällt in die Spitze des Kegels.

---

1) Dieses ergibt sich übrigens unmittelbar (worauf mich Herr Vahlen hinwies) auf elementarem Wege. Denn sei Y der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$, so schneidet die Kugel F_i, die die Strecke YA_i als Durchmesser besitzt, die drei von A_i ausgehenden Kanten in deren Mittelpunkten B_k.

Es sei noch bemerkt, daß bei der Annahme (7^a) die sechs Kanten von T in den sechs Punkten B_{kl} von einer Fläche 2. Ordnung berührt werden, deren Gleichung lautet:

$$\sqrt{u_1 x_1} + \sqrt{u_2 x_2} + \sqrt{u_3 x_3} + \sqrt{u_4 x_4} = 0; \tag{11}$$

und umgekehrt, unterliegen die sechs Punkte B_{kl} dieser Bedingung, so ist $u_x = 0$ die Ebene, die aus jeder Kante jeweils den vierten harmonischen Punkt ausschneidet.

Königsberg i. Pr., Januar 1903.

Über eine Eigenschaft des Kettenbruchs $x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x \cdots}}}$

Von Herrn E. MEYER in Charlottenburg.

Ist $\varphi(x) = \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}$, wo a_1, a_2, a_3, a_4 konstante Größen, für die $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1$, x eine unbestimmte Variable bedeuten, und setzt man $\varphi_2(x) = \varphi(\varphi(x))$, $\varphi_3(x) = \varphi(\varphi_2(x))$ u. s. w., so ist, wie Babbage 1820 zuerst gezeigt hat[1]), $a_1 + a_4 = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß identisch $\varphi_n(x) = x$ wird.

Hieraus folgt, daß, wenn durch die Gleichungen

$$(d + x_k)\, x_{k+1} + 1 = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

die Größen $x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ definiert sind, dann und nur dann $x_{n+1} = x_1$ bei jedem Werte von x_1 wird, wenn $d = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ ist. Aus (1) ergibt sich die Kettenbruchentwicklung:

$$-\frac{1}{x_{n+1}} = d - \frac{1}{d - \frac{1}{d - \cdots - \frac{1}{d - \frac{1}{-\frac{1}{x_1}}}}}, \tag{2}$$

worin die Anzahl der Größen d auf der rechten Seite gleich n ist. Bezeichnen für den Kettenbruch $d - \frac{1}{d - \frac{1}{d - \cdots}}$ Z_k und N_k Zähler und Nenner des $k$ten Näherungsbruchs, so daß $Z_1 = N_2 = d$, $Z_2 = N_3 = d^2 - 1$ u. s. w., so ergibt der Schluß von n auf $n+1$ $Z_n = N_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

---

1) Vgl. Laurent, Traité d'Analyse VI, 243, ferner: Netto, Vorlesungen über Algebra § 272.

Aus (2) folgt:

$$(3) \qquad -\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{Z_n + x_1 Z_{n-1}}{Z_{n-1} + x_1 Z_{n-2}};$$

also muß, wenn $x_{n+1} = x_1$ sein soll, die Gleichung

$$x_1^2 Z_{n-1} + x_1 (Z_{n-2} + Z_n) + Z_{n-1} = 0$$

erfüllt sein, die sich wegen

$$(4) \qquad Z_n = d \cdot Z_{n-1} - Z_{n-2}$$

auch in der Form

$$Z_{n-1}[(d + x_1) x_1 + 1] = 0$$

schreiben läßt. Wäre $(d + x_1) x_1 + 1 = 0$, so würde schon $x_2 = x_1$ sein, so daß also die notwendige Bedingung dafür, daß $x_{n+1} = x_1 (n > 1)$ wird, $Z_{n-1} = 0$ ist. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, da, wenn sie erfüllt ist, wegen (4) sich aus (3) $x_{n+1} = x_1$ ergibt. Weiter folgt, daß, wenn $x_{n+1} = x_1$ für irgend einen bestimmten Wert von x_1 $(n > 1)$ ist, diese Gleichung für jeden beliebigen Wert von x_1 gilt.

Vergleicht man dies Ergebnis mit dem obigen, so folgt, da Z_{n-1} eine ganze Funktion $(n-1)$ten Grades ist und die $\cos \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ sämtlich verschiedene Werte haben, *daß, wenn $\chi_n(x)$ den Zähler des nten Näherungsbruches für den Kettenbruch* $x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x \ddots}}$ *bedeutet, die Gleichung $\chi_n(x) = 0$ die Wurzeln $x = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ besitzt.* Dasselbe Ergebnis habe ich auch direkt aus der Rekursionsformel (4) abgeleitet.

Betrachtet man (1) als Verwandtschaftsgleichung zweier projektiver Punktreihen auf demselben Träger, die x_k als Abscissen von dem einen der Gegenpunkte aus, so ist d der Abstand der letzteren, -1 die Potenz der projektiven Beziehung, deren absoluten Betrag man, ohne der Allgemeingültigkeit Eintrag zu tun, als Maßeinheit für die Strecken benutzen kann. Unser Ergebnis besagt dann, daß jene Projektivität dann und nur dann cyklisch von $n$ter Ordnung ist, wenn bei Benutzung jener Maßeinheit der Abstand der Gegenpunkte $d = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ (k relativ prim zu n) ist.[1]) Der negative Wert -1 für jene Potenz entspricht dabei der bekannten Bedingung, daß einförmige nicht involutorische cyklisch projektive Grundgebilde gleichlaufend sein müssen.

Frankfurt a/M., den 19. August 1902.

---

1) Vgl. Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie II. 3. Aufl. S. 506.

Zur Note des Herrn J. Knoblauch: Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln.

Von R. v. LILIENTHAL in Münster i/W.

In den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft (II. Jahrgang, S. 1, Sitzung vom 26. November 1902) ist eine Note des Herrn Knoblauch „Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln" erschienen, die mich zur folgenden Erklärung nötigt.

1. Die von mir in der Differentialgeometrie angewandten Operationen, die ich 1896 in meiner Schrift „Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen" (vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 3, S. 125) mit dem Namen „Ableitungen nach der Bogenlänge einer Kurve" belegt habe, setzen zu ihrer Benutzung in der Flächentheorie keinerlei Spezialisierung der krummlinigen Koordinaten voraus und fallen, wenn sie mit Hilfe der Bogenlängen der Krümmungslinien gebildet werden, mit den von Herrn J. Knoblauch mit $\theta_\nu \varphi$ bezeichneten Operationen zusammen.

2. Das von Herrn Knoblauch in der fraglichen Note angegebene System flächentheoretischer Grundformeln ist ein besonderer Fall des allgemeineren Systems, das ich in der genannten Encyklopädie (III D 3, S. 161) skizziert habe. Man braucht bloß die Krümmungslinien in dem dort gebrauchten Sinn zu Koordinatenlinien zu nehmen, um die fraglichen Formeln zu erhalten, von denen die unter (1), (2), (3) von Herrn Knoblauch angeführten a. a. O. S. 164 sogar verzeichnet sind. Die von Herrn Knoblauch unter (I), (II), (III) angeführten Formeln besonders zu erwähnen, lag kein Grund vor, einmal, weil sie bei ihrer Veröffentlichung im Jahre 1893 nach meinen Arbeiten über die Krümmungslehre der Kurvenscharen (Math. Ann. **32** (1888), **38** (1891)) nicht mehr neu waren, und dann, weil auf die betreffenden Arbeiten des Herrn Knoblauch aus den Jahren 1893, 1895 bereits in der Encyklopädie (I B 2, S. 384, Fußnote 547) hingewiesen war.

Münster i/W., 11. März 1903.

Auszug aus einem Briefe an Herrn E. Jahnke.

Von J. Knoblauch in Berlin.

... Sie haben mir vor kurzem von einer Erklärung Kenntnis gegeben, zu der sich Herr R. v. Lilienthal auf Grund meiner Mitteilung in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft, II. Jahrg. (1903), S. 6—10 veranlaßt sieht. Nunmehr beabsichtigen Sie diese Erklärung im nächsten Hefte des Archivs für Mathematik und Physik abzudrucken und ersuchen mich um eine Äußerung dazu, mit dem Bemerken, daß den Lesern des Archivs eine solche erwünscht sein werde. So bitte ich Sie denn, folgendes zum Abdruck zu bringen.

Die Richtigkeit der ersten Behauptung des Herrn v. Lilienthal liegt auf der Hand, und ich vermag deshalb nicht einzusehen, was er mit diesem Punkte seiner Erklärung bezweckt. Sollte er geglaubt haben, an einer Stelle, wo der Natur der ganzen Auseinandersetzung nach von der flächentheoretischen Literatur nach 1893 gar nicht die Rede ist — die Bemerkung zur Theorie der Raumkurven, a. a. O. S. 8, Schluß des ersten Absatzes, steht für sich allein —, dennoch eine Erwähnung seiner „Krümmungslehre der Curvenscharen" von 1896 erwarten zu sollen, so habe ich darauf zu erwidern, daß umgekehrt in Herrn v. Lilienthals Schrift eine Nennung derjenigen Mathematiker vermißt wird, von denen die dort von ihm angewendete Methode der Differentiation nach Bogenlängen herrührt.

Auf der Hand liegend ist ebenfalls die Richtigkeit der zweiten Behauptung. Nur scheint Herr v. Lilienthal verkannt zu haben, daß seine Formeln nicht inhaltlich allgemeiner, sondern nur äußerlich komplizierter sind als die in meiner Mitteilung mit (I, II, III) bezeichneten, indem sie eine Anzahl von Größen mit sich führen, die sich bei der Anwendung lediglich als Ballast erweisen. Zu dem ersten der beiden Gründe, durch die Herr v. Lilienthal die Nichterwähnung der einfachen und allgemeinen Gleichungen (I, II, III) zu stützen sucht, ist zu bemerken, daß diese Gleichungen in den beiden von ihm citierten Abhandlungen gar nicht vorkommen. In den Formeln, auf die Herr v. Lilienthal sich offenbar bezieht, fehlt, von anderen notwendigen Veränderungen abgesehen, gerade das Entscheidende, nämlich der Übergang von den Differentiationen zu kovarianten Operationen; sieht man aber hiervon ab, so liegen die Formeln bereits lange vor 1888 in der flächentheoretischen Literatur vor.

Im übrigen verzichte ich auf eine Kritik des Versuches, die Weglassung gewisser Ergebnisse aus einem encyklopädischen Werke dadurch zu rechtfertigen, daß sie zu einer bestimmten Zeit nicht mehr neu waren, ebenso wie auf eine Beurteilung des zweiten von Herrn v. Lilienthal hierfür noch aufgeführten Grundes, und überlasse jedem, aus der Fußnote 347 des Berichtes über Invariantentheorie von den in Rede stehenden Formeln Kenntnis zu erlangen.

Was endlich die in meiner Mitteilung mit (1, 2, 3) bezeichneten Formeln betrifft, die Herr v. Lilienthal in seine Erklärung einbezogen hat, obgleich ich nirgends behauptet habe, daß auch diese fundamentalen Relationen in der Encyklopädie fehlten, so gestatte ich mir bei dieser Gelegenheit zu bemerken, daß auf der von Herrn v. Lilienthal citierten Seite eine Angabe darüber, wer diese Formeln zuerst aufgestellt hat, wohl an ihrer Stelle gewesen sein würde.

Berlin, den 23. Mai 1903.

Rezensionen.

R. Fricke und **F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.** Zweiter Band: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. 1. Lieferung: Engere Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig. B. G. Teubner. 1901.

War der erste Band (1897) [siehe die Besprechung von Herrn Wirtinger in der „Zeitschrift für Math." 44, 1899, p. 63 und auch die des Referenten in den „Fortschritten der Math." 28, 1897 [1899], p. 334] der allgemeinen Grundlegung der Theorie der automorphen Funktionen gewidmet, so bringt die vorliegende erste Lieferung des zweiten Bandes, die zugleich dessen ersten Abschnitt bildet, die Ausführungen im einzelnen. Beginnen wir mit einer kurzen Übersicht. Der Stoff wird in vier Kapitel gegliedert.

Im ersten Kapitel werden die Begriffsdefinitionen, die Existenz- und Eindeutigkeitstheoreme der *automorphen Funktionen* nebst deren wirklicher Herstellung behandelt, sowie ihre Grundeigenschaften entwickelt, überdies werden die zu jenen Funktionen inversen „*polymorphen*" Funktionen begrifflich festgelegt und deren Differentialgleichungen untersucht. Das zweite Kapitel studiert entsprechend, vermöge konsequenter Benützung homogener Variabeln, die *automorphen Formen*, insbesondere für das Geschlecht Null. Ein besonderes Interesse nehmen hierbei die *eindeutigen* Formen in Anspruch.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der expliziten Darstellung der automorphen Gebilde des Geschlechtes Null durch die Poincaréschen Reihen, wobei deren Konvergenz eingehend erforscht wird, nebst ihrem Verhalten in singulären Punkten. Es gelingt die Konstruktion solcher Reihen, die nur *einen* Pol besitzen. Vermöge dieser Poincaréschen Reihen und der „*Elementarformen*" wird die Darstellung beliebiger automorpher Formen des Geschlechtes Null ermöglicht.

Erweiterungen auf ein beliebiges Geschlecht p werden im vierten Kapitel gegeben. Eine zur vorgelegten Gruppe Γ gehörige unverzweigte automorphe Form wird durch die „*Prim-*" und „*Grundformen*" dargestellt. Die Existenz der eindeutigen Formen bei gegebenem „*Multiplikatorsystem*" wird nachgewiesen. Die Poincaréschen Reihen und Elementarformen werden soweit untersucht, daß sie zur Darstellung einer beliebigen automorphen Form dienen können.

Wenn wir nunmehr ausführlich auf den Gegenstand eingehen und nach Möglichkeit versuchen, dem Leser ein Bild der leitenden Gedankengänge zu entrollen, so bedarf das, ganz abgesehen von der Bedeutung der entwickelten Theorien, gerade bei der Eigenart des vorliegenden Werkes (ebenso wie der voraufgehenden) kaum einer Rechtfertigung.

Wie ein moderner Feldzug unter sorgfältiger Benützung aller Errungenschaften der Technik und der Naturwissenschaften geführt wird, so lag es den Verfassern daran, beim Aufbau ihrer Theorie alle Hilfsmittel, mögen sie der Analysis, Geometrie, Algebra und Zahlentheorie, Analysis situs und mathematischen Physik angehören, heranzuziehen, die sich irgendwie als fördernd erwiesen, und sie in ihrer gegenseitigen Durchdringung zu verfolgen. Es ist dabei durchaus anzuerkennen, daß sie auch die Darstellung so gewählt haben, daß die Gedankenentwicklungen, von denen sie bei Auffindung der neuen Sätze geleitet waren, auf das deutlichste hervortreten. So darf das Werk als ein in seiner Art ganz einheitliches gelten. Andererseits soll keineswegs geleugnet werden, daß eine zweite ergänzende Darstellung, die sich ausschließlich analytischer Methoden bediente, für die Wissenschaft von höchstem Nutzen sein würde.

Sei dem, wie es wolle, jedenfalls hat sich der Leser des Werkes einer nicht unbedeutenden, wenn auch überaus lohnenden Anstrengung zu befleißigen, um die Hauptwege, die durch das vielfach verschlungene Ganze hindurchführen, im Auge zu behalten. Wir sehen es daher als eine Hauptaufgabe an, dem Leser dieser Besprechung jene Arbeit zu erleichtern, um ihn so zum Studium des Werkes selbst anzuregen.

Der erste Band wurde beherrscht durch den Begriff einer *„eigentlich diskontinuierlichen“* Gruppe Γ linearer Substitutionen einer komplexen Variabeln ζ und deren *„Polygon-“* resp. *„Polyedernetzen“*. Ist jetzt eine solche Gruppe Γ vorgelegt, so fragt man nach (linear) *automorphen* Funktionen $z = \varphi(\zeta)$, d. h. nach solchen Funktionen, die ihren Wert nicht ändern, falls man ζ einer Substitution von Γ unterwirft. Umgekehrt geht dann die inverse Funktion $\zeta = f(z)$ bei geschlossenen Umläufen von z in lineare Funktionen $\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$ ihrer selbst über und wird daher als (linear) *polymorphe* Funktion bezeichnet. Hierbei findet die Beschränkung auf *„Polygongruppen“* statt, d. h. es werden solche Gruppen Γ ausgeschlossen, die erst im Innern des ζ-Halbraumes (und nicht schon in der ζ-Ebene) eigentlich diskontinuierlich sind.

Sei N ein *„Netz“* von Polygonen $P_0, P_1, \ldots$ von Γ; Γ wird gebildet durch die Substitutionen $V_0, V_1, \ldots$, die P_0 in $P_0, P_1, \ldots$ überführen. Das Polygon P_0 soll jedoch nur endlich viele Seiten haben, d. h. es soll Γ aus endlich vielen *„Erzeugenden“* hergestellt werden können. Die Seiten von P_0 sind Kreisbögen. P_0 besitze n *„Cyklen“* *„fester“* Ecken, und die aus P_0 durch Zusammenbiegung entsprechender Randkurven entstehende geschlossene Fläche besitze das Geschlecht p. P_0 und Γ erhalten damit den *„Charakter“* (p, n). P_0 heißt *„Fundamentalbereich“* von Γ. Ist jetzt $V_k = \begin{pmatrix}\alpha_k, \beta_k\\ \gamma_k, \delta_k\end{pmatrix}$ irgend eine Substitution von Γ, so ist des näheren die oben eingeführte, zu Γ resp. P_0 gehörige automorphe Funktion $\varphi(\zeta)$ eine analytische Funktion derart, daß für $\zeta_k = \frac{\alpha_k\zeta + \beta_k}{\gamma_k\zeta + \delta_k}$:

$$\varphi(\zeta_k) = \varphi(\zeta) \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

wird, d. h. es soll $\varphi(\zeta)$, von irgend einem Punkte ζ von P_0 bis zum homologen Punkte ζ_k von P_k analytisch fortgesetzt, seinen Anfangswert

wieder erreichen. Übrigens soll $\varphi(\zeta)$ in P_0 keinen wesentlich singulären Punkt besitzen und daselbst unverzweigt und eindeutig sein, Forderungen, die durch die Natur der zugehörigen Potenzreihenentwickelungen festgelegt werden (§ 1). Die festen Eckpunkte ζ_0 von P_0 dürfen als *„elliptische“* oder *„parabolische“* gewählt werden; ein bei ζ_0 durch einen hinreichend kleinen dreieckigen Sektor S ausgeschnittenes Stück von P_0 stellt die *Umgebung* von ζ_0 dar, die auf die Fläche eines einfach und vollständig bedeckten Kreises abgebildet wird.

Die Existenz der Funktionen gründete Klein auf die allgemeinen Riemannschen *Existenztheoreme*, die durch H. A. Schwarz und C. Neumann sicher gestellt waren. Es werden die reellen Teile von Funktionen von $\zeta = \xi + i\eta$ auf Grund der Lösung der *„Randwertaufgabe“* als „logarithmische Potentiale“ $u(\xi, \eta)$ konstruiert, zuvörderst für kreisförmige Bereiche, sodann vermöge des *„Grenzüberganges durch alternierendes Verfahren“* auf zusammengesetzte.

So wird das Innere von P_0 *„dachziegelartig“* mit endlichvielen Kreisscheiben überdeckt. Auf P_0 und u werden sodann alle V ausgeübt. Die analytische Fortsetzung eines u über den Rand in ein benachbartes Polygon führt dann von selbst zu dem dort erklärten Potential. Die Funktion u ist dann ein *„automorphes Potential“*, das als ein zu P_0 gehöriges *„Elementarpotential 2. Gattung“* bezeichnet wird (§ 2). Man bilde nunmehr das zu $u(\xi, \eta)$ *„konjugierte“* Potential $v(\xi, \eta) = \int\limits_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi\right)$, wo die feste untere Grenze in P_0 liege, und die Integrationsbahn im Innern von N verlaufe. Das Differential dv hat ebenfalls automorphen Charakter, v dagegen wird sich bei Fortsetzung bis zu einer äquivalenten Stelle nur erst bis auf eine reelle additive Konstante reproduzieren. Ein auf F geschlossener Umlauf, der sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt, liefert in N einen Weg mit verschwindendem $v = \int dv$, wenn die Rolle der den festen Ecken in P_0 entsprechenden Stellen $e_1, \ldots, e_n$ genügend berücksichtigt wird. Für $p = 0$ läßt sich jeder Umlauf auf F stetig auf einen Punkt zusammenziehen; dann ist auch v automorph und damit auch $\varphi(\zeta) = u + iv$, wo φ noch an einer willkürlich gewählten Stelle in P_0 einen Pol erster Ordnung besitzt, sonst aber daselbst stetig ist.

Für $p > 0$ gibt es aber Umläufe auf F, die sich nicht auf Punkte zusammenziehen lassen; ein solcher läßt sich aus $2p$ elementaren Umläufen herstellen. Der Ausdruck $Z = u + iv$ hat dann auf F den Charakter eines *„Elementarintegrals 2. Gattung“*, das einen Pol 1. Ordnung und im übrigen rein imaginäre Perioden aufweist. In einem linearen Aggregat der Form $c_1 Z_1 + \ldots + c_\mu Z_\mu$ lassen sich, falls $\mu > 2p$, die Konstanten c so bestimmen, daß dasselbe wiederum eine automorphe Funktion φ liefert (die mindestens zwei einfache Pole in P_0 besitzt).

Damit ist für jede Gruppe Γ die Existenz automorpher Formen erwiesen (§ 3).

Indem P_0 auf eine geschlossene Riemannsche Fläche abgebildet wird, ergibt sich in bekannter Weise die Anzahl μ der einfachen Pole von $\varphi(\zeta)$ gleich der der Nullpunkte; φ nimmt daher jeden vorgegebenen Wert an

μ Stellen in P_0 an. Die Zahl μ heißt *Wertigkeit* von φ. Somit wird P_0 durch die Funktion $z = \varphi(\zeta)$ auf eine gewöhnliche μ-blättrige Riemannsche Fläche F der Variabeln z vom Geschlecht p abgebildet (§ 4).

Dabei erweist sich $\varphi[\zeta(z)]$ als eine zu F gehörende algebraische Funktion (§ 5), und umgekehrt, bedeutet $w(z)$ eine algebraische Funktion auf F, so ist $w[z(\zeta)]$ eine automorphe Funktion in P_0 (*Existenztheorem*).

Für $p = 0$ gibt es ∞^3 *einwertige* Funktionen, die „Hauptfunktionen", in der Gestalt $\frac{a\varphi + b}{c\varphi + d}(ad - bc \neq 0)$.

Zwischen zwei Funktionen φ_1, φ_2 von Γ mit den Wertigkeiten μ_1, μ_2 herrscht eine algebraische Relation $G^{(\mu_2),(\mu_1)}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Bei gegebenem φ_1 ist φ_2 so bestimmbar, daß G irreduzibel wird, dann läßt sich jede Funktion φ von Γ rational durch φ_1, φ_2 darstellen, und umgekehrt (im besondern für $p = 0$ durch eine Hauptfunktion φ_1).

Da sich in der Umgebung eines Grenzpunktes von N unendlich viele Polygone P_k zusammendrängen, so ist jeder Grenzpunkt von N ein wesentlich singulärer Punkt und die Grenzkurven von N bilden eine *natürliche Grenze* von φ. Innerhalb P_0 und überhaupt N ist φ eine eindeutige Funktion von ζ, sodaß eine algebraische Funktion von z auf F eine eindeutige Funktion von ζ wird (§ 5).

Für die Klassifikation (§ 6) der Funktionen φ ist, außer funktionentheoretischen Gesichtspunkten, die früher durchgeführte Klassifikation der Gruppen Γ maßgebend. Die Klasse der *elementaren* Funktionen φ umfaßt die rationalen, die elementartranscendenten und die doppeltperiodischen nebst verwandten Funktionen. Es werden drei Unterklassen unterschieden: die cyklischen (zu cyklischen Gruppen Γ gehörigen) Funktionen, die der regulären Körper und die doppeltperiodischen Funktionen. Die ersteren sind wiederum wesentlich verschieden, je nachdem die Gruppen Γ aus elliptischen resp. parabolischen, oder aber aus hyperbolischen resp. loxodromischen Substitutionen bestehen. Die doppeltperiodischen Funktionen zerfallen in solche mit additiven und solche mit multiplikativen Perioden, die sich übrigens durch eine logarithmische Transformation auf einander zurückführen lassen.

Die Klassifikation der höheren φ stützt sich auf eine im Sinne der Analysis situs durchgeführte Untersuchung der *„hyperbolischen Rotations-"*, oder *„Hauptkreisgruppen"* (§ 7). Die höheren φ zerfallen zunächst in zwei Hauptklassen, jenachdem sie einen Hauptkreis besitzen oder nicht. Die Hauptkreisfunktionen sind entweder solche mit *„Grenzkreis"* (die wiederum nach *Geschlechtern*, *Gattungen* und *Familien* getrennt werden), oder aber solche mit isoliert liegenden Grenzpunkten (die analog eingeteilt werden). Die φ ohne Hauptkreis haben entweder unendlich viele isolierte Grenzpunkte, oder aber eine (nicht analytische) *Grenzkurve*, oder schließlich unendlich viele Grenzkurven (§ 8).

Nunmehr werden (§ 9) die Integrale der automorphen Gebilde herangezogen: $J(\zeta) = \int R(w, z)dz$, wo R eine rationale Funktion bedeutet. Wie nun ein elliptisches Integral 2. Gattung eine eindeutige Funktion vom zugehörigen Integral 1. Gattung ist, so sind im Falle einer einzigen Grenzkurve von N, die automorphen Integrale 1. und 2. Gattung *eindeutige*

Funktionen von ζ; ein solches ändert sich nicht gegenüber den elliptischen und parabolischen Erzeugenden V und nimmt bei einer der übrigen einen additiven Periodenzuwachs an (§ 9).

Komplizierter verhalten sich die Integrale 3. Gattung, wo die Fälle eines einfachen und mehrfachen Zusammenhanges von N zu unterscheiden sind.

Der Satz von der Eindeutigkeit der Integrale $J(\zeta)$ läßt sich noch weiter ausdehnen. Im Falle einer einzigen Grenzkurve ist eine Funktion von ζ, die auf F — abgesehen von den Stellen c — höchstens polar unstetig ist, in N eindeutig, wenn sie sich in jeder, einer elliptischen Ecke der Periode l_i entsprechenden Stelle nach l_i-fachem Umlauf reproduziert (§ 10). Hierher gehören u. a. die Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen, deren Koeffizienten auf F algebraisch sind. Die zu einem „Fundamentalsystem" gehörigen eindeutigen Funktionen substituieren sich linear homogen gegenüber Γ.

Nunmehr werden die polymorphen Funktionen $\zeta(z) = f(z)$ auf F in Betracht gezogen (§ 11).

Aus ζ geht vermöge $S(\zeta) = \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ eine analytische Funktion $\zeta' = S(\zeta)$ hervor, die derselben *Klasse* zugewiesen wird, so daß es (bei komplexen Parametern $a : b : c : d$) ∞^6 polymorphe Funktionen ζ einer Klasse gibt. ζ ist nur in den Ecken e_i verzweigt. Das Hauptproblem ist, ob auf jeder Riemannschen Fläche polymorphe Funktionen bei willkürlich gegebenen Verzweigungsstellen e existieren? Hier sind die Fälle zu trennen, wo P_0 einen Grenzkreis besitzt oder nicht.

Zuvörderst wird festgestellt — auf Grund der Invarianz des Schwarzschen *Differentialausdrucks* $[\zeta]_z = \dfrac{\zeta'''}{\zeta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2$ — daß die ζ einer und derselben Klasse Integrale einer Differentialgleichung 3. Ordnung $[\zeta]_z = R(w, z)$ sind, wo R eine gewisse algebraische Funktion der Fläche ist.

Am Schlusse des ersten Kapitels wird betont, daß die meisten oben aufgestellten Begriffsbestimmungen und Methoden auch für mehrdeutige Funktionen gültig sind.

Das zweite Kapitel bringt die formentheoretischen Ausführungen im Falle $p = 0$, wie sie durch den ersten Band und die „Modulfunktionen" vorbereitet waren.

Historisch ist ja auch das Studium polymorpher Formen bei Riemann und Schwarz das frühere gewesen. Es werden automorphe und polymorphe Formen eingeführt — nicht, wie bei Poincaré durch Reihen (Kap. III) — sondern direkt aus den automorphen Funktionen durch einen gewissen Differentiationsprozeß gebildet.

Voran geht eine Orientierung über die zugehörigen Fundamentalbereiche (§ 1) und eine Zusammenstellung von Hilfssätzen über homogene Variable, Substitutionen und Gruppen (§ 2). Für $\zeta_1 : \zeta_2 = \zeta$ werden ζ_1, ζ_2 so gewählt, daß ζ auf N beschränkt bleibt („erlaubte Wertepaare" ζ_1, ζ_2). Die homogenen ζ-Substitutionen $U : \zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2$, $\zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2$ sind unimodular gedacht; die nicht homogene Gruppe Γ ist dann zur homogenen 1-2-deutig homomorph. Die *„primäre"* Relation $V_1 V_2 \ldots V_n = 1$ zwischen den Erzeugenden V erhält jetzt die Gestalt: $U_1 U_2 \ldots U_n = (-1)^n$, wo -1 der Substitution $\zeta_1' = -\zeta_1$, $\zeta_2' = -\zeta_2$ entspricht.

Eine *automorphe Form* (§ 3) $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = \varphi$ ist eine homogene Funktion der *„Dimension"* d (wo d rational); φ soll für alle erlaubten ζ_1, ζ_2 erklärt und unverzweigt sein. φ heißt an einer Stelle $(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)})$ *unverzweigt*, wenn $(\zeta_1\alpha_2 - \zeta_2\alpha_1)^{-d}\varphi$, wo $\alpha_1 : \alpha_2 \neq \zeta_1^{(0)} : \zeta_2^{(0)}$, eine unverzweigte Funktion von ζ ist. Längs eines Weges von einem Ausgangswert (ζ_1, ζ_2) zu einem bez. U äquivalenten ist φ eindeutig fortsetzbar und soll daselbst bis auf eine multiplikative Konstante μ den Anfangswert wieder annehmen:

$$\varphi(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \quad \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2) = \mu\varphi(\zeta_1, \zeta_2).$$

Die Verallgemeinerung gegenüber den automorphen Funktionen $\varphi(\zeta)$ liegt einmal in dem *„Multiplikator"* μ, sodann aber darin, daß von der Forderung der Eindeutigkeit der Formen $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ zunächst ganz abgesehen wird. Bei gebrochenem d ist sogar φ_d stets mehrdeutig.

Der Quotient zweier Formen φ mit demselben d und μ ist eine automorphe Funktion des Gebildes. Der Forderung der automorphen Funktion, in P_0 nicht wesentlich singulär zu sein, entspricht bei den Formen eine solche, die durch analoge Reihenentwicklungen, zugleich mit den Begriffen *„Nullpunkt* resp. *Pol* m^{ter} *Ordnung"* festgelegt wird.

Die Bildung automorpher Formen (§ 4) geht nun so vor sich. Die *„Differentialform"* $(\zeta_1 d\zeta) = \zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1 = -\zeta_2^2 d\zeta$ war gegenüber den unimodularen U von Γ absolut invariant. Folglich entsteht aus einer automorphen Funktion $\varphi(\zeta)$ eine ebenfalls absolut invariante automorphe Form in $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{d\varphi(\zeta)}{(\zeta, d\zeta)} = -\frac{1}{\zeta_2^2}\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}$. Für $p = 0$ entsteht so aus der *Hauptfunktion* $z = \varphi(\zeta)$ die *Hauptform* des Gebildes, die — abgesehen von n Nullpunkten in den festen Ecken e_k von den Ordnungen $\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$ und einem Pole 2. Ordnung — überall in P_0 endlich und von Null verschieden ist. Daher ist das Produkt $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)\prod_1^n (z - e_k)^{-\left(1-\frac{1}{l_k}\right)}$, abgesehen von einem einzigen Pole (von $\varphi(\zeta)$), in P_0 überall endlich und von Null verschieden. Für das Verhalten des Produktes im Pole ist die Ordnung $\frac{2}{\nu} = 2 - \sum_1^n\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$ maßgebend; die Zahl ν beherrschte schon die Theorie des Ikosaeders und besaß für die Gruppen der regulären Körper die Werte $2n$, 12, 24, 60. Bei unendlich vielen Grenzpunkten fällt ν negativ aus.

Die $\left(-\frac{\nu}{2}\right)^{te}$ Potenz $z_2(\zeta_1, \zeta_2)$ jenes Produktes hat nur noch einen Nullpunkt 1. Ordnung, und ist eine unverzweigte Form der Dimension ν, die *„Primform"* heißt (§ 5). Mit z_2 ist auch $z_1 = zz_2$ eine solche, und damit die ganze Schar $az_1 + bz_2 = (az + b)z_2$ mit dem beweglichen Nullpunkt $a : b$; umgekehrt ist der Quotient zweier Primformen mit verschiedenen Nullpunkten eine Hauptfunktion.

Für $e_k = e_k^{(1)} : e_k^{(2)}$ ist $(z, e_k) = z_1 e_k^{(2)} - z_2 e_k^{(1)}$ eine Form der Schar, die in der Ecke ε_k einfach verschwindet, bei einer *elliptischen* Ecke ε_k jedoch einen Nullpunkt der Ordnung l_k hat, sodaß auch $Z_k = \sqrt[l_k]{(z, e_k)}$ eine unverzweigte

Form ist, die *„Grundform“* heißt. Zwischen drei Grundformen Z_h, Z_i, Z_k besteht die Relation: $(e_i, e_k)\, Z_h^{l\,h} + (e_k, e_h)\, Z_i^{l\,i} + (e_h, e_i)\, Z_k^{l\,k} = 0$ (§ 5). Nunmehr kommt das Verhalten der φ_d, insbesondere der Prim- und Grundformen, gegenüber den U in Betracht, wobei die Mehrdeutigkeit der Formen die genaue Angabe des Weges verlangt, der von einem Wertepaar (ζ_1, ζ_2) zu einem äquivalenten (ζ_1', ζ_2') führt. Da φ_d das Produkt von ζ_2^d und einer Funktion $\psi(\zeta)$ von ζ allein ist, so genügt es, den Übergang von ζ zu ζ' und den von ζ_2 zu ζ_2' festzulegen. Die einfachsten Übergänge dieser Art werden als *„primitive“* Wege bezeichnet. Zu diesen tritt nur noch eine beliebige Anzahl σ von Umläufen um den Nullpunkt $\zeta_2 = 0$ hinzu. Damit ändert sich φ_d gegenüber U um den Multiplikator:

$$\mu = e^{-\frac{\pi i d}{l} + \frac{2 i \pi m}{l} + 2 i \pi \sigma} \quad \text{resp.} \quad \mu = e^{\frac{2 i \pi m}{l} + 2 i \pi d \sigma},$$

jenachdem U elliptisch oder parabolisch ist, falls φ in ε_k (in P_0) einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{m}{l}$ aufweist.

Das wird (§ 7) angewandt u. a. auf die drei Grundformen der *„Kreisbogendreiecke“*, d. h. solche mit der *„Signatur“* $(0,3;\, l_1, l_2, l_3)$. Bei den Gruppen der regulären Körper gelangt man zu den damaligen Ergebnissen bez. der mit den Fuchsschen *Primformen* übereinstimmenden Grundformen Z_1, Z_2, Z_3.

Trotzdem die Prim- und Grundformen im allgemeinen mehrdeutige automorphe Formen sind, dienen sie doch als Grundlage der eindeutigen Formen.

φ_d heißt, für $p = 0$ und ein ganzzahliges d, *eindeutig*, wenn der zu einer U gehörige Wert von μ von der Wahl des Weges der Argumente ζ_1, ζ_2 unabhängig ist. Besitzt N eine Grenzkurve, ist also einfach zusammenhängend, so ist sogar *jede* unverzweigte automorphe Form (bei ganzzahligem d) eine eindeutige, und solche werden zunächst betrachtet. Einem Produkt von U gehört als Multiplikator das Produkt der einzelnen Multiplikatoren zu. Bilden $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ das *„Multiplikatorsystem“* der n Erzeugenden $U_1, U_2, \ldots, U_n$, so gelten die Relationen: $\mu_i^{l_i} = (-1)^d$, $\mu_1 \cdot \mu_2 \ldots \mu_n = (-1)^{nd}$, wobei Multiplikatorsysteme für gerade und ungerade Dimension d zu trennen sind. Die μ_k erweisen sich also als gewisse Einheitswurzeln.

Ein die obigen Relationen erfüllendes System M von μ ist zunächst nur ein *„theoretisch mögliches“*; es bleibt unentschieden, ob zu ihm automorphe Formen gehören oder nicht. Die bei Γ möglichen Systeme M bilden eine Abelsche *Gruppe*, d. h. mit μ_i und μ_i' ist auch $\mu_i \mu_i'$ ein solches (§ 8). Hierauf läfst sich die Anzahl der M bei gegebener Gruppe Γ bestimmen (§ 9). Kommen 1) unter den $U_1, \ldots, U_n$ $n' \geqq 2$ parabolische vor, so giebt es $\infty^{n'-1}$ Systeme M; 2) ist $n' = 1$, und ist U_n diese parabolische Substitution, so giebt es $2 l_1 l_2 \ldots l_{n-1}$ Systeme. Komplizierter ist der dritte Fall, wo die U alle elliptisch sind. Zuerst sei d gerade. Wird $\mu_k = e^{2 i \pi \frac{\nu_k}{l_k}}$ gesetzt, so ist die diophantische Gleichung $\sum \frac{\nu_k}{l_k} = 0$ zu erfüllen. Bezeichnet δ_{ik} den gr. gem. Teiler von l_i und l_k, δ_{ikl} den von l_i, l_k, l_l etc., so erhält man nach Sätzen über Abelsche Gruppen durch vollständige Induktion als Anzahl

der möglichen M-Systeme: δ_{12}, $\frac{\delta_{12}\delta_{13}\delta_{23}}{\delta_{123}}$, $\frac{\delta_{12}\delta_{13}\delta_{14}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{34}\delta_{1234}}{\delta_{123}\delta_{124}\delta_{134}\delta_{234}}$ etc. . . .
Bei ungeradem d resultiert entweder die nämliche Anzahl, oder aber (wofür ein einfaches Kriterium aufgestellt wird) gar kein System. § 10 bringt Beispiele.

Die Anzahl der M-Systeme reduziert sich beim Hinzutreten *„sekundärer“* Relationen zwischen den U.

Die Frage nach der *Existenz* zugehöriger automorpher Formen wird beantwortet durch direkte Darstellung aller unverzweigten φ_d (für $p = 0$) durch die Primformen z_1, z_2 und die Grundformen Z_k (§ 11). Für ν als die Dimension von z_2 war $\frac{2}{\nu} = 2 - \sum\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$; andererseits ist ψ für $\varphi_d^\nu = z_2^d \psi$ von der Dimension Null. Hieraus folgt, daß bei einer φ_d die Gesamtordnung des Verschwindens in P_0 die der Pole um $\frac{d}{\nu}$ übertrifft, und hieraus wiederum, daß eine unverzweigte φ_d von Γ durch ihre Nullpunkte und Pole bis auf einen konstanten Faktor C eindeutig bestimmt ist.

Damit gelingt die Darstellung von φ_d in den Prim- und Grundformen:

$$\varphi_d(\zeta_1 \cdot \zeta_2) = C \cdot \frac{(z, x_1) \dots (z, x_\tau)}{(z, y_1) \dots z, y_\sigma)} \prod_1^n (z, e_k)^{\frac{m_k}{l_k}} = R_m \prod (z, e_k)^{\frac{m_k}{l_k}} \cdot$$

Hier ist $d = \nu\left(m + \sum \frac{m_k}{l_k}\right)$: die τ Stellen x resp. die σ Stellen y sind die Nullpunkte resp. Pole ganzzahliger Ordnung von φ_d, während in ε_k ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{m_k}{l_k}$ liegt (§ 11). Durch Spezialisierung für eindeutige Formen φ_d (mit ganzzahligem d) wird die Frage nach der Existenz von Formen φ_d bei gegebenem M entschieden (§ 12).

Es wird $\mu_k = e^{2i\pi\frac{\lambda_k}{2l_k}}$, wo $\lambda_k \equiv d \pmod{2}$ ist.

„Für jedes mögliche Multiplikatorsystem μ_k und jede Dimension d — mit den Bedingungen $\lambda_k \equiv d \pmod{2}$ — existieren eindeutige automorphe Formen. Hierbei ist R_m als rationale homogene Form der z_1, z_2 von der Dimension m noch frei wählbar. Im besonderen existieren für jedes gerade d *„eigentliche“* φ_d, d. h. zum System $\mu_k = 1$ gehörige, die also gegenüber allen U absolut invariant sind.“

Besondere Beachtung verdienen die Beziehungen zwischen *inversen* Systemen $\mu_k, \overline{\mu}_k$, wo nämlich $\mu_k \overline{\mu}_k = 1$. Mit Rücksicht auf die späteren Reihendarstellungen werden zwei solche zugehörige Dimensionen d, $\overline{d}$ herangezogen, daß $d + \overline{d} + 2 = 0$ wird. Dann lehrt eine arithmetische Hilfsbetrachtung, daß zwischen den bez. Anzahlen m, $\overline{m}$ die Relation $m + \overline{m} + l = q$ besteht, wo q die Anzahl der parabolischen Multiplikatoren $\mu_i = 1$ ist (§ 13). Die Anzahl m der Pole einer φ_d bei gegebenen μ_k und d genügt der Ungleichung $\frac{d}{\nu} \geqq m \geqq \frac{d}{\nu} - \sum\left(1 - \frac{l}{l_k}\right)$, aus der sich eine Reihe von Folgerungen ziehen läßt (§ 14).

Insbesondere ist für die *ganzen*, d. i. polfreien φ_d die Dimension d negativ. Für $d \leqq -2$ sind Formen φ_d mit der Minimalzahl von Null-

punkten und Polen entweder einpolig oder ganz; nur die eigentlichen φ_d mit $d = -2$ ohne parabolische Erzeugende sind mindestens zweipolig.

Die in der obigen Produktdarstellung von φ_d auftretende Form R_m hat einen Zähler von der Dimension $\tau = m + \sigma$. Sind also die μ_k, d und σ Pole 1. Ordnung beliebig vorgegeben, so muß $m + \sigma \geq 0$ sein, und die allgemeinste Form φ_d läßt sich dann aus $\tau + 1 = m + \sigma + 1$ partikulären Formen linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aufbauen (§ 14). Jetzt werden auch die polymorphen Funktionen $\zeta = f(z)$, zunächst für Hauptfunktionen $z = \varphi(\zeta)$ mittels binärer („erlaubter“) Variabeln z_1, z_2 homogen gemacht (§ 15).

Der obige Ausdruck für die Primform z_2 liefert sofort die Spaltung von $\zeta = f(z)$ in $\zeta_1 = f_1(z_1, z_2)$, $\zeta_2 = f_2(z_1 z_2)$, nämlich:

$$\zeta_1 = C\frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}\, z_2 \prod_1^n (z, e_k)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_k}\right)}, \quad \zeta_2 = C\frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}\, z_2 \prod_1^n (z, e_k)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_k}\right)},$$

und zwar erhält man so die allgemeinsten ζ_1, ζ_2. Ihre Dimension ist $\lambda = \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{2}\sum\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$, wo $1 - \frac{n}{2} \leq \lambda \leq 1 - \frac{n}{4}$. Dabei entsprechen stets erlaubten Wertepaaren z_1, z_2 erlaubte ζ_1, ζ_2.

Die ζ_1, ζ_2 sind in der z-Ebene nur an den n Stellen e_k verzweigt. Bei einem geschlossenen Umlaufe von z_1, z_2 gehen die ζ_1, ζ_2 über in $\zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2$, $\zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma$ eine Einheitswurzel ist. Bei Umläufen um die e_k finden Besonderheiten statt. Oft ist es nach *Riemann* zweckmäßig, an Stelle der ζ_1, ζ_2 die Ausdrücke nullter Dimension $Z_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}$, $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}$ zu benützen, die sich unimodular substituieren. Übrigens entsprechen hier erlaubten z_1, z_2 nicht immer erlaubte Z_1, Z_2. Die einzelne Form Z der Schar $AZ_1 + BZ_2$ deckt sich mit der *„Riemannschen P-Funktion“*.

Die polymorphen Formen einer linearen Schar befriedigen eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (§ 17). Durch zweimalige Differentiation von $Z = AZ_1 + BZ_2$ und Elimination der A, B gewinnt man für die Form Z eine Differentialgleichung der Form: $Z'' + R(z)\,Z = 0$, wo $R(z)$ eine gewisse rationale Funktion von z ist. Die Funktion $H = Z\Phi(z)$, wo $\Phi(z)$ eine geeignete Funktion von z ist, führt zur *Schwarz*schen Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (§ 17).

Geht man nunmehr zu den polymorphen Formen ζ_1, ζ_2 und ihrer Schar $f = A\zeta_1 + B\zeta_2$ über, so läuft die Ausübung von S: $z_1' = az_1 + bz_2$, $z_2' = cz_1 + dz_2$ nur auf eine andere Auswahl der Hauptfunktionen hinaus; die Gleichberechtigung der letzteren hat also zur Folge, daß die Theorie der ζ_1, ζ_2 gegenüber den S den Charakter der *Invarianz* besitzt. Es wird somit möglich sein, die Differentialgleichung für f durch kovariante Bildungen (Überschiebungen) darzustellen (§ 18). Hierbei ist die ν^{te} *Überschiebung*

für zwei beliebige, algebraische, oder transcendente Formen φ, ψ zu erklären durch:

$$(\varphi, \psi)_\nu = \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial z_1^\nu} \frac{\partial^\nu \psi}{\partial z_2^\nu} - \binom{\nu}{1} \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial z_1^{\nu-1} \partial z_2} \cdot \frac{\partial^\nu \psi}{\partial z_2^{\nu-1} \partial z_1} + - \cdots$$

Die Differentialgleichung für f nimmt dann die Gestalt an:

$$(f, u)_2 + (f, v)_1 + (f, w)_0 = 0,$$

bezüglich deren man die vorbereitenden Entwickelungen von Hilbert, Pick, Klein und Waelsch vergleiche.

Von hier aus lassen sich für polymorphe Formen Potenzreihenentwickelungen nach z, wie auch bestimmte Integrale aufstellen. Es wird das für den niedersten Fall $n = 3$, der sich mit der Lehre von den hypergeometrischen Reihen deckt, ausgeführt (§ 19, 20).

Die Theorie der Poincaréschen Reihen (Kap. III) stützt sich im wesentlichen auf Poincaré selbst, knüpft indessen vielfach gleich an ein automorphes Gebilde von beliebigem Geschlecht p an. Bei einer eindeutigen automorphen Form $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ (für die also d ganzzahlig ist) wird die *Eindeutigkeit* auch für beliebiges p dadurch definiert, daß der Multiplikator μ gegenüber einer U von der Anzahl des Weges unabhängig ist. Dann gilt, wie früher, der wichtige Satz, daß, wenn μ_i zu U_i, μ_k zu U_k gehört, sowohl zu $U_i\, U_k$, als zu $U_k\, U_i$ der Multiplikator $\mu_i \mu_k$ gehört.

Ist $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ eine homogene rationale Funktion der Dimension d, so wird als *Poincaré*sche *Reihe* angesetzt (§. 1):

$$\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k \mu_k^{-1} H_d(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}) = \sum_k \mu_k^{-1} H_d(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2),$$

summiert über alle U_k von Γ. Von den Polen von H_d soll keiner mit einem Grenzpunkte von Γ zusammenfallen.

Es handelt sich vor allem um den Nachweis der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz obiger Reihe in der Umgebung einer beliebigen Stelle ζ_0 von N (wenn man von einer endlichen Anzahl von Gliedern, die in ζ_0 polar unstetig werden, absieht). Ist dieser Nachweis einmal erbracht, so ist leicht zu zeigen, daß die Reihe eine eindeutige automorphe Form φ_d bei vorgeschriebenem Multiplikatorsystem M und gegebener Dimension d liefert.

Will man die Reihe in nicht homogener Gestalt verwenden, so setze man:

$$H_d(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2^d H_d(\zeta, 1) = \zeta_2^d H(\zeta),$$

dann geht $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ über in:

$$\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2^d \sum_k \mu_k^{-1} H\left(\frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k}\right) (\gamma_k \zeta + \delta_k)^d,$$

zu summieren über alle V_k der nicht homogenen Gruppe Γ. Von hier aus gelangt man durch Weglassung von ζ_2^d, durch Spezialisierung für ein gerades $d = -2m$ und für das Multiplikatorsystem $M_0 = 1$ zur Poincaréschen *Θ-Funktion* $\Theta(\zeta)$:

$$\Theta(\zeta) = \sum_k H\left(\frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k}\right) (\gamma_k \zeta + \delta_k)^{-2m}.$$

Aus der Definition $\varphi(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ folgt sofort:

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = (\gamma_i\zeta + \delta_i)^{2m}\,\Theta(\zeta),$$

sodaß $\Theta(\zeta)$ gegenüber V_i nicht absolut invariant ist, sondern einen von ζ abhängigen Faktor annimmt (§ 1).

Für die Konvergenz der Reihe für $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ werden zwei Beweise gegeben, entsprechend den beiden von Poincaré selbst für Hauptkreisgruppen angewandten Methoden; übrigens sollen alle $|\mu_k|$ den Wert 1 haben.

Im ersten Beweise wird, was erlaubt ist, vorausgesetzt, daß das Netz N wenigstens eine Grenzkurve besitzt. Da die Konvergenz unabhängig von einer linearen Transformation von ζ resp. ζ_1, ζ_2 ist, darf man den Punkt $\zeta = \infty$ außerhalb N annehmen. Es handelt sich dann für eine Stelle innerhalb N um die Konvergenz der Reihe:

$$\sum_k \mu_k^{-1} H(\zeta^{(k)})\,(\gamma_k\zeta + \delta_k)^d = \sum_k \mu_k^{-1} H(\zeta^{(k)}\left(\frac{d\zeta^{(k)}}{d\zeta}\right)^{-\frac{d}{2}}.$$

Zuvörderst wird gezeigt, daß die $|H(\zeta^{(k)})|$ eine angebbare endliche Größe nicht überschreiten. Dadurch wird die Frage auf eine einfachere Reihe reduziert, und deren Konvergenz stützt sich auf die geometrische Tatsache, daß man, den einzelnen Gliedern der Reihe entsprechend, aus N eine gewisse unendliche Anzahl von Teilbereichen, die nicht miteinander kollidieren, herausgreifen kann, daß also die Summe ihrer Inhalte eine endliche ist. Dies findet zunächst für $d = -d' = -4$ statt, um so mehr aber für $d' > 4$. Innerhalb N findet somit für jedes ganzzahlige $d \leqq -4$ unbedingte und gleichmäßige Reihenkonvergenz statt (§ 2). Das Verhalten der Reihe in den parabolischen Spitzen der Polygone bedarf einer ergänzenden Untersuchung. In einer solchen Spitze darf die Reihe keinen wesentlich singulären Punkt aufweisen; die Reihe stellt alsdann eine automorphe Form dar, die daselbst immer einen Nullpunkt besitzt. Bei unbedingter Konvergenz der Reihe gilt das auch noch in den Fällen $d' = 3$ und 2 (§ 3). Die Reihen mit $d = -2$ sind bereits mehrfach untersucht worden. Das Netz N darf dann keine Grenzkurve besitzen.

Bei denjenigen Hauptkreisgruppen, die ein über die ganze Ebene ausgebreitetes Netz N besitzen, sind die Reihen überall in N unbedingt und gleichmäßig konvergent (§ 5).

Auch bei gewissen Gruppen ohne Hauptkreis gilt die Konvergenz (§ 6). Es ist wahrscheinlich, daß jene Reihen noch bei weit mehr Gruppen konvergent sein werden.

Für den Hauptkreisfall wird nach Poincaré eine zweite Konvergenzuntersuchung vorgeführt (§ 7). Hierbei ist von Bedeutung, daß nicht nur das Argument ζ, sondern auch die Moduln der Gruppe Γ als variabel angesehen werden. Ein einzelnes Gebilde dieses „Kontinuums“ kann durch ein System reeller *„Moduln“* $j_1, \ldots, j_\nu$ eindeutig dargestellt werden, zwischen denen sowohl gewisse Gleichungen wie Ungleichungen bestehen. Umgekehrt gehört zu einem einzelnen Modulsystem eine ganze *„Klasse äquivalenter Gruppen“*. Die frühere Theorie der Diskontinuitätsbereiche liefert das wesentliche Beweismittel, daß jeder *stetigen* Abänderung der Moduln eine *stetige*

Abänderung des Fundamentalbereiches entspricht. Das wichtigste Moment des Beweises ist aber nach Poincaré die Einführung der *hyperbolischen* Maßbestimmung für das Innere des Hauptkreises, bei der dessen Punkte die Rolle der unendlich fernen Elemente spielen. Man kann dann wiederum im Innern eines Kreises von angebbarem endlichen Radius den Gliedern der Reihe nirgend mit einander kollidierende Teilbereiche zuordnen, so daß also, wie beim ersten Beweise die Summe der euklidischen Inhalte, jetzt die Summe der hyperbolischen Inhalte jener Bereiche eine endliche ist. Damit läßt sich aber die Reihe unter eine konvergente geometrische Reihe herunterdrücken.

So ergibt sich, daß die Poincaréschen Reihen der Dimension $d < -2$ für alle Hauptkreisgruppen Γ in der Umgebung der repräsentierenden Gruppe Γ_0 und für alle Punkte ζ in der Umgebung eines Anfangswertes ζ_0 unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Durchläuft Γ_0 die ganze Familie von Hauptkreisgruppen, so ändern sich auch die *„algebraischen Moduln"* des automorphen Gebildes stetig, d. s. einmal die Riemannschen Klassenmoduln des zugehörigen algebraischen Gebildes, sodann die *absoluten Invarianten* der den festen Polygonecken entsprechenden Stellen des Gebildes.

Die weitere Untersuchung dreht sich um die Bedingung der Möglichkeit, daß die oben konstruierte, eine automorphe Form der Dimension d und des Multiplikatorsystems M darstellende Reihe *identisch verschwindet* (§ 8) (was in Folge linearer Identitäten zwischen einer Anzahl automorpher Formen eintreten kann). Dies findet indessen sicher nicht statt, wenn die Reihe im Fundamentalbereiche wenigstens *einen* Pol besitzt.

Um daher zu entscheiden, wann eine beliebig gewählte automorphe Form φ_d zulässiger Dimension d (und mit Nullpunkten in den parabolischen Spitzen) durch eine Poincarésche Reihe darstellbar ist, werden die *einpoligen* Reihen in den Mittelpunkt der Untersuchung gestellt (§ 9), wobei gleich Gebilde eines beliebigen Geschlechtes p zu Grunde gelegt werden.

Der beliebig in N vorgeschriebene Pol sei $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Es besitze N zunächst mindestens eine Grenzkurve. Ist dann $H_{d+1}(\zeta_1, \zeta_2)$ eine rationale Form, dessen Pole aufserhalb N liegen, so wird durch $\sum_k \mu_k^{-1} \frac{H_{d+1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}{(\zeta^{(k)}, \xi)}$ für $d \leqq -4$ eine einpolige Reihe der gewünschten Art geliefert; am einfachsten wählt man H_{d+1} als reziproken Wert einer ganzen Form. Bedeckt dagegen N die ganze ζ-Ebene, so hat H_{d+1} sicher Pole innerhalb N. Dann läßt sich aber — mit alleiniger Ausnahme des Falles $d = 2$, $M = 1$ — die Form H so bestimmen, daß sich eben diese Pole beim Summieren der Reihenglieder gerade fortheben. Der Pol ξ darf auch in eine elliptischen Ecke rücken (§ 10). Um dagegen das Verhalten in parabolischen Ecken zu erkennen, bedarf es der Einführung der *Elementarformen*

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2) = \sum \mu_k^{-1} \frac{H_{d+1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}{(\zeta^{(k)}, \xi)\, H_{d+1}(\xi_1, \xi_2)},$$ die aus der obigen Reihe durch Zusatz des von ζ_1, ζ_2 unabhängigen Faktors $\frac{1}{H_{d+1}(\xi_1, \xi_2)}$ hervorgeht.

Bei Annäherung an den Pol ξ gilt die Grenzgleichung: $\lim [(\zeta, \xi)\, \Omega] = 1$. Man gewinnt nun einen größeren Gesichtspunkt, indem man neben ζ_1, ζ_2, auch ξ_1, ξ_2 als *beweglich* in N ansieht: Als Funktion der ξ ist Ω, abgesehen

von gewissen Polen, überall in N eine stetige analytische Form der nichtnegativen Dimension $\bar{d} = -d - 2$ und des inversen Multiplikatorsystems $\bar{M}$. Nunmehr läßt sich die Annäherung von ξ an eine parabolische Spitze verfolgen (§ 12), indem für $\xi_2^{\bar{d}} \Omega$ eine in der Umgebung derselben gleichmäßig konvergente, nach Potenzen von e^{ξ} fortschreitende Entwicklung gewonnen wird.

Übt man jetzt eine Operation U_i von Γ auf die ξ_1, ξ_2 aus, so stellt Ω in gewissen Fällen auch in ξ_1, ξ_2 eine automorphe Form mit $\bar{M}$ dar; für $p = 0$ findet das dann und nur dann statt, wenn $m = -1$ ist.

Indessen werden gerade die Fälle, wo Ω in den ξ *nicht* automorph ist, nach Poincaré die wichtigsten.

Hier läßt sich U_i, wodurch Ω in Ω_i übergehe, so auswählen, daß $\Omega_i - \Omega$ eine polfreie, *nicht identisch verschwindende* Poincarésche Reihe wird, womit ein erstes Beispiel einer solchen Reihe gewonnen ist.

Hieraus folgt für $p = 0$, daß man für jedes mögliche d und M — falls überhaupt ganze automorphe Formen mit Nullpunkten in den parabolischen Spitzen existieren — stets nicht identisch verschwindende polfreie Poincarésche Reihen bilden kann (§ 13).

Wie läßt sich nun eine *beliebige* automorphe Form durch die Ω und damit durch Poincarésche Reihen darstellen? (§ 14)

Sei zunächst (für $p = 0$) eine negative Dimension d vorgelegt. Eine zugehörige $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ habe σ einfache Pole. Man bilde die entsprechenden Elementarformen $\Omega^{(i)}$; dann lassen sich σ Konstante $A^{(i)}$ so auswählen, daß $\varphi_d - \Sigma A^{(i)} \Omega^{(i)}$ polfrei wird. Damit ist φ_d bis auf eine additive ganze automorphe Form durch eine Poincarésche Reihe dargestellt. Analog läßt sich bei nicht negativer Dimension d φ_d durch die Ω als Formen der ξ_1, ξ_2 ausdrücken.

So ergibt sich durch Zusammenfassung der fundamentale Satz, daß jede in etwaigen parabolischen Spitzen verschwindende ganze automorphe Form von Γ durch eine Poincarésche Reihe darstellbar ist. Historisch wird bemerkt, daß die Ω in nicht homogener Gestalt bei Poincaré als „*élément simple*“ auftreten. Ritter hat sie dann formentheoretisch durchgebildet, und seine Theorie haben die Verfasser vereinfacht und weiter entwickelt.

Das vierte Kapitel ist Ausdehnungen auf ein beliebiges Geschlecht p gewidmet. Eine erste Hauptschwierigkeit liegt hier in der Herstellung einer Primform. Eine zu einem algebraischen Gebilde des Geschlechtes p gehörige w-wertige Funktion z werde auf der Riemannschen Fläche F_w studiert. Die Grenzen x, y, wie die Parameter ξ, η des *Normalintegrals* 3. Gattung $\Pi_{\xi,\eta}^{x,y}$ werden je durch eine Linie L, Λ verbunden, die als Integrationsbahnen dienen. Π läßt sich dann in die homogene Gestalt des Doppelintegrals setzen: $\int_y^x \int_\eta^\xi \frac{\Psi(z, z')}{(z, z')^2} (z, dz)(z', dz')$, wo Ψ als Funktion von z und von z' eine algebraische Funktion des Gebildes ist.

Die Kleinsche *Primform* $K(x, y)$ ist definiert durch: $K(x, y) = \sqrt{-(x, dx)(y, dy)\, e^{-\Pi_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}}$ (lim $dx = 0$, $dy = 0$); man hat $\Pi_{\xi,\eta}^{x,y} = \lg \frac{K(x, \xi) . K(y, \eta)}{K(x, \eta) . K(y, \xi)}$. Ritter konstruiert daraus die Primform $P(z, e)$:

$P(z, e) = K(z, e) \sqrt[w]{\frac{z_2}{K(z, \infty_1)\, K(z, \infty_2) \ldots K(z, \infty_w)}}$, die an den w Unendlichkeitsstellen ∞_i je einen Pol 1. Ordnung besitzt, von der Dimension $\frac{1}{w}$ ist, überall stetig ist, und nur an der einen willkürlichen Stelle e einen Nullpunkt aufweist. Nicht nur die Periodizitätseigenschaften dieser *Ritterschen Primform* sind besonders einfach, sondern auch ihr Verhalten (sogar das von $\lg P(z, e)$) gegenüber geschlossenen Umläufen der Stelle x.

Sodann werden die polymorphen Formen untersucht. $\zeta = f(z)$ ist auf F_w eine polymorphe Funktion; die Formen $Z_1 = \zeta : \sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}$, $Z_2 = 1 : \sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}$ des Kap. II substituieren sich bei Umläufen von z unimodular, genügen aber noch nicht der Forderung, bei beliebigen Wegen stets „erlaubte" Wertepaare zu sein.

Das Differential dz hat an jeder Stelle ∞ von F_w einen Pol 2. Ordnung, und in jedem k_i-blättrigen Verzweigungspunkt v_i einen Nullpunkt der Ordnung $(k_i - 1)$. Die davon herrührenden gemeinsamen Pole und Nullpunkte von Z_1, Z_2 sind als zufällige wieder zu entfernen. Man führe daher anstatt dz das „überall endliche und nicht verschwindende" Differential dw_z von der Dimension $2 - 2p$ ein: $dw_z = (z, d_z) : P(z, v_1)^{k_1 - 1} \cdot P(z, v_2)^{k_2 - 1} \ldots$. Dann gewinnt man (§ 3) in

$$\zeta_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dw_z}}} \prod_1^n P(z, e_k)^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dw_z}}} \prod_1^n P(z, e_k)^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)}$$

zwei Formen der Dimension $1 - p$, *deren Quotient ζ ist, und die bei erlaubten z_1, z_2 stets nur erlaubte Werte annehmen.* Dabei hatte $d\zeta$ in e_k nach Kap. I einen Pol der Ordnung $\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$. Für $p = 0$ gehen jene Formen in die von Kap. II über.

Der Quotient $\frac{\zeta_1}{Z_1} = \frac{\zeta_2}{Z_2}$ reproduziert sich gegenüber Umläufen von z bis auf einen von z_1, z_2 unabhängigen Faktor und stellt nach Ritter eine *multiplikative* Form dar. Daher substituieren sich z_1, z_2 nunmehr mit einer — für jeden Umlauf konstanten — Determinante τ^2.

Will man ζ auf die allgemeinste Art in zwei polymorphe Formen mit den obigen Eigenschaften spalten, so hat man den Ausdrücken für ζ_1, ζ_2 noch einen Exponentialfaktor $e^{c_0 + c_1 W_1 + \cdots + c_p W_p}$ hinzuzufügen, wo die W ein System von überall auf F_w endlichen Normalintegralen bilden und die c arbiträre Konstante sind (§ 3).

Die Funktion $\zeta(z)$ genügte (Kap. I) einer Differentialgleichung 3. Ordnung $[\zeta]_z = 2R(s, z)$, wo $[\zeta]_z$ der Schwarzsche Differentialausdruck war, R eine gewisse auf F_w algebraische Funktion. Bestimmt man die Wertigkeit, d. i. die Anzahl der Pole von $[\zeta]_z$, so ergibt sich mittels einer bekannten Zusammenhangsrelation die Anzahl der *accessorischen* Parameter in der Differentialgleichung, d. i. der durch die Pole und die bei $z = \infty$ gelegenen Nullpunkte von R noch nicht bestimmten, zu $n + 3p - 3$.

Für die polymorphen Formen ergaben sich in Kap. II lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, die man in invariante Gestalt setzen konnte. Das

findet ebenso für beliebiges p statt und wird an 3 charakteristischen Typen explicite durchgeführt.

Es handelt sich nunmehr um die Darstellung aller unverzweigten automorphen Formen $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ von Γ durch Prim- und Grundformen. Nahm eine φ_d (Kap. II) gegenüber einer homogenen unimodularen Substitution von Γ einen konstanten Faktor p an, so erweitert sich dieser bei der obigen nicht-unimodularen Substitution zu $\mu\tau^d$. Dies ermöglicht die Benutzung der ζ_1, ζ_2 des § 3 als Argumente; φ_d wird dann eine auf F_w multiplikative Form, die frei von wesentlich singulären Stellen und nur an den n Stellen e_k verzweigt ist. Aber auch umgekehrt liefert irgend eine, wie φ_d verzweigte multiplikative Form auf F_w als Funktion der ζ_1, ζ_2 eine unverzweigte automorphe Form von Γ.

Daraufhin lassen sich die φ_d in allgemeinster Weise durch Primformen ausdrücken und so völlig übersehen. Eine Primform $\varphi_v = e^{c_0 + c_1 W_1 + \cdots + c_p W_p} P(z, x)$ ist, wie für $p = 0$ (Kap. II), eine unverzweigte polfreie Form mit nur einem Nullpunkt 1. Ordnung, die als *„Grundform"* für elliptische und parabolische Ecken noch geeignet zu modifizieren ist. Dann hat man

$$\varphi_d = e^{c_0 + c_1 W_1 + \cdots + c_p W_p} \frac{P(z, x_1), \cdots, P(z, x_t)}{P(z, y_1), \cdots, P(z, y_s)} \prod_1^n P(z, e_k)^{\frac{m_k}{l_k}},$$

und umgekehrt liefert ein Ausdruck von der Gestalt der rechten Seite stets eine unverzweigte φ_d (§ 5).

Eine *eindeutige* φ_d (Kap. II) ist auch jetzt eine solche, für die der Faktor μ (gegenüber einer Substitution U) von der Wahl des Weges unabhängig ist. Den Relationen zwischen den $n + 2p$ Erzeugenden von Γ korrespondieren Gleichungen zwischen den n *„Verzweigungsmultiplikatoren"* und $2p$ *„Periodenmultiplikatoren"*. Wie in Kap. III zeigt sich, wie zu jedem theoretisch möglichen Multiplikatorsystem M von Γ und zu jeder Dimension d eindeutige automorphe Formen φ_d gehören (§ 7).

Unter den eigentlich automorphen Formen $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ sind die „ganzen" Φ_{-2} wichtig. In $W(\zeta) = \int \Phi_{-2} \cdot (\zeta, d\zeta)$ gewinnt man ein zum automorphen Gebilde gehörendes Integral 1. Gattung, und umgekehrt. Mithin gibt es p linear unabhängige solcher Φ_{-2}.

„Allgemeiner gibt es für jede Form φ_d nicht-negativer Dimension mit s Polen $m + s - p + \sigma + 1$ linear unabhängige mit gleichen d und M; σ bedeutet die Anzahl linear unabhänger Φ_{-2}, die in den Nullpunkten einer dieser Formen zugleich verschwinden" (§ 8).

Dieser Satz läßt sich auf Grund der *konjugierten* Formen $\varphi_d, \psi_{\bar{d}}$, d. i. solcher mit inversen Systemen $M, \bar{M}$ und zugehörigen Dimensionen $d, \bar{d}$ — die Beziehungen des Kap. II bleiben auch jetzt im wesentlichen bestehen — weiter verfolgen. Hat $\psi_{\bar{d}}$ $\bar{s}$ Pole, so läßt sich σ auch erklären als die Anzahl der linear unabhängigen zu $\psi_{\bar{d}}$ konjugierten Formen φ_d, die in jenen $\bar{s}$ Polen zugleich verschwinden. Damit geht der obige Satz in den *erweiterten Riemann-Roch*schen *Satz* über, der für $\bar{d} = 0$, $\bar{M} = 1$ in den gewöhnlichen übergeht (§ 9). Der Satz gestattet u. a. die Bestimmung der Mindestanzahl frei beweglicher Pole einer automorphen Form φ_d. Damit ist die Lehre der Formen φ_d, wie der polymorphen Formen nach dem Vorgange von Ritter bis zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Es erübrigt noch die Ausdehnung der Poincaréschen Reihen und Elementarformen des Kap. III auf beliebiges p. Die Konvergenzbeweise galten zwar für jedes p, waren aber an die Beschränkung $|\mu_i| = 1$ gebunden. Es sind daher zunächst nur *unimultiplikative* Formen φ_d, d. s. solche, für die alle Multiplikatoren den Betrag 1 haben, durch Poincarésche Reihen darstellbar. Indessen läßt sich jede eindeutige φ_d durch Multiplikation mit einem Faktor $e^{c_1 W_1 + \cdots + c_p W_p}$, wo die c eindeutig bestimmt sind, in eine unimultiplikative verwandeln. Wie in Kap. III wird bewiesen, daß bei allen möglichen $d \leqq -2$ und zugehörigen M polfreie, nicht identisch verschwindende Poincarésche Reihen existieren. Eine Ausnahme bildet wieder der Fall $d = -2$, $M = 1$; um auch diesen zu erledigen, werden die eigentlich automorphen *zweipoligen* Reihen der Dimension -2 herangezogen (§ 11), die zugleich zu Reihendarstellungen der Integrale der drei Gattungen und zu Produktdarstellungen der Primformen führen. Es liegen hier Arbeiten von Riemann, Schottky, Weber, W. Burnside vor. Zu Grunde gelegt wird die in die ζ und ξ symmetrische Normalform $\Psi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2) = \sum\limits_k \frac{1}{(\zeta^{(k)}, \xi)^2}\cdot$ Das Integral $\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \Psi \cdot (\xi, d\xi) =$ $Y(\zeta_1, \zeta_2; \xi, \xi_0)$ ist durch die Poincarésche Reihe $-\sum\limits_k \frac{(\xi, \xi_0)}{(\zeta^{(k)}, \xi)(\zeta^{(k)}, \xi_0)}$ darstellbar. Y als Funktion von ξ ist ein einpoliges Integral 2. Gattung, dessen Perioden Formen Φ_{-2} sind. In $J(\zeta, \zeta_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) \cdot (\zeta, d\zeta)$ $= -\sum\limits_k \lg \frac{(\zeta^{(k)}, \xi_0)(\zeta_0^{(k)}, \xi_0^{(i)})}{(\zeta_0^{(k)}, \xi_0)(\zeta^{(k)}, \xi_0^{(i)})}$ ensteht ein Integral 1. Gattung, wo der Index i einer geeigneten Substitution U_i entspricht, und endlich in $Q(\zeta, \zeta_0; \xi, \xi_0) =$ $= \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} Y \cdot (\zeta, d\zeta) = \sum\limits_k \lg \frac{(\zeta^{(k)}, \xi)(\zeta_0^{(k)}, \xi_0)}{(\zeta^{(k)}, \xi_0)(\zeta_0^{(k)}, \xi)}$ ein Integral 3. Gattung mit den logarithmischen Polen ξ und ξ_0.

Von Q aus gelangt man zur *Schottkyschen Primform* $E(\zeta, \zeta_0) =$

$$\lim_{\xi = \zeta,\, \xi_0 = \zeta_0} \sqrt{-(\zeta - \xi)(\zeta_0 - \xi_0) e^{-Q(\zeta, \zeta_0; \xi, \xi_0)}} = (\zeta - \zeta_0) \prod_k \frac{(\zeta - \zeta_0^{(k)})(\zeta_0 - \zeta^{(k)})}{(\zeta - \zeta^{(k)})(\zeta_0 - \zeta_0^{(k)})}\cdot$$

womit die Darstellung der φ_d durch unendliche Produkte ermöglicht wird, Schließlich liefern analoge Entwickelungen, wie die in Kap. III, die Beantwortung der Frage, welche (unimultiplikativen) Formen φ_d für $p > 0$ durch Poincarésche Reihen darstellbar sind; es sind das, wie zu erwarten war, genau die in den parabolischen Ecken verschwindenden.

Es folgen noch Bemerkungen über die *praktische* Brauchbarkeit der analytischen Darstellungen zur Berechnung der Funktionswerte automorpher und polymorpher Funktionen und Formen (§ 14).

Eine eingehendere kritische Würdigung des Buches behalten wir uns bis nach dem Erscheinen der zweiten Lieferung des Werkes vor, und lassen vorderhand die im Obigen skizzierten bisherigen Ergebnisse für sich sprechen.

Königsberg, i. Pr. W. Fr. Meyer.

Günther, Siegmund. Astronomische Geographie. Leipzig 1902, G. J. Göschen. 170 S. Preis 0,80 *M*.

Dieses trotz seines geringen Umfanges sehr reichhaltige Buch wird jedem förderlich sein, der auf dem Gebiete der mathematischen Erdkunde eine erste Orientierung wünscht. Die beigegebenen historischen Notizen und das gute Register lassen es auch dem weiter Fortgeschrittenen nützlich erscheinen. Daß das engere Gebiet der Erdkunde in den letzten Kapiteln verlassen, die Entfernung der Himmelskörper, die Weltsysteme, die Gesetze der Planetenbewegung und das Gravitationsgesetz in seinen Anwendungen auf Himmel und Erde in die Betrachtung gezogen wird, machen das Buch noch empfehlenswerter. Dagegen erscheint es uns nicht verständlich, warum der Verfasser den für die Bestimmungen der geographischen Längen ja den unumgängigen Ausgangspunkt bildenden Zeitbestimmungen keine Berücksichtigung hat zu teil werden lassen; er erweckt bei jedem Anfänger den Schein, als ob die einzigen Zeitbeobachtungen, die er anführt, nämlich diejenigen mit der Sonnenuhr, genügend seien, um den Gang eines Chronometers zu kontrolieren (!).

Charlottenburg. H. Samter.

Émile Borel. Leçons sur les séries à termes positifs. Gauthier-Villars, Paris 1902.

Das in der Überschrift genannte Werk ist in derselben geistvollen Weise geschrieben, wie die vorangehenden des Herrn Verfassers. Es ist aus zwanzig Vorlesungen entstanden, die derselbe an dem „Collège de France" in der Zeit 1900—1901 gehalten hat, und von einem der Zuhörer, Herrn d'Adhémar, redigiert worden. Wie schon aus der kurzen Zahl der Vorlesungen ersichtlich ist, liegt es nicht in der Absicht von Herrn Borel, eine umfassende und in sich abgeschlossene Theorie der unendlichen Reihen mit lauter positiven Gliedern zu geben; es wird vielmehr das Hauptgewicht darauf gelegt, eine Anzahl besonders wichtiger Probleme über dieselben dem Leser vorzuführen.

Das Werk zerfällt in sechs Kapitel, deren wesentlicher Inhalt kurz folgendermaßen dargestellt werden möge.

Im ersten Kapitel werden vor allem die Bertrandschen Konvergenzkriterien in Bezug auf ihre Bedeutung für die Reihenlehre untersucht. Herr Borel faßt seine Resultate in den Worten etwa zusammen „die Bertrandschen Kriterien genügen nicht absolut, aber für den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft" — eine Anschauung, die angesichts der neuesten glücklichen Entwicklung der Konvergenztheorie, insbesondere durch die Arbeiten von Herrn Pringsheim, als einwandfrei nicht bezeichnet werden kann.

Das zweite Kapitel behandelt die Konvergenz und Divergenz bestimmter Integrale. Es wird gezeigt, daß hier dieselben Schwierigkeiten vorliegen, wie bei den unendlichen Reihen.

In beiden Kapiteln zeigt sich die Art des Wachsens von Funktionen von Bedeutung. Diese überaus wichtige und einschneidende Frage wird im dritten Kapitel besprochen. Es wird ein reguläres und irreguläres Wachsen unterschieden und auf das erstere tiefer eingegangen. Von dieser Theorie werden im fünften Kapitel im Anschluß an neuere Arbeiten der

Herren Borel, Hadamard, le Roy und Poincaré einige Anwendungen auf die Theorie der Potenzreihen gemacht, Anwendungen, deren Zweck es ist, die Theorie der analytischen Funktionen, wie sie in Deutschland durch Weierstraß begründet wurde, weiter fortzuführen. Es werden zunächst ganze transcendente Funktionen untersucht und Schlüsse aus der Art des Wachsens der Koeffizienten auf die Art des Wachsens der Funktion gemacht und umgekehrt. Sodann wird ein endlicher Konvergenzradius gewählt und das Wachsen der Potenzreihen bei der Annäherung an einen singulären Punkt in Betracht gezogen.

Das vierte und sechste Kapitel enthält ähnliche Untersuchungen aus der Theorie der mehrfach unendlichen Reihen und der vielfachen Integrale.

Dresden. M. Krause.

Gino Loria. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro IV. **Il periodo argenteo della geometria Greca.** 78 p. Libro V (ultimo) **L'aritmetica dei Greci.** 182 p. Modena 1900 und 1902. Estratto del Vol. XII, Ser. II delle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Sezione di Scienze.

War das 1. Buch von Lorias umfassendem Werke den Vorgängern Euklids, das 2. Buch dem euklidischen Jahrhundert als der goldenen Zeit griechischer Geometrie, das 3. Buch den Schriftstellern gewidmet, deren Arbeiten in näherer oder entfernterer Beziehung zur Astronomie standen, so erzählt das 4. Buch von der silbernen Zeit der griechischen Geometrie, das 5. Buch von der griechischen Arithmetik.

Im 4. Buche unterscheidet Herr Loria wieder drei Gattungen von Schriftstellern, solche, welche ihre Aufgabe in der Ausfüllung von Lücken sahen, über die der Eilschritt des goldenen Zeitalters hinausgestürmt war, solche, welche als Kommentatoren ihrer Vorgänger im mathematischen Sinne erscheinen, solche endlich, welche, mit Philosophie und Methodik vertraut, ihre Vorgänger nach dieser Seite hin zu ergänzen und zu vervollkommnen suchten. Freilich ist es mit solchen Unterscheidungen einigermaßen übel bestellt. Die nach einander lebenden Schriftsteller halten sich nicht an die ihnen programmgemäß zufallende Tätigkeit, und so gehörte z. B. Geminos, der erste, von welchem die Rede ist, vorzugsweise der dritten Gruppe an; Theon von Smyrna, als zweiter behandelt, scheint unserem Dafürhalten nach besser dem 5. Buche vorbehalten, wo er auch tatsächlich wieder auftritt: erst der dritte Pappos erscheint an systematisch berechtigter Stelle. Herr Loria hat die Sammlungen des Pappos mit der ganzen Ausführlichkeit dargestellt, die ihnen gebührt, hat dabei in Anmerkungen auf Beziehungen zu neueren und neusten Forschungen hingewiesen. Nun kommen die Neu-Platoniker an die Reihe, insbesondere Proklos. Die wichtige Frage, ob Proklos die von ihm gegebene Zusage, auch spätere Bücher des Euklid zu erläutern, erfüllt habe oder nicht, berührt Herr Loria selbstverständlich, weiß aber auch keine bestimmte Antwort zu erteilen. Eutokios folgt und am Schlusse noch Serenos. Nicht als ob die Lebenszeit des Serenos von Antinoeia so spät angesetzt werden müßte, den Ausschlag gab vielmehr der Umstand, daß die Lebenszeit dieses Mathematikers eine so sehr unbestimmbare ist.

Das 5. Buch erzählt, wie wir oben sagten, von der griechischen Arithmetik und wird dieser Aufgabe in 6 Kapiteln gerecht, deren Überschriften folgende sind: I. Die griechische Logistik. II. Die Arithmetik in der Schule des Pythagoras. III. Die Arithmetik in der Akademie. IV. Neu-Pythagoreer und Neu-Platoniker. V. Diophant. VI. Arithmetische Scherzaufgaben der Griechen. Die Überschriften der Kapitel lassen bereits erkennen, daß, wie das ganze 5. Buch aus dem Rahmen chronologischer Begrenzung heraustritt, auch die einzelnen Kapitel dem Leser Zeitsprünge durch die verschiedensten Jahrhunderte keineswegs ersparen. Es ist fast überflüssig, besonders zu betonen, daß Herr Loria auch in dem 5. Buche, wie in dem 4., wie in den vorhergehenden, mit größtem Fleiße alle vorhandenen Vorarbeiten bis zu den neusten zusammenzusuchen und zu verwerten gewußt hat. Er hat damit ein Nachschlagebuch geschaffen, welches man gern benutzen wird, und in welchem man bezüglich der zahlreichen noch immer offenen Streitfragen wenigstens die einander entgegenstehenden Meinungen angeführt finden wird nebst der Angabe derjenigen Schriften, welche die eine oder die andere Meinung zu verteidigen sich bestreben.

Heidelberg. M. Cantor.

H. Kayser. Lehrbuch der Physik für Studierende. Dritte verbesserte Auflage. gr. 8. X u. 584 S. mit 336 Abbildungen. Stuttgart 1900, Ferdinand Enke.

Unter den Werken, die sich in hervorragendem Maße dazu eignen, den Anfänger in die physikalische Wissenschaft einzuführen, steht das Kaysersche Lehrbuch in der vordersten Reihe. Dasselbe zeichnet sich zunächst durch die Art der Darstellung aus, in welcher sich strengste Präzision mit einer gefälligen Form des Ausdrucks vereinigt.

Die Anordnung des gesamten Stoffes stimmt mit der üblichen Methodik überein. In sieben Abschnitten werden die Mechanik, die allgemeine Physik der Ponderabilien, die Lehre von der Wärme, Wellenbewegung und Akustik, Magnetismus, Elektrizität und endlich die Optik behandelt. In einem besonderen Schlußkapitel der Optik werden die Beziehungen zwischen Licht, Elektrizität und Magnetismus auseinandergesetzt. Die jüngste, dritte Auflage ist wieder durch Aufnahme einiger neuen Forschungsergebnisse, namentlich auf dem Gebiete der physikalischen Chemie und der Elektrizität erweitert worden.

Wie in den meisten Lehrbüchern der Physik, so wird auch in dem vorliegenden die Wärmestrahlung zum Teil in der Wärmelehre, zum Teil in der Optik besprochen. Dieses Verfahren hat aber zur Folge, daß eng zusammengehörige Dinge auseinandergerissen und Wiederholungen unvermeidlich werden. Zweckmäßiger wäre es daher, das ebengenannte Kapitel in Zukunft vollständig in die Optik aufzunehmen, so daß die Lehre von der Strahlung in größerer Einheitlichkeit behandelt werden könnte. Die diesbezüglichen Abschnitte des Kayserschen Buches lassen auch in den Einzelheiten einige Abänderungen wünschenswert erscheinen. So sollte nicht verschwiegen werden, daß das Stefansche Gesetz nur für den absolut schwarzen Körper strenge Gültigkeit besitzt. Dagegen könnte das sogenannte Drapersche Gesetz, welches, wie man weiß, den Tatsachen keineswegs ent-

spricht, und seine bekannte — fehlerhafte — Ableitung gänzlich fortgelassen werden. Die Daten über Strahlenabsorption wären besser solchen Arbeiten der neueren Literatur zu entnehmen, aus denen sich erkennen läßt, auf welche Spektralgebiete sich die betreffenden Messungen beziehen. Irrtümlich ist die Angabe: „Hartgummi läßt größere Wellen als $700 \mu\mu$ vollständig hindurch". Nicht ganz einwandsfrei sind die Auseinandersetzungen über die Eigenschaften der Funktion e (Emission des absolut schwarzen Körpers). Nur wenn die Temperatur bis auf den absoluten Nullpunkt herabgesunken ist — dann aber für sämtliche Wellenlängen — wird e gleich Null. Um den Anfänger die Wesensgleichheit zwischen Licht und strahlender Wärme recht eindringlich vor Augen zu führen, sollte noch ausdrücklich betont werden, daß auch die dem sichtbaren und ultravioletten Spektrum angehörende Strahlungsenergie sich durch Absorption vollständig in Wärme verwandeln lasse.

In dem Abschnitte über Elektrizität werden die absoluten Maßeinheiten erst ganz zum Schlusse besprochen. Ist auch die an jenem Orte gegebene Zusammenstellung recht übersichtlich, so erscheint es doch unzweckmäßig, bei der Darstellung der elektrischen Ercheinungen in den vorhergehenden Kapiteln durchweg die veralteten Einheiten — Jacobi, Siemens, Daniell — beizubehalten.

Aus der Hertzschen Abhandlung „über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen", in welcher die Geschwindigkeit elektrischer Wellen, die sich längs Drähten ausbreiten, bestimmt wurde, ist vom Verfasser die Angabe entnommen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen hoher Frequenz „im" Kupfer 200 000 km/sec betrage. Bekanntlich hat aber Hertz selbst dieses Bebobachtungsresultat später als fehlerhaft erklärt und die weiteren Untersuchungen von Sarasin und de la Rive u. a. haben — in Übereinstimmung mit den Forderungen der Theorie — die Gleichheit der Geschwindigkeiten an Drähten und in freier Luft (300 000 km/sec) erwiesen.

Am Schlusse der Besprechung der Hertzschen Versuche bemerkt der Verfasser, daß „unsere Kenntnisse über das Wesen der Elektrizität bisher noch gleich Null" sind. Referent vermag den erkenntnistheoretischen Standpunkt, der in diesem Satze zum Ausdruck kommt, nicht zu teilen. Mach hat gelegentlich auf jene Bemerkung, die ja sehr häufig in der Literatur zu finden ist, die Antwort gegeben: „Was denn soll die Elektrizität anderes sein, als der Inbegriff der betreffenden zusammengehörigen Tatsachen?" Fürwahr, unser Wissen ist auf dem Felde der elektrischen Phänomene im Grunde keineswegs anders geartet als auf irgend einem der übrigen Erscheinungsgebiete. —

Es sei noch gestattet, auf einige kleine Irrtümer aufmerksam zu machen, die in einer späteren Auflage des Buches zu berichtigen wären. Die elektromotorische Kraft des Clark-Elementes ist mit 1,07 Daniell zu niedrig angegeben worden; sie beträgt in Wahrheit 1,28 Daniell = 1,433 Volt. Die ganze Wellenlänge der elektrischen Oscillationen, mit denen Hertz in seinen berühmten Versuchen gearbeitet hat, betrug 66 cm, nicht 33 cm. Der Name Oersted ist ohne t zu schreiben, während der Erfinder der Influenzmaschine, Holtz, auf diesen Buchstaben Anspruch erheben darf.

Die Lektüre des vorliegenden Werkes setzt keine Kenntnis höherer Mathematik voraus; elementarmathematische Entwickelungen werden dagegen

vielfach herangezogen, wo dieselben zur Vertiefung des Verständnisses wesentlich beitragen. Dieser Verzicht auf tunlichste Beschränkung des mathematischen Ausdrucksmittels, wie sie in der Mehrzahl der elementaren Kompendien geübt zu werden pflegt, kommt auch der Reichhaltigkeit des dargebotenen Stoffes erheblich zu statten. So findet man z. B. — um nur einen Punkt herauszugreifen — im Anschluß an die Hauptsätze der kinetischen Gastheorie die Ableitung der van der Waalsschen Zustandsgleichung. Mit Recht werden insbesondere auch die Erscheinungen der Interferenz und Polarisation des Lichtes an der Hand der Schwingungsformeln erläutert. Gerade diesen Phänomenen gegenüber verhilft eine rein experimentelle Behandlung erfahrungsgemäß nur zu einem sehr mangelhaften Verständnis, während die nachträgliche Bekanntschaft mit der mathematischen Theorie dann wie eine Offenbarung zu wirken pflegt.

Mußte auch in den vorhergehenden Bemerkungen auf einige Mängel des Buches hingewiesen werden, so betrafen dieselben doch nur Einzelheiten; der Gesamteindruck bleibt ein vorzüglicher. Dasselbe kann daher allen denen, die in das Gebiet der Physik einzudringen wünschen, als ein zuverlässiger Führer aufs wärmste empfohlen werden. Durch das Studium dieses Werkes wird der ernste Leser sich nicht allein mit dem dargebotenen Stoffe vertraut machen, sondern auch eine strenge Schulung seines physikalischen Denkens erfahren.

Berlin. E. Aschkinass.

H. Andoyer. Théorie de la Lune. 86 S. Paris, C. Naud. 1902.

Die vorliegende Schrift behandelt die mathematische Theorie der Mondbewegung. Das Buch bildet den siebzehnten Band der mathematisch-physikalischen Serie in der Sammlung von Monographien, welche unter dem Gesamttitel „Scientia“ im Verlage von C. Naud in Paris erscheint. Der Verfasser entwickelt in sechs Kapiteln die allgemeinen Gleichungen des Problems; von einer Spezialisierung derselben behufs Berechnung von Mondtafeln wird abgesehen.

Berlin. E. Aschkinass.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

80. Bekanntlich kann man das *einschalige Hyperboloid* und das *hyperbolische Paraboloid* auf zwei Arten durch Bewegung einer Geraden erzeugen. Fragt man umgekehrt nach den *Flächen, die zwei Scharen erzeugender Geraden besitzen*, so liegt folgender Ansatz nahe. Wählt man als die eine Gaußsche Koordinate die von irgend einer Kurve ab gezählte Länge u auf den erzeugenden Geraden der ersten Schar, so sind die Cartesischen Koordinaten x, y, z *ganze lineare* Funktionen von u. Besitzt die Fläche zwei Scharen erzeugender Geraden, so werden also, wenn v die auf den Geraden der zweiten Schar gezählte Länge bezeichnet, x, y, z *ganze lineare* Funktionen sowohl von u als auch von v werden, mithin hat man:

$$x = a_1 uv + b_1 u + c_1 v + d_1,$$
$$y = a_2 uv + b_2 u + c_2 v + d_2,$$
$$z = a_3 uv + b_3 u + c_3 v + d_3.$$

Hieraus folgt:

$$uv = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1,$$
$$u = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2,$$
$$v = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3,$$

sodaß die Gleichung der gesuchten Fläche lautet:

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1.$$

Diese Gleichung stellt aber augenscheinlich nur *hyperbolische Paraboloide* dar, und die *einschaligen Hyperboloide* sind nicht erhalten worden. Folglich muß ein Fehler begangen worden sein. *Wo steckt der Fehler?*

Kiel. P. Stäckel.

---

81. Etant donnée une ellipse d'axes $2a$ et $2b$, si on considère tous les rayons vecteurs focaux joignant un point M de l'ellipse à l'un de ses foyers F, les perpendiculaires élevées en M à MF enveloppent une courbe[1]) ayant pour aire $\frac{\pi a}{2b}(3b^2 - a^2)$.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

1) Cette courbe est l'antipodaire de l'ellipse par rapport à l'un de ses foyers.

82. Etant donnée une lemniscate de Bernoulli de centre O et de sommets S et S', par un point M quelconque de la courbe on mène deux droites inclinées à 45^0 sur OM. Ces droites rencontrent l'axe en A et B. Montrer que les points A et B variables sont conjugués harmoniques par rapport aux points fixes S et S'.[1])

Constantinople. E. N. BARISIEN.

---

83. Zieht man durch den Lemoineschen Punkt (K) gegen eine jede der Dreiecksseiten zwei unter demselben Winkel (ω) geneigte Geraden, so liegen die Schnittpunkte dieser Geraden mit den betreffenden Seiten auf einem Kegelschnitt (k).

Verlängert man die zwei zur Seite a gehörigen Geraden, bis die eine b, die andere c schneidet und ebenso für die beiden anderen Paare, so bekommt man sechs Schnittpunkte, welche auf einem Kegelschnitt (k') liegen.

Wird der Winkel $\omega = 0$, so geht der zugehörige Kegelschnitt (k') in den 1. Lemoineschen Kreis über.

Zieht man auf dieselbe Weise aus K gegen eine jede Seite des Höhenfußpunktendreiecks zwei unter dem Winkel ω geneigte Geraden und bestimmt wie früher die zwei Gruppen der Schnittpunkte auf den Seiten des ursprünglichen Dreiecks, so liegt eine jede Gruppe solcher Punkte auf einem Kegelschnitt $[k]$ und $[k']$. Für $\omega = 0$ fällt der Kegelschnitt $[k']$ in den 2. Lemoineschen Kreis.

Agram. G. MAJCEN.

---

84. Gewünscht wird ein rein geometrischer Beweis für den Satz: Zieht man durch die Eckpunkte A und B eines Dreieckes ABC nach innen zwei sich in P schneidende Strahlen, die mit AC und BC gleiche Winkel bilden, so sind die Fußpunkte P_a und P_b der von P auf BC und AC gefällten Lote von der Mitte F der Seite AB gleichweit entfernt.

Breslau. O. GUTSCHE.

---

85. Gewünscht wird ein rein geometrischer Beweis für den Satz: Wählt man auf zwei Geraden, die in Bezug auf CA und CB Gegentransversalen sind, zwei beliebige Punkte P und Q, und fällt man von ihnen auf CA und CB die Lote, deren Fußpunkte A_1, B_1 und A_2, B_2 sind, so liegt der Schnittpunkt von A_1B_2 und A_2B_1 auf PQ.

Breslau. O. GUTSCHE.

---

1) On peut dire aussi que

$$OA \times OB = \overline{OS}^2$$

B. Lösungen.

Zu **53.** (Bd. III, S. 170) (E. Lampe): Von dem Punkte C in der Ebene einer Parabel zieht man die Tangenten CB_1 und CB_2 (B_1 und B_2 die Berührungspunkte) an die Kurve und errichtet in B_1 und B_2 die Normalen, welche sich in Γ schneiden mögen. Die Koordinaten ξ, η von Γ aus denen von $C(x, y)$ zu berechnen und dann die Verwandtschaft zu untersuchen, in welcher den Punkten C die Punkte Γ entsprechen; insbesondere einfache sich entsprechende Kurvenscharen zu bestimmen. Welche Punkte C fallen mit ihren entsprechenden Γ zusammen? — Gleiche Fragen für die Ellipse und die Hyperbel.

I. Parabel.

1. *Entwickelung der Gleichungen für* ξ, η. — Die Gleichung der gegebenen Parabel sei

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

ihr Scheitel A, ihr Brennpunkt F; die Koordinaten von B_1 seien x_1, y_1, die von B_2 seien x_2, y_2. Dann sind die Gleichungen der Tangenten in B_1 und B_2

$$y_1 y = p(x + x_1); \quad y_2 y = p(x + x_2).$$

Weil die Koordinaten von B_1 und B_2 der Gleichung (1) genügen müssen, hat man noch

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}; \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p},$$

und man findet als Koordinaten von C

$$x = \frac{y_1 y_2}{2p}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

Die Gleichungen der Normalen in B_1 und B_2 sind

$$y_1 x + py = y_1(p + x_1); \quad y_2 x + py = y_2(p + x_2).$$

Diesen beiden Gleichungen genügen die Koordinaten ξ, η von Γ, woraus

$$\xi = \frac{2p^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{2p} = \frac{p^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{2} y_1 y_2}{p};$$

$$\eta = -\frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{2p^2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2)

$$\xi = \frac{p^2 + 2y^2 - px}{p}; \quad \eta = -\frac{2xy}{p}. \tag{3}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Verwandtschaft, welche zwischen den Punkten C und Γ besteht.

2. *Sich selbst entsprechende Punkte.* — Soll Punkt Γ mit C zusammenfallen, so müssen die beiden Gleichungen

$$x = \frac{p^2 + 2y^2 - px}{p} \quad \text{und} \quad y = -\frac{2xy}{p}$$

gleichzeitig bestehen. Die zweite Gleichung ergibt entweder

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{1}{2}p.$$

Setzt man $y = 0$ in die erste Gleichung ein, so findet man $x = \frac{1}{2}p$; setzt man aber $x = -\frac{1}{2}p$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $y^2 = -p^2$. Dies entspricht keinem reellen Punkte C. Es gibt also nur einen einzigen Punkt C, welcher mit seinem entsprechenden Punkte Γ zusammenfällt; er liegt auf der x-Achse und hat die Abscisse $\frac{1}{2}p$, ist also der Brennpunkt F der Parabel.

3. *Die Verwandtschaft der Punkte C und Γ.* — Die Gleichungen (3) lassen erkennen, daß ξ und η durch x und y eindeutig bestimmt sind.

Ist $x = 0$ und $y = 0$, so ist $\xi = p$ und $\eta = 0$; dem Koordinatenanfangspunkt A im xy-System entspricht also ein Punkt A' im $\xi\eta$-System, welcher auf der Abscissenachse liegt und die Abscisse p hat.

Ist nur $x = 0$, so ist $\xi = \dfrac{p^2 + 2y^2}{p}$, $\eta = 0$. Hiernach kann ξ alle positiven Werte von p bis ∞ annehmen, und zwar sind diese Werte paarweise einander gleich für je ein positives und ein negatives y von gleichem absoluten Werte. Demnach entspricht sowohl dem positiven als auch dem negativen Teil der y-Achse der vom Punkte A' aus sich nach der positiven Richtung hin bis ins Unendliche erstreckende Teil der ξ-Achse.

Ist nur $y = 0$, so ist $\xi = p - x$ oder $\xi - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p - x$, $\eta = 0$. In diesem Falle kann ξ alle positiven und negativen Werte annehmen; mithin entspricht die Abscissenachse sich selbst. Sie wird aber von den Punkten C und Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; je zwei Punkte derselben, welche von F nach entgegengesetzter Richtung gleiche Entfernung haben (wie z. B. A und A'), entsprechen einander.

Für ein positives x können ξ und η alle positiven und negativen Werte annehmen; dabei entspricht jedem positiven x ein negatives η und umgekehrt. Stellt man sich nun die Koordinatenebene als aus zwei zusammenfallenden Ebenen $[C]$ und $[\Gamma]$ bestehend vor, deren Koordinatenachsen sich decken, und bezeichnet man noch die Quadranten der Ebene $[C]$ mit I, II, III, IV, die der Ebene $[\Gamma]$ mit I′, II′, III′, IV′, so hat man nach Obigem folgenden Satz: „*Den Quadranten* I *und* IV *in* $[C]$ *entspricht die ganze Ebene* $[\Gamma]$ *dergestalt, daß* I *in* III′ *und* IV′, IV *in* I′ *und* II′ *übergeht.*“

Für ein negatives x kann η ebenfalls alle positiven und negativen Werte annehmen; dagegen ist ξ auf diejenigen positiven Werte beschränkt, für welche $\xi \geqq \dfrac{p^2 + 2y^2}{p}$ ist. Um die Grenzlage des Punktes Γ in diesem Falle zu bestimmen, setze man in den Gleichungen (3) $x = -c$ und eliminiere y; dann erhält man als Gleichung der Kurve, welche Γ bei konstantem c durchläuft,

$$(4) \qquad F(\xi, \eta, c) \equiv 2c^2\xi - p\eta^2 - 2pc^2 - 2c^3 = 0.$$

Bei veränderlichem c stellt diese Gleichung eine Kurvenschar dar, deren Einhüllende die Grenzkurve für die Lage des Punktes Γ ist. Man hat nun

$$\frac{\partial F(\xi, \eta, c)}{\partial c} = 4c\xi - 4cp - 6c^2 = 0;$$

also entweder $c = 0$, und dies kommt hier nicht in Betracht oder $c = \frac{2}{3}(\xi - p)$. Setzt man diesen letzteren Wert in (4) ein, so erhält man $\frac{8}{27}(\xi - p)^3 - p\eta^2 = 0$ oder

$$(5) \qquad \eta = \sqrt{\frac{8(\xi - p)^3}{27p}}.$$

Dies ist die Gleichung der Evolute der Parabel (1). Bezeichnet man die auf der positiven Seite der Abscissenachse liegende Hälfte der durch diese Evolute begrenzten Fläche mit V′, die andere Hälfte mit VI′, und beachtet man, daß jedem positiven bezw. negativen y auch ein negatives bezw. positives η entspricht, so hat man den Satz: „*Den Quadranten* II *und* III *in* $[C]$ *entspricht in* $[\Gamma]$ *die durch die Evolute* (5) *begrenzte Fläche dergestalt, daß* II *in* V′, III *in* VI′ *übergeht.*"

Aus der ersten der Gleichungen (3) ergibt sich, daß $\xi = 0$ ist für $p^2 + 2y^2 - px = 0$, d. h. wenn C auf der Parabel

$$(6) \qquad y^2 = \tfrac{1}{2}p(x - p)$$

liegt, deren Scheitel A' und deren Parameter $\frac{1}{4}p$ ist. Bezeichnet man die positive Hälfte der von dieser Parabel eingeschlossenen Fläche mit VII, die negative Hälfte mit VIII, so folgt: „*Der Fläche der Parabel* (6) *in* $[C]$ *entsprechen die Quadranten* II′ und III′ *in* $[\Gamma]$ *dergestalt, daß* VII *in* III′, VIII *in* II′ *übergeht; den Restflächen* I—VII *bezw.* IV—VIII *in* $[C]$ *entsprechen die Quadranten* IV′ *bezw.* I′ *in* $[\Gamma]$."

Betrachtet man Punkt C als abhängig vom Punkte Γ, so ist die Bestimmung von C nicht eindeutig. Löst man die Gleichungen (3) für x und y auf, so findet man

$$x^3 + (\xi - p)x^2 - \tfrac{1}{2}p\eta^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{2(\xi - p)}{p\eta^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{p\eta^2} = 0;$$

$$y^3 - \tfrac{1}{2}p(\xi - p)y + \tfrac{1}{2}p^2\eta = 0.$$

Die Anwendung der Cardanischen Formel ergibt für beide Gleichungen, daß sie *eine* oder *drei* reelle Wurzeln haben, je nachdem der Ausdruck $27p\eta^2 - 8(\xi - p)^3$ *positiv* oder *negativ* ist, d. h. je nachdem Γ *außerhalb* oder *innerhalb* der Parabelevolute (5) liegt. Zu demselben Resultat gelangt man durch geometrische Betrachtungen. Es können nämlich nur dann drei reelle Punkte C_1, C_2, C_3 dem Punkte Γ entsprechen, wenn sich von letzterem aus drei verschiedene Normalen ΓB_1, ΓB_2, ΓB_3 an die Parabel (1) ziehen lassen. Dies ist aber nur der Fall, wenn Γ innerhalb der Evolute liegt. Dann ist Dreieck $C_1 C_2 C_3$ ein Tangentendreieck der Parabel; die Berührungspunkte der Seiten $C_2 C_3$, $C_3 C_1$, $C_1 C_2$ sind B_1, B_2, B_3.

Liegt Γ auf der Evolute (5), so fallen zwei der Berührungspunkte, etwa B_2 und B_3, zusammen. Dann ist $27p\eta^2 - 8(\xi - p) = 0$. In diesem Falle haben die obigen Gleichungen auch noch drei reelle Wurzeln; aber

zwei von ihnen sind gleich. Es ist nämlich $\xi - p = \frac{3}{2}\sqrt[3]{p\eta^2}$, und man kann die Gleichungen schreiben

$$x^3 + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{p\eta^2}\cdot x^2 - \tfrac{1}{2}p\eta^2 = \left(x - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p\eta^2}\right)\left(x + \sqrt[3]{p\eta^2}\right)^2 = 0;$$

$$y^3 - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{p^4\eta^2}\cdot y + \tfrac{1}{4}p^2\eta = \left(y + \sqrt[3]{p^2\eta}\right)\left(y - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p^2\eta}\right)^2 = 0.$$

Also:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p\eta^2}, \quad x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{p\eta^2};$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{p^2\eta}, \quad y_2 = y_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p^2\eta}.$$

Die Koordinaten x_1, y_1 genügen der Gleichung (1); mithin liegt C_1 auf der gegebenen Parabel. Es ist auch geometrisch einleuchtend, daß, wenn Punkt B_3 mit B_2 zusammenfällt, Punkt C_1 mit B_{23} und C_3 mit C_2 zusammenfallen muß, und daß der Doppelpunkt C_{23} ein Punkt der in C_1 an die Parabel gelegten Tangente ist. Für die Abhängigkeit des Punktes C von Γ ergibt sich folgender Satz: „*Liegt Punkt Γ innerhalb der Parabelevolute* (5), *so entsprechen demselben drei reelle Punkte C; ist Γ ein Punkt der Evolute, so entsprechen ihm zwei reelle Punkte C; liegt Γ außerhalb der Evolute, so ist C eindeutig bestimmt.*"

4. *Entsprechende Kurvenscharen.*

a) Punkt C durchlaufe die Gerade $x = c$. — Dann hat man

$$\xi = \frac{p^2 + 2y^2 - pc}{p}; \quad \eta = -\frac{2cy}{p},$$

und durch Elimination von y erhält man als Gleichung des Ortes von Γ: $2c^2\xi = 2pc^2 + p\eta^2 - 2c^3$ oder

$$\eta^2 = \frac{2c^2}{p}(\xi - [p - c]). \tag{7}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Abscissenachse zusammenfällt, deren Scheitel die Abscisse $p - c$ hat, und deren Parameter $\frac{c^2}{p}$ ist. Bei veränderlichem c stellt (7) eine Schar von Parabeln dar. Hieraus folgt: „*Der Schar der Parallelen zur Ordinatenachse in* $[C]$ *entspricht eine Schar von Parabeln in* $[\Gamma]$, *deren Achsen mit der Abscissenachse zusammenfallen.*" Zu dieser Schar gehört auch die gegebene Parabel; sie entspricht dem Werte $c = p$; ferner gehört zu ihr als Parabel mit dem Parameter 0 der von A' aus sich nach der positiven Richtung hin ins Unendliche erstreckende Teil der ξ-Achse, welcher dem Werte $c = 0$, d. h. der y-Achse entspricht, wie schon oben gefunden wurde. Je zwei Parabeln der Schar (7), deren Scheitel von A' gleiche Entfernung haben, sind kongruent. Diejenigen Parabeln, für welche c positiv ist, füllen die ganze Ebene $[\Gamma]$ aus. Bei negativem c ist Gleichung (7) mit (4) identisch; die durch sie dargestellten Parabeln liegen, wie gezeigt wurde, innerhalb der Evolute (5) und berühren dieselbe.

b) Punkt C durchlaufe die Gerade $y = d$. — Dann ist

$$\xi = \frac{p^2 + 2d^2 - px}{p}; \quad \eta = -\frac{2dx}{p},$$

und durch Elimination von x erhält man als Gleichung des Ortes von Γ: $2dp\xi = 2d(p^2 + 2d^2) + p^2\eta$ oder

$$(8) \qquad \eta = \frac{2d}{p^2}(p[\xi - p] - 2d^2).$$

Diese Gleichung stellt eine Gerade, bei veränderlichem d eine Schar von Geraden dar. Durch Differentiation nach d ergibt sich $2p(\xi - p) - 12d^2 = 0$, also $d = \sqrt{\frac{1}{6}p(\xi - p)}$, und wenn man dies in (8) einsetzt,

$$\eta = \frac{2\sqrt{\frac{1}{6}p(\xi - p)}}{p^2} \cdot \tfrac{2}{3}p(\xi - p) = \sqrt{\frac{8(\xi - p)^3}{27p}},$$

also die Gleichung der Evolute (5), welche demnach die Einhüllende der Schar (8) ist. Hieraus ergibt sich der Satz: „*Der Schar der Parallelen zur Abscissenachse in [C] entspricht die Schar sämtlicher Tangenten der Evolute* (5) *in* [Γ]. Diesen Satz kann man, weil die Tangenten der Evolute (5) die Normalen der Parabel (1) sind, auch so aussprechen: „*Der Schar der Parallelen zur Abscissenachse in [C] entspricht die Schar sämtlicher Normalen der gegebenen Parabel in* [Γ].“

In jedem Punkte der Evolute (5) berühren sich die Evolute, eine Parabel der Schar (7) und eine Gerade der Schar (8) gegenseitig. Daraus folgt, daß jede Gerade der Schar (8) Tangente für eine bestimmte Parabel der Schar (7) ist. In welcher Beziehung beide zu einander stehen, ergibt sich, wenn man die Bedingung für das Zusammenfallen der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel ermittelt. Eliminiert man ξ aus den Gleichungen (7) und (8), so ergibt sich

$$p^2d\eta^2 - p^2c^2\eta - 2c^2d(pc + 2d^2) = 0.$$

Sollen die erwähnten Schnittpunkte zusammenfallen, so müssen die beiden aus dieser Gleichung sich ergebenden Werte von η gleich sein, d. h. es muß

$$p^4c^4 + 8p^2c^2d^2(pc + 2d^2) = p^2c^2(pc + 4d^2)^2 = 0$$

sein. Die gesuchte Bedingung ist also

$$c = -\frac{4d^2}{p} \quad \text{oder} \quad d = \tfrac{1}{2}\sqrt{-pc}.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Schnittpunkt der Geraden $x = c$ und $y = d$ auf der Parabel

$$(9) \qquad y^2 = -\tfrac{1}{4}px$$

liegt. Man hat daher den Satz: „*Zweien sich rechtwinklig schneidenden Geraden in [C], welche den Koordinatenachsen parallel sind, entsprechen eine Parabel und eine Tangente derselben in* [Γ], *wenn der Schnittpunkt der Geraden auf der Parabel* (9) *liegt. Dem Schnittpunkt in [C] entspricht der auf der Evolute* (5) *liegende Berührungspunkt in* [Γ]; *daher entspricht der*

Parabel (9) *die Evolute* (5)." Die Koordinaten der Berührungspunkte sind $\xi = p - \frac{3}{2}c,\ \eta = \sqrt{-\frac{c^3}{p}}$.

c) Punkt C durchlaufe die Gerade

$$y = \lambda x + \mu p. \tag{10}$$

Dann ist

$$\xi = \frac{p^2 + 2(\lambda x + \mu p)^2 - px}{p}; \quad \eta = -\frac{2x(\lambda x + \mu p)}{p}.$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit λ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$\xi + \lambda\eta = (2\lambda\mu - 1)x + (1 + 2\mu^2)p,$$

und hieraus

$$x = \frac{\xi + \lambda\eta - (1 + 2\mu^2)p}{2\lambda\mu - 1}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung für η findet man als Gleichung des Ortes von Γ

$$\lambda(\xi + \lambda\eta)^2 - (2\lambda\mu^2 + 2\lambda + \mu)p\xi - (2\lambda^2 + 3\lambda\mu - \tfrac{1}{2})p\eta + (1 + 2\mu^2)(\lambda + \mu)p^2 = 0. \tag{11}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse der Geraden $\xi + \lambda\eta = 0$ parallel ist. Da nun diese letztere zur Geraden (10) senkrecht ist, so ergibt sich der Satz: *„Jeder Geraden in [C] entspricht im allgemeinen eine Parabel in [Γ], deren Achse zu der Geraden senkrecht ist."*

Dreht man das Koordinatensystem so, daß die Abscissenachse der Parabelachse parallel wird, und bezeichnet man die neuen Koordinaten mit ξ', η', so geht (11) über in

$$\eta'^2 - \frac{(2\lambda\mu - 1)^2}{2\lambda\sqrt{(1+\lambda^2)^3}}p\xi' - \frac{(2\lambda\mu - 1)(3\lambda + 2\mu) + 4\lambda^3}{2\lambda\sqrt{(1+\lambda^2)^3}}p\eta' + \frac{(1+2\mu^2)(\lambda+\mu)}{\lambda(1+\lambda^2)}p^2 = 0.$$

Hieraus ersieht man, daß der Parameter der Parabel (11)

$$p' = \frac{(2\lambda\mu - 1)^2}{4\lambda\sqrt{(1+\lambda^2)^3}}p$$

ist.

Die Gleichungen der Sonderfälle *a)* und *b)* lassen sich aus (10) und (11) in folgender Weise ableiten:

Man dividiere (10) durch λ, setze $\frac{\mu}{\lambda}p = -c$ und $\lambda = \infty$; dann ergibt sich die Gleichung $x = c$. Setzt man dementsprechend in (11) $\mu = -\frac{\lambda c}{p}$, dividiert die ganze Gleichung durch λ^3 und läßt dann λ unendlich groß werden, so erhält man Gleichung (7).

Setzt man ferner in (10) $\lambda = 0$ und $\mu p = d$, so ergibt sich die Gleichung $y = d$. Setzt man dem entsprechend in (11) $\lambda = 0$ und $\mu = \frac{d}{p}$, so erhält man Gleichung (8). In diesem Falle wird der Parameter p' der

Parabel (11) unendlich groß; die Parabel artet zu einer Geraden aus, und die Geraden der Schar (8) sind demnach als Parabeln mit unendlich großem Parameter aufzufassen.

Die Parabel (11) artet auch dann in eine Gerade, und zwar in einen Doppelstrahl aus, wenn ihr Parameter $p' = 0$ wird, d. h. wenn $2\lambda\mu - 1 = 0$ oder $\mu = \frac{1}{2\lambda}$ ist. Gleichung (10) geht dann über in

$$(12) \qquad y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}.$$

Schreibt man dies

$$F(x, y, \lambda) \equiv 2\lambda^2 x - 2\lambda y + p = 0,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 4\lambda x - 2y = 0,$$

und wenn man λ eliminiert, $y^2 = 2px$; nämlich die Gleichung der gegebenen Parabel. Bei veränderlichem λ stellt also Gleichung (12) die Schar sämtlicher Tangenten der Parabel (1) dar. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$(13) \qquad x = \frac{p}{2\lambda^2}, \quad y = \frac{p}{\lambda}.$$

Setzt man nun den Wert $\mu = \frac{1}{2\lambda}$ in (11) ein, so erhält man $\left[\xi + \lambda\eta - \left(1 + \frac{1}{2\lambda^2}\right)p\right]^2 = 0$. Der Doppelstrahl, in welchen in diesem Falle die Parabel (11) übergeht, gehört also der Geraden

$$(14) \qquad \xi + \lambda\eta = \left(1 + \frac{1}{2\lambda^2}\right)p$$

an. Diese Gerade ist senkrecht zu der Parabeltangente (12); außerdem genügen ihrer Gleichung die Koordinaten (13). Sie ist also die der Tangente (12) zugehörige Normale der Parabel (1). Um den Scheitel des Doppelstrahls zu bestimmen, eliminiere man y aus (12) und der zweiten der Gleichungen (3). Es ergibt sich

$$\eta = -\frac{(2\lambda^2 x + p)x}{\lambda p}; \quad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{4\lambda^2 x + p}{\lambda p}.$$

Mithin wird η bei *positivem* λ ein *Maximum*, bei *negativem* λ ein *Minimum*, wenn $4\lambda^2 x + p = 0$, also $x = -\frac{p}{4\lambda^2}$ und dem entsprechend $y = \frac{p}{4\lambda}$ ist. Der gesuchte Scheitel ist also derjenige Punkt, welcher dem in $[C]$ gelegenen Punkte mit den Koordinaten $x = -\frac{p}{4\lambda^2}$, $y = \frac{p}{4\lambda}$ entspricht. Der letztere ist der Mittelpunkt der von den Koordinatenachsen begrenzten Strecke der Parabeltangente (12). Er liegt auf der Parabel (9); mithin liegt der Scheitel des Doppelstrahls auf der Evolute (5). Die Parabelnormale (14) berührt als solche die Evolute (5); doch ist der auf ihr liegende Scheitel des Doppelstrahls nicht der *Berührungspunkt*, sondern der *Schnittpunkt* mit der Evolute. Es ergibt sich der Satz: *„Den Tangenten der gegebenen Parabel in* $[C]$ *entsprechen als Doppelstrahlen die zugehörigen*

Normalen in $[\Gamma]$, soweit sie innerhalb der Evolute (5) liegen. Diese Doppelstrahlen sind als Parabeln mit dem Parameter Null aufzufassen."

Die beiden Gleichungen (8) und (14) stellen die Schar sämtlicher Normalen der Parabel (1) dar; sie sind die Gleichungen einer und derselben Normale, wenn $d = -\frac{p}{2\lambda}$ ist. Demnach entspricht der Parallelen zur x-Achse

$$y + \frac{p}{2\lambda} = 0 \tag{15}$$

und der Parabeltangente (12) in $[C]$ eine und dieselbe Normale (14) in $[\Gamma]$. Der Schnittpunkt von (12) und (15) liegt auf der Parabel (9); sein entsprechender Punkt ist der Berührungspunkt von (14) und der Evolute (5).

Ist $\mu = 0$, so ist (10) die Gleichung des durch A gehenden Strahlenbüschels, und (11) geht über in

$$(\xi + \lambda\eta)^2 - 2p\xi - \left(2\lambda - \frac{1}{2\lambda}\right)p\eta + p^2 = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung stellt eine Schar von Parabeln dar, die sämtlich durch A' gehen. Da nun den Punkten der Quadranten I und III in $[C]$ solche Punkte Γ entsprechen, deren η negativ ist, den Punkten der Quadranten II und IV aber solche Punkte, deren η positiv ist, so liegen alle Parabeln der Schar (16) ganz auf *einer Seite* der ξ-Achse, und zwar auf der negativen oder positiven Seite, je nachdem λ positiv oder negativ ist, und alle Parabeln berühren sich gegenseitig in A'. Der Parameter ist $p' = \frac{p}{4\lambda\sqrt{(1+\lambda^2)^3}}$; es wird also $p' = 0$ für $\lambda = \infty$ und $p' = \infty$ für $\lambda = 0$. Hieraus ergibt sich der Satz: „*Dem Strahlenbüschel durch den Koordinatenanfangspunkt A in $[C]$ entspricht eine Schar sich in A' gegenseitig berührender Parabeln in $[\Gamma]$. Zu dieser Schar gehört als Parabel mit dem Parameter $p' = 0$ der von A' ausgehende positive Strahl der ξ-Achse, als Parabel mit dem Parameter $p' = \infty$ die ganze ξ-Achse.*"

d) Punkt C durchlaufe die Parabel $y^2 = 2p'x$. — Dann ist

$$\xi = \frac{p^2 + 4p'x - px}{p}; \quad \eta^2 = \frac{8p'x^3}{p^2},$$

und durch Elimination von x ergibt sich als Gleichung des Ortes von Γ

$$\frac{p^2\eta^2}{8p'} = \frac{p^3(\xi - p)^3}{(4p' - p)^3} \quad \text{oder} \quad \eta = \sqrt{\frac{27p^2p'}{(4p'-p)^3}} \cdot \sqrt{\frac{8(\xi - p)^3}{27p}}. \tag{17}$$

Dies ist die Gleichung einer der Parabelevolute (5) ähnlichen Kurve, welche mit ihr die Spitze und die Achse gemein hat. Bei veränderlichem p' stellt (17) eine Schar solcher Kurven dar. Man hat also den Satz: „*Der Schar von Parabeln in $[C]$, welche mit der gegebenen die Achse und den Scheitel gemein haben, entspricht eine Schar von Parabelevoluten in $[\Gamma]$, welche sich mit der Evolute (5) in Ähnlichkeitslage befinden. Der Ähnlichkeitspunkt ist die gemeinsame Spitze A'.*"

Setzt man

$$\frac{(4p' - p)^3}{27p^2p'} = \varkappa, \tag{18}$$

so ist $\varkappa$ das Ähnlichkeitsverhältnis der Evolute (17) zur Evolute (5). Diejenige Parabel, welcher die Evolute (17) zugehört, hat den Parameter $\varkappa p$; ihr Scheitel hat die Abscisse $(\varkappa - 1)p$. Die Gleichung (18) hat *eine* oder *drei* reelle Wurzeln, je nachdem $\varkappa$ *kleiner* oder *größer* als 1 ist. In dem Falle $\varkappa = 1$ geht sie über in $(p' - p)(8p' + p)^2 = 0$, hat also dann drei reelle Wurzeln, von denen zwei gleich sind. Es wird nun $\varkappa < 1$ für alle positiven Werte von p', welche kleiner als p sind, dagegen $\varkappa > 1$ für alle positiven Werte von p', welche größer als p sind, und für alle negativen Werte. Hieraus ergibt sich: Jede Evolute der Schar (17), welche *außerhalb* der Evolute (5) liegt, entspricht *einer einzigen Parabel* in $[C]$, welche *innerhalb* der gegebenen liegt; jede Evolute der Schar (17), welche *innerhalb* der Evolute (5) liegt, entspricht *dreien Parabeln* in $[C]$, welche *außerhalb* der gegebenen liegen. Die Evolute (5) selbst, welche mit zur Schar (17) gehört, entspricht der gegebenen Parabel und der Parabel (9). Zur Schar (17) gehören noch die beiden von A' ausgehenden Strahlen der ξ-Achse, welche den Werten $p' = 0$ und $p' = \infty$ ensprechen, ferner die durch A' gehende Parallele zur η-Achse, welche dem Werte $p' = \frac{1}{4}p$ entspricht.

e) Punkt C durchlaufe die Hyperbel

$$y^2 - \lambda x y - \tfrac{1}{2} p x - \tfrac{1}{2} \nu p^2 = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes dieser Hyperbel sind $x_0 = -\frac{p}{\lambda^2}$, $y_0 = -\frac{p}{2\lambda}$. Eliminiert man λ, so ergibt sich $y_0^2 = -\frac{1}{4} p x_0$; der Mittelpunkt liegt also auf der Parabel (9). Aus $y^2 - \lambda x y = 0$ oder $y(y - \lambda x) = 0$ ersieht man, daß die eine Asymptote der Abscissenachse, die andere Asymptote der Geraden $y - \lambda x = 0$ parallel ist. Daher ist die Gleichung der ersten Asymptote $y + \frac{p}{2\lambda} = 0$ und die der zweiten $y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}$. Die Asymptoten sind also identisch mit den Geraden (15) und (12). Der Asymptotenwinkel 2α ist bestimmt durch die Gleichung $\operatorname{tg} 2\alpha = \lambda$. Die Hauptachse bildet mit der x-Achse den Winkel α. Sind f, g die Halbachsen der Hyperbel, so hat man

$$(20) \qquad f^2 = \frac{(1 - 2\lambda^2\nu)p^2}{2\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2} - 1)}; \quad g^2 = -\frac{(1 - 2\lambda^2\nu)p^2}{2\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2} + 1)}.$$

Liegt nun C auf der Hyperbel (19), so erhält man durch Addition der beiden Gleichungen (3), nachdem man die zweite derselben mit λ multipliziert hat,

$$(21) \qquad \xi + \lambda\eta = \frac{p^2 + 2y^2 - px - 2\lambda x y}{p} = (1 + \nu)p$$

oder

$$\eta = -\frac{1}{\lambda}\xi + \frac{(1+\nu)p}{\lambda}.$$

Diese Gleichung stellt eine Gerade dar, die zur zweiten Asymptote der Hyperbel senkrecht ist.

Bei konstantem λ und veränderlichem ν stellt (19) die Schar sämtlicher Hyperbeln dar, welche die Geraden (15) und (12) zu Asymptoten

haben. Sie umfaßt, wie man aus (20) ersieht, für $\nu < \frac{1}{2\lambda^2}$ alle diejenigen Hyperbeln, welche innerhalb des von den Asymptoten gebildeten *spitzen* Winkels liegen, und für $\lambda > \frac{1}{2\lambda^2}$ alle die Hyperbeln, welche innerhalb des *stumpfen* Winkels liegen. Für $\nu = \frac{1}{2\lambda^2}$ geht sie über in

$$\left(y + \frac{p}{2\lambda}\right)\left(y - \lambda x - \frac{p}{2\lambda}\right) = 0,$$

wird also zur Gleichung des Systems der Asymptoten, welches mit zur Schar gehört und als Hyperbel mit den Achsen $f = 0$, $g = 0$ aufzufassen ist. Dieser Hyperbelschar entspricht nach (21) eine Schar paralleler Geraden, die zur zweiten Asymptote senkrecht sind. Wird auch λ als variabel angenommen, so erhält man unendlich viele solcher Hyperbelscharen nebst ihren entsprechenden Parallelenscharen.

Ist ν konstant und nur λ veränderlich, so bilden je eine Hyperbel aus jeder der vorigen unendlich vielen Scharen eine neue Schar, der, wie aus (21) hervorgeht, ein Strahlenbüschel durch einen bestimmten Punkt der ξ-Achse, für $\nu = -1$ der Büschel durch den Koordinatenanfangspunkt A, entspricht. Läßt man jetzt auch ν veränderlich werden, so erhält man abermals unendlich viele Hyperbelscharen der zweiten Art nebst ihren entsprechenden Strahlenbüscheln.

II. Ellipse.

1. *Entwickelung der Gleichungen für* ξ, η. — Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{22}$$

ihr Mittelpunkt M, ihre Brennpunkte F_1 und F_2; die Koordinaten von B_1 seien x_1, y_1, die von B_2 seien x_2, y_2. Dann sind die Gleichungen der Tangenten in B_1 und B_2

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2; \quad b^2 x_2 x + a^2 y_2 y = a^2 b^2.$$

Hieraus findet man als Koordinaten des Punktes C

$$x = \frac{a^2 (y_2 - y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}; \quad y = \frac{b^2 (x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \tag{23}$$

Die Gleichungen der Normalen in B_1 und B_2 sind

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1; \quad a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2.$$

Hieraus ergeben sich als Koordinaten des Punktes Γ

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2) x_1 x_2 (y_2 - y_1)}{a^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)}; \quad \eta = \frac{(a^2 - b^2) y_1 y_2 (x_2 - x_1)}{b^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)}. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1 x_2 x; \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1 y_2 y. \tag{25}$$

Da die Punkte B_1 und B_2 auf der Ellipse (22) liegen, darf man setzen

(26) $x_1 = a\cos\varphi_1$; $y_1 = b\sin\varphi_1$; $x_2 = a\cos\varphi_2$; $y_2 = b\sin\varphi_2$.

Dann wird

$$x = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}; \quad y = \frac{b\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Man multipliziere jetzt die erste dieser beiden Gleichungen mit b, die zweite mit a und quadriere beide. Dann ergibt sich durch Addition und Division

$$b^2x^2 + a^2y^2 = \frac{a^2b^2}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}; \quad \frac{a^2y^2}{b^2x^2} = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1),$$

und hieraus findet man weiter

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{ab}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}; \qquad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1) = \frac{bx}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}; \qquad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1) = \frac{ay}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}};$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{2a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2}; \qquad \cos(\varphi_2+\varphi_1) = \frac{b^2x^2-a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2};$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2x^2+a^2y^2}; \qquad \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{b^2(a^2-x^2)}{b^2x^2+a^2y^2}.$$

Es ist nun nach (26) $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{x_1x_2}{a^2}$, $\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{y_1y_2}{b^2}$; also

$$x_1x_2 = \frac{a^4(b^2-y^2)}{b^2x^2+a^2y^2}; \quad y_1y_2 = \frac{b^4(a^2-x^2)}{b^2x^2+a^2y^2}.$$

Setzt man diese Werte in (25) ein, so erhält man

(27) $$\xi = \frac{(a^2-b^2)(b^2-y^2)x}{b^2x^2+a^2y^2}; \quad \eta = -\frac{(a^2-b^2)(a^2-x^2)y}{b^2x^2+a^2y^2}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Verwandtschaft, welche zwischen den Punkten C und Γ besteht.

2. *Sich selbst entsprechende Punkte.* — Soll Punkt Γ mit C zusammenfallen, so müssen die Gleichungen

$$x = \frac{(a^2-b^2)(b^2-y^2)x}{b^2x^2+a^2y^2}; \quad y = -\frac{(a^2-b^2)(a^2-x^2)y}{b^2x^2+a^2y^2}$$

gleichzeitig bestehen. Sind x und y von Null verschieden, so darf man die erste Gleichung durch x und die zweite durch y dividieren; löst man sodann die Gleichungen auf, so findet man $x^2 = \frac{a^4}{a^2-b^2}$; $y^2 = -\frac{b^4}{a^2-b^2}$. Dies ergibt, weil y imaginär wird, keine sich selbst entsprechenden Punkte. Sind solche vorhanden, so liegen sie demnach auf einer der Koordinatenachsen. Setzt man $x = 0$, so ist $y = -\frac{a^2-b^2}{y}$ oder $y^2 = -(a^2-b^2)$. Dies ergibt wieder für y einen imaginären Wert; also enthält die y-Achse keine sich selbst entsprechenden Punkte. Setzt man $y = 0$, so ist $x = \frac{a^2-b^2}{x}$

oder $x^2 = a^2 - b^2$, woraus man ersieht, daß auf der Abscissenachse die beiden Punkte, welche die Abscissen $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ haben, d. h. die Brennpunkte F_1 und F_2, sich selbst entsprechende Punkte sind. Die gleichzeitige Annahme $x = 0$ und $y = 0$ führt zu einem unbestimmten Resultate.

3. *Entsprechende Kurvenscharen.*

a) Punkt C durchlaufe die Gerade $x = c$. — Dann ist

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - y^2)c}{b^2c^2 + a^2y^2}; \quad \eta = -\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)y}{b^2c^2 + a^2y^2}.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$y^2 = \frac{b^2c(a^2 - b^2 - c\xi)}{a^2\xi + a^2c - b^2c};$$

setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung ein, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$b^2c(a^2 + c^2)\eta = -(a^2\xi + a^2c - b^2c)(a^2 - c^2)y.$$

Wenn man jetzt quadriert und nochmals den Wert von y^2 einsetzt, dann durch b^2c dividiert, so findet man als Ort von Γ

$$(28) \quad b^2c(a^2 + c^2)^2\eta^2 = (a^2 - c^2)^2(a^2\xi + a^2c - b^2c)(a^2 - b^2 - c\xi),$$

was sich auch auf die Form

$$(29) \quad \begin{cases} a^2c(a^2 - c^2)^2\xi^2 + b^2c(a^2 + c^2)^2\eta^2 - (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^3\xi \\ \qquad - (a^2 - b^2)^2(a^2 - c^2)^2c = 0 \end{cases}$$

bringen läßt. Aus (29) ersieht man, daß der Ort von Γ eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt, und für deren Halbachsen f, g die Gleichung

$$\frac{g}{f} = \frac{a(a^2 - c^2)}{b(a^2 + c^2)}$$

besteht. Aus (28) ergeben sich, wenn man $\eta = 0$ setzt, die Abscissen ξ_1 und ξ_2 der beiden Hauptscheitel durch die Gleichung

$$(a^2\xi + a^2c - b^2c)(a^2 - b^2 - c\xi) = 0,$$

nämlich

$$\xi_1 = \frac{a^2 - b^2}{c}; \quad \xi_2 = -\frac{(a^2 - b^2)c}{a^2}.$$

Als Abscisse des Mittelpunktes erhält man

$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{2a^2c},$$

und die Halbachsen sind

$$f = \tfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}{2a^2c}; \quad g = \frac{a(a^2 - c^2)}{b(a^2 + c^2)}f = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{2abc}.$$

Sind ξ', η' die Koordinaten eines Nebenscheitels der Ellipse (29), so ist $\xi' = \xi_0 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{2a^2c}$, $\eta' = \pm g = \pm\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{2abc}$; es ist also

$\eta' = \pm \frac{a}{b} \xi'$, d. h. die Nebenscheitel der Ellipse (29) liegen auf denjenigen Durchmessern der gegebenen Ellipse, welche zu den gleichen konjugierten Durchmessern der letzteren senkrecht sind.

Für $c = \Theta$ ergibt sich $\xi = 0$, $\eta = -\frac{a^2 - b^2}{y}$. Die Ordinatenachse entspricht also sich selbst, und zwar dergestalt, daß, während C die y-Achse von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ durchläuft, sich Γ auf der η-Achse von 0 bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis 0 bewegt, wodurch bestätigt wird, daß die Ordinatenachse keine sich selbst entsprechenden Punkte enthält.

Setzt man $c^2 = a^2$, d. h. durchläuft C eine der Scheiteltangenten der gegebenen Ellipse, so geht (29) über in $\eta^2 = 0$, und es wird

$$\xi_1 = \pm \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \xi_2 = \mp \frac{a^2 - b^2}{a}; \quad \xi_0 = 0; \quad f = \frac{a^2 - b^2}{a}; \quad g = 0.$$

Die Ellipse (29) artet also in diesem Falle in diejenige Doppelstrecke aus, welche, auf der ξ-Achse liegend, durch die Krümmungsmittelpunkte für die Hauptscheitel der gegebenen Ellipse begrenzt wird.

Läßt man c von a bis 0 abnehmen, so bewegt sich ξ_2 von $-\frac{a^2 - b^2}{a}$ bis 0; ξ_0 und ξ_1 bewegen sich in derselben Richtung bis ins Unendliche. Gleichung (29) stellt also in diesem Falle eine Schar von Ellipsen dar, welche die ganze Halbebene der positiven Abscissen und einen Teil der anderen Halbebene ausfüllen. Nimmt c noch weiter ab, von 0 bis $-a$, so erhält man die Schar der in Bezug auf die y-Achse zu den eben bezeichneten Ellipsen symmetrisch liegenden Ellipsen.

Setzt man $-\frac{a^2}{c}$ statt c, so bleibt (29) unverändert, ξ_1 und ξ_2 vertauschen ihre Werte, ξ_0 behält seinen Wert, auch f und g bleiben ihrem absoluten Werte nach ungeändert. Hieraus folgt, daß irgend zweien Geraden $x = c$ und $x = -\frac{a^2}{c}$ in $[C]$ eine und dieselbe Ellipse in $[\Gamma]$ entspricht, und daß ferner allen diesen Geraden in $[C]$, für welche $c < -a$ ist, wieder die erste der erwähnten symmetrischen Ellipsenscharen in $[\Gamma]$, allen Geraden aber, für welche $c > a$ ist, die zweite dieser Scharen entspricht.

b) Punkt C durchlaufe die Gerade $y = d$. — Man findet dann in derselben Weise wie in *a)* als Gleichung des Ortes von Γ

$$a^2 d (b^2 + d^2)^2 \xi^2 = (b^2 - d^2)^2 (a^2 d - b^2 d - b^2 \eta)(a^2 - b^2 + d\eta)$$

oder

$$(30) \quad \begin{cases} a^2 d (b^2 + d^2)^2 \xi^2 + b^2 d (b^2 - d^2)^2 \eta^2 + (a^2 - b^2)(b^2 - d^2)^3 \eta \\ \qquad - (a^2 - b^2)^2 (b^2 - d^2)^2 d = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, deren große Achse mit der η-Achse zusammenfällt; die Ordinaten der Hauptscheitel sind $\eta_1 = -\frac{a^2 - b^2}{d}$, $\eta_2 = \frac{(a^2 - b^2)d}{b^2}$; die Ordinate des Mittelpunktes ist $\eta_0 = -\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - d^2)}{2b^2 d}$; die Halbachsen sind $f = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 + d^2)}{2b^2 d}$, $g = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - d^2)}{2abd}$; die Nebenscheitel liegen auf denselben Geraden wie die der Ellipse (29).

Für $d = 0$ wird $\xi = \frac{a^2 - b^2}{x}$, $\eta = 0$. Die Abscissenachse entspricht also sich selbst, und zwar dergestalt, daß, während C die x-Achse von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ durchläuft, sich Γ auf der ξ-Achse von 0 bis $-\infty$ und von $+\infty$ bis 0 bewegt, wodurch bestätigt wird, daß die Abscissenachse zwei sich selbst entsprechende Punkte enthält.

Setzt man $d^2 = b^2$, d. h. durchläuft C eine der Nebenscheiteltangenten der Ellipse (22), so artet die Ellipse (30) in diejenige Doppelstrecke aus, welche, auf der η-Achse liegend, durch die Krümmungsmittelpunkte für die Nebenscheitel der Ellipse (22) begrenzt wird.

Den beiden Geraden $y = d$ und $y = -\frac{b^2}{d}$ in $[C]$ entspricht eine und dieselbe Ellipse in $[\Gamma]$. Allen Parallelen zur Abscissenachse, für welche $0 < d < b$ ist, entspricht eine Schar von Ellipsen, welche die ganze Halbebene der negativen Ordinaten und einen Teil der anderen Halbebene ausfüllen. Diese Ellipsenschar entspricht auch derjenigen Schar von Parallelen, für welche $d < -b$ ist. Dagegen entspricht sowohl den Parallelen, für welche $-b < d < 0$, als auch denen, für welche $d > b$ ist, eine zweite Ellipsenschar, welche zu der eben erwähnten Schar in Bezug auf die ξ-Achse symmetrisch liegt.

c) *Punkt C durchlaufe die Gerade $y = \lambda x$.* — Dann ist

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2 x^2)}{(\lambda^2 a^2 + b^2)x}; \quad \eta = \frac{\lambda(a^2 - b^2)(a^2 - x^2)}{(\lambda^2 a^2 + b^2)x}.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit λ und addiert, so findet man

$$\xi + \lambda\eta = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2 a^2)}{(\lambda^2 a^2 + b^2)x} \quad \text{oder} \quad x = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2 a^2)}{(\lambda^2 a^2 + b^2)(\xi + \lambda\eta)}.$$

Setzt man diesen Wert in eine der ersten Gleichungen ein, so erhält man nach einiger Umformung als Gleichung des Ortes von Γ

$$(31) \qquad (\lambda a^2 \xi + b^2 \eta)(\xi + \lambda\eta) - \frac{\lambda(a^2 - b^2)^2(b^2 - \lambda^2 a^2)^2}{(\lambda^2 a^2 + b^2)^2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Hyperbel dar, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist und deren Asymptoten die Gleichungen

$$\lambda a^2 \xi + b^2 \eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi + \lambda\eta = 0$$

haben; die zweite dieser Asymptoten ist zu der Geraden $y = \lambda x$ senkrecht. Für $\lambda = \pm \frac{b}{a}$ fallen die Asymptoten zusammen, und die Hyperbel (31) artet aus in eine der beiden Doppelgeraden $(a\xi \pm b\eta)^2 = 0$, welche identisch sind mit den Geraden, auf welchen die Nebenscheitel der Ellipsen in *a)* und *b)* liegen.

Gleichung (31) bleibt unverändert, wenn man $\frac{b^2}{\lambda a^2}$ für λ setzt. Demnach entspricht den beiden Geraden $y = \lambda x$ und $y = \frac{b^2}{\lambda a^2} x$ in $[C]$ eine und dieselbe Hyperbel in $[\Gamma]$. Bei veränderlichem λ hat man den Satz: „*Dem Strahlenbüschel durch den Koordinatenanfangspunkt A in $[C]$ entspricht eine Doppelschar konzentrischer Hyperbeln mit A als gemeinsamem Mittelpunkt ein* $[\Gamma]$".

d) Punkt C durchlaufe die gegebene Ellipse (22). — Dann ist

$$b^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2, \quad a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2, \quad b^2 a^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Die Gleichungen (27) werden also

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3; \quad \eta = \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3.$$

Hieraus findet man

$$x^2 = a^2 \left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad y^2 = b^2 \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

und durch Einsetzen dieser Werte in (22)

$$(32) \qquad \left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,.$$

Dies ist die Gleichung der Evolute der gegebenen Ellipse, und man hat also den sich auch aus geometrischen Betrachtungen ergebenden Satz: „*Der gegebenen Ellipse* (22) *in* [C] *entspricht ihre Evolute* (32) *in* [Γ].“

Hieran mögen noch einige allgemeinere Betrachtungen geknüpft werden. Man erkennt leicht, daß die Gleichungen (27) unverändert bleiben, wenn man in ihnen $-\frac{a^2}{x}$ statt x und $-\frac{b^2}{y}$ statt y setzt. Macht man diese Substitutionen in (22), so erhält man die Gleichung einer Kurve vierten Grades (der bekannten „Kreuzkurve“):

$$(33) \qquad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1\,,$$

welcher ebenfalls die Evolute (32) entsprechen muß. Dies läßt sich auch mittels einer einfachen Rechnung bestätigen. Durch Elimination von y^2 aus (33) und der ersten Gleichung (27) erhält man nämlich $x = -\sqrt[3]{\frac{a^2(a^2 - b^2)}{\xi}}$ und durch Elimination von x^2 aus (33) und der zweiten Gleichung (27) $y = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - b^2)}{\eta}}$. Setzt man diese Werte in (33) ein, so ergibt sich (32). Die Kurve (33) besteht aus vier hyperbelähnlichen Zweigen, welche die Scheiteltangenten der Ellipse (22) zu Asymptoten haben.

Bezeichnet man zwei Punkte C_1 und C_2 in [C], für welche die Beziehungen $x_2 = -\frac{a^2}{x_1}$, $y_2 = -\frac{b^2}{y_1}$ bestehen, als reziproke Punkte, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß, wenn C_1 auf der Ellipse (22) liegt, sein reziproker Punkt C_2 ein Punkt der Kurve(33) ist und umgekehrt. Beiden Punkten entspricht dann in [Γ] ein und derselbe auf der Evolute (32) liegende Punkt Γ. Liegt C_1 innerhalb der Ellipse (22), so liegt sein reziproker Punkt C_2 innerhalb der Kurve (33) und umgekehrt; beiden Punkten entspricht jetzt ein außerhalb der Evolute (32) liegender Punkt Γ. Liegt endlich einer von zwei reziproken Punkten in dem Raume zwischen der Ellipse (22) und der Kurve (33), so liegt auch der andere in diesem Raume, und beiden entspricht ein innerhalb der Evolute (32) liegender Punkt Γ.

In letzterem Falle lassen sich sowohl von C_1 als auch von C_2 aus Tangenten an die Ellipse ziehen. Diese vier Tangenten schneiden einander außer in C_1 und C_2 noch in C_3, C_4, C_5, C_6. Offenbar entspricht allen diesen Punkten C ein und derselbe Punkt Γ. Die Punkte C_3 und C_4, desgleichen C_5 und C_6 sind reziproke Punkte, wenn die Bezeichnung so gewählt wird, daß keines dieser Punktepaare auf einer und derselben Geraden des von den Tangenten gebildeten Vierseits liegt.

Ist C_1 ein Punkt der Ellipse (22), so wird aus dem Vierseit ein Dreiseit; Punkt C_5 fällt mit C_3, Punkt C_6 mit C_4 zusammen. Wie schon oben erwähnt wurde, liegt in diesem Falle Punkt C_2 auf der Kurve (33) und der den Punkten C_1 und C_2 entsprechende Punkt Γ ist ein Punkt der Evolute (32). Derselbe Punkt Γ entspricht nach Vorstehendem aber auch den Punkten C_3 und C_4, und es muß daher außer der Ellipse (22) und der Kurve (33) noch eine dritte Kurve geben, welcher die Evolute (32) entspricht.

Für die Koordinaten der Punkte C_3 und C_4 findet man:

$$x_3 = \frac{a^2 y_1^2 + ab\sqrt{a^2 b^2 - x_1^2 y_1^2}}{b^2 x_1}; \quad y_3 = \frac{b^2 x_1^2 - ab\sqrt{a^2 b^2 - x_1^2 y_1^2}}{a^2 y_1};$$

$$x_4 = \frac{a^2 y_1^2 - ab\sqrt{a^2 b^2 - x_1^2 y_1^2}}{b^2 x_1}; \quad y_4 = \frac{b^2 x_1^2 - ab\sqrt{a^2 b^2 - x_1^2 y_1^2}}{a^2 y_1}.$$

Verbindet man entweder mit den beiden ersten oder mit den beiden letzten dieser Gleichungen die Gleichung der Ellipsentangente in C_1

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

und betrachtet x_3, y_3 bezw. x_4, y_4 als laufende Koordinaten, so kann man x_1, y_1 eliminieren und erhält unter Berücksichtigung der Gleichung $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$ als Ort des Punktes C_3 bezw. C_4 eine Kurve sechsten Grades, deren Gleichung

$$(34) \qquad (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(b^2 x^2 + a^2 y^2) + 8a^2 b^2 x^2 y^2 = 0$$

ist. Dieser Kurve in $[C]$ entspricht die Evolute (32) in $[\Gamma]$.

Bestimmt man die Schnittpunkte der in *a)* und *b)* betrachteten Parallelenscharen mit den Kurven (22), (33), (34), so ergibt sich, daß jede Gerade $x = c$ oder $y = d$ entweder die Ellipse (22) oder die Kurve (33) in zwei Punkten schneidet. Diesen Punkten in $[C]$ entsprechen in $[\Gamma]$ die Schnittpunkte der Ellipse (29) oder (30) mit der Evolute (32). Ferner schneidet jede der genannten Geraden die Kurve (34) in zwei Punkten; diesen Punkten in $[C]$ entsprechen zwei Punkte in $[\Gamma]$, in denen die Ellipse (29) oder (30) die Evolute (32) berührt. Aus letzterem folgt der Satz: „*Die Evolute* (32) *ist die Einhüllende der durch die Gleichungen* (29) *und* (30) *dargestellten Ellipsenscharen.*“

e) Punkt C durchlaufe die gleichseitige Hyperbel

$$(35) \qquad xy = \mu a b.$$

Dann erweitere man in den Gleichungen (27) die Brüche auf der rechten Seite mit x und setze $y^2 = \frac{\mu^2 a^2 b^2}{x^2}$.

Es ergibt sich

$$(36)\qquad \xi = \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - \mu^2 a^2)\,x}{x^4 + \mu^2 a^4}; \quad \eta = \frac{\mu a (a^2 - b^2)(x^2 - a^2)\,x}{b\,(x^4 + \mu^2 a^4)}.$$

Durch Division erhält man jetzt

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{b\,(x^2 - \mu^2 a^2)}{\mu a\,(x^2 - a^2)}$$

und hieraus

$$x^2 = \frac{\mu a^2 (a\xi - \mu b\eta)}{\mu a\xi - b\eta}; \quad x^2 - \mu^2 a^2 = \frac{\mu (1 - \mu^2) a^3 \xi}{\mu a \xi - b\eta}.$$

Setzt man diese Werte in die erste der Gleichungen (36) ein und dividiert durch ξ, so ergibt sich für den Ort des Punktes Γ

$$1 = \frac{(1 - \mu^2)(a^2 - b^2)\sqrt{\mu\,(a\xi - \mu b\eta)}\cdot\sqrt{\mu a\xi - b\eta}}{\mu\,[(a\xi - \mu b\eta)^2 + (\mu a\xi - b\eta)^2]}$$

oder

$$(37)\qquad \begin{aligned}&\mu\,[(a\xi - \mu b\eta)^2 + (\mu a\xi - b\eta)^2]^2\\ &- (1 - \mu^2)^2 (a^2 - b^2)^2 (a\xi - \mu b\eta)(\mu a\xi - b\eta) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt eine zentrische Kurve vierten Grades dar, die durch den Koordinatenanfangspunkt A geht und diesen zum Mittelpunkte hat. Sie wird von der Geraden $\eta = \lambda\xi$ geschnitten in 4 Punkten, deren Abscissen durch die Gleichung

$$\xi^2\{\mu[(a - \lambda\mu b)^2 + (\mu a - \lambda b)^2]^2\xi^2 - (1 - \mu^2)^2(a^2 - b^2)^2(a - \lambda\mu b)(\mu a - \lambda b)\} = 0$$

bestimmt sind. Zwei der Schnittpunkte fallen hiernach immer mit A zusammen; auch von den beiden andern gilt dies, wenn entweder $\lambda = \frac{a}{\mu b}$ oder $\lambda = \frac{\mu a}{b}$ ist. Demnach sind die Geraden

$$a\xi - \mu b\eta = 0 \quad \text{und} \quad \mu a\xi - b\eta = 0$$

die Tangenten der Kurve im Koordinatenanfangspunkt A. Die Kurve schneidet die Koordinatenachsen außer in A noch in je zwei Punkten, deren Abscissen bezw. Ordinaten

$$\xi = \pm\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\cdot\frac{a^2 - b^2}{a} \quad \text{und} \quad \eta = \pm\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\cdot\frac{a^2 - b^2}{b}$$

sind. Unendlich entfernte Punkte hat die Kurve nicht.

Ist $\mu = \pm 1$, d. h. geht die gleichseitige Hyperbel (35) durch zwei Schnittpunkte der Scheiteltangenten der Ellipse (22), so geht die Gleichung (37) über in

$$(a\xi \mp b\eta)^4 = 0.$$

Punkt Γ bewegt sich in diesem Falle auf einer der beiden Geraden $a\xi \mp a\eta = 0$, und zwar innerhalb einer gewissen Strecke, welche vierfach durchlaufen wird. Um diese Strecke zu bestimmen, differenziere man die erste der Gleichungen (36); man findet als Bestimmuug dafür, daß ξ entweder ein Maximum oder ein Minimum wird, die Gleichung

$$x^6 - 3\mu^2 a^2 x^4 - 3\mu^2 a^4 x^2 + \mu^4 a^6 = 0.$$

Setzt man hierin $\mu^2 = 1$, so erhält man

$$(a^2 + x^2)(a^4 - 3a^2x^2 + x^4) = 0,$$

woraus sich ergibt, daß ξ ausgezeichnete Werte annimmt für

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1 \pm \sqrt{3}),$$

worin die Vorzeichen beliebig kombiniert werden dürfen. Je zwei der Werte, die man hieraus für ξ erhält, fallen zusammen, so daß man als Abszissen der Grenzpunkte der zu bestimmenden Strecke $\xi = \pm \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{2}}{4a}$ findet.

Betrachtet man μ als veränderlich, so ergibt sich der Satz: „*Der Schar sämtlicher gleichseitiger Hyperbeln in* $[C]$, *welche die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben, entspricht eine Schar lemniskatenähnlicher Kurven vierten Grades in* $[\Gamma]$, *welche den Koordinatenanfangspunkt als gemeinsamen Mittelpunkt haben. Zu dieser Schar gehören auf den beiden Geraden* $a\xi \mp b\eta = 0$ *diejenigen Strecken, deren Endpunkte durch die Abscissen* $\xi = \pm \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{2}}{4a}$ *bestimmt werden.*"

III. Hyperbel.

1. *Entwickelung der Gleichungen für* ξ, η. — Die Gleichung der Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{38}$$

Man kann dasselbe Verfahren anwenden wie bei der Ellipse, nur daß man zur Einführung der Hilfswinkel φ_1 und φ_2 die Gleichungen

$$x_1 = \frac{a}{\cos\varphi_1}, \quad y = b \operatorname{tg}\varphi_1, \quad x_2 = \frac{a}{\cos\varphi_2}, \quad y_2 = b\operatorname{tg}\varphi_2$$

benutzt. Doch gelangt man schneller zum Ziele, wenn man in den Gleichungen (27) und in den folgenden $-b^2$ statt b^2 setzt. Dadurch ergibt sich

$$\xi = \frac{(a^2 + b^2)(b^2 + y^2)x}{b^2x^2 - a^2y^2}; \quad \eta = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - x^2)y}{b^2x^2 - a^2y^2}. \tag{39}$$

2. *Sich selbst entsprechende Punkte.* — Man findet wie in II, 2, daß nur die Brennpunkte sich selbst entsprechende Punkte sind.

3. *Entsprechende Kurvenscharen.*

a) Punkt C durchlaufe die Gerade $x = c$. — Dann erhält man aus (29) als Gleichung des Ortes von Γ

$$\begin{cases} a^2c(a^2 - c^2)^2\xi^2 - b^2c(a^2 + c^2)^2\eta^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - c^2)^3\xi \\ \qquad - (a^2 + b^2)^2(a^2 - c^2)^2c = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Hauptachse mit der ξ-Achse zusammenfällt und für deren Achsen f, g die Gleichung $\frac{g}{f} = \frac{a(a^2 - c^2)}{b(a^2 + c^2)}$ besteht. Die Abscissen der Scheitel und des Mittelpunktes sind

$$\xi_1 = \frac{a^2 + b^2}{c}; \quad \xi_2 = -\frac{(a^2 + b^2)c}{a^2}; \quad \xi_0 = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)}{2a^2c}.$$

Für $c = 0$ ergibt sich $\xi = 0$; $\eta = -\frac{a^2 + b^2}{y}$; die Ordinatenachse entspricht sich also selbst, und zwar in ähnlicher Weise wie in II, 3a.

Setzt man $c^2 = a^2$, d. h. durchläuft C eine der Scheiteltangenten der Hyperbel (38), so artet die Hyperbel (40) in diejenigen beiden Doppelstrahlen aus, welche, auf der ξ-Achse liegend, die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel der Hyperbel (38) als Anfangspunkte haben und sich nach entgegengesetzten Richtungen hin ins Unendliche erstrecken.

Läßt man c von a bis 0 abnehmen, so gestaltet sich die Sache ähnlich wie in II, 3a. Gleichung (40) stellt dann eine Schar von Hyperbeln dar, deren erster Zweig die Halbebene der negativen Abscissen vollständig ausfüllt, und für deren anderen Zweig der positive Teil der Evolute der Hyperbel (38) die einhüllende Kurve ist. Nimmt c noch weiter ab, von 0 bis $-a$, so erhält man die Schar der in Bezug auf die η-Achse zu den eben bezeichneten Hyperbeln symmetrisch liegenden Hyperbeln. Die Werte $c > a$ und $c < -a$ ergeben keine neuen Hyperbeln, da, wenn man in (40) $-\frac{a^2}{c}$ für c setzt, die Gleichung unverändert bleibt.

b) Punkt C durchlaufe die Gerade $y = d$. — Dann erhält man aus (30) als Gleichung des Ortes von Γ

$$(41) \quad \begin{cases} a^2d(b^2 - d^2)^2\xi^2 - b^2d(b^2 + d^2)^2\eta^2 - (a^2 + b^2)(b^2 + d^2)^3\eta \\ \qquad - (a^2 + b^2)^2(b^2 + d^2)^2d = 0. \end{cases}$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Hauptachse mit der η-Achse zusammenfällt, und für deren Achsen die Gleichung $\frac{g}{f} = \frac{b(b^2 + d^2)}{a(b^2 - d^2)}$ besteht. Die Ordinaten der Scheitel und des Mittelpunktes sind

$$\eta_1 = -\frac{(a^2 + b^2)d}{b^2}; \quad \eta_2 = -\frac{a^2 + b^2}{d}; \quad \eta_0 = -\frac{(a^2 + b^2)(b^2 + d^2)}{2b^2d}.$$

Für $d = 0$ ergibt sich $\xi = \frac{a^2 + b^2}{x}$, $\eta = 0$. Die Abscissenachse entspricht also sich selbst, und zwar in ähnlicher Weise wie in II, 3b.

Setzt man $d = \pm b$, so geht (41) über in $\eta = \mp \frac{a^2 + b^2}{b}$. Durchläuft also C eine Scheiteltangente der zur Hyperbel (38) konjugierten Hyperbel, so wird die Hyperbel (41) zu einer Doppelgeraden, welche der ξ-Achse parallel ist und durch den zum andern Scheitel der konjugierten Hyperbel gehörigen Krümmungsmittelpunkt geht.

Läßt man d von b bis 0 abnehmen, so bewegen sich auf der η-Achse η_1 von $-\frac{a^2 + b^2}{b}$ bis 0, η_2 und η_0 nach entgegengesetzter Richtung bis ins

Unendliche; gleichzeitig nimmt das Verhältnis $\frac{g}{f}$ von ∞ bis $\frac{b}{a}$ ab. Gleichung (41) stellt also in diesem Falle eine Schar von Hyperbeln dar, welche die ganze Halbebene der negativen Ordinaten und einen Teil der anderen Halbebene ausfüllen. Nimmt d noch weiter ab, von 0 bis $-b$, so erhält man die Schar der zu den eben bezeichneten Hyperbeln in Bezug auf die ξ-Achse symmetrisch liegenden Hyperbeln. Die Werte $d > b$ und $d < -b$ ergeben keine neuen Hyperbeln, da, wenn man in (41) $\frac{b^2}{d}$ für d setzt, die Gleichung unverändert bleibt.

c) Punkt C durchlaufe die Gerade $y = \lambda x$. — Dann erhält man aus (31) als Ort für Γ

$$(42) \qquad (\lambda a^2 \xi - b^2 \eta)(\xi + \lambda \eta) - \frac{\lambda (a^2 + b^2)^2 (b^2 + \lambda^2 a^2)^2}{(b^2 - \lambda^2 a^2)^2} = 0 .$$

Diese Gleichung stellt eine Hyperbel dar, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, und deren Asymptoten die Gleichungen

$$\lambda a^2 \xi - b^2 \eta = 0; \quad \xi + \lambda \eta = 0$$

haben; die zweite dieser Asymptoten ist zu der Geraden $y = \lambda x$ senkrecht. Für $\lambda = \pm \frac{b}{a}$, d. h. wenn C auf einer Asymptote der Hyperbel (38) liegt, werden ξ und η unendlich; es gibt dann also keinen im Endlichen liegenden Kurvenpunkt, was sich auch leicht durch geometrische Betrachtungen bestätigen läßt. Gleichung (42) bleibt unverändert, wenn man $-\frac{b^2}{\lambda a^2}$ für λ setzt. Demnach entspricht den beiden Geraden $y = \lambda x$ und $y = -\frac{b^2}{\lambda a^2} x$ in $[C]$ eine und dieselbe Hyperbel in $[\Gamma]$.

Bei veränderlichem λ hat man den Satz: „*Dem Strahlenbüschel durch den Koordinatenanfangspunkt A in $[C]$ entspricht eine Doppelschar konzentrischer Hyperbeln mit A als gemeinsamem Mittelpunkte in $[\Gamma]$.*"

d) Punkt C durchlaufe die gegebene Hyperbel (38). — Dann ist die durch die Gleichung

$$(43) \qquad \left(\frac{a\xi}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

dargestellte Evolute dieser Hyperbel der Ort des Punktes Γ. Da die Gleichungen (39) unverändert bleiben, wenn man in ihnen $-\frac{a^2}{x}$ für x und $\frac{b^2}{y}$ für y setzt, so entspricht die Evolute (43) auch der Kurve

$$(44) \qquad \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1 ,$$

und durch Wiederholung der Betrachtungen, welche sich an die Ellipsenevolute (32) knüpften, findet man, daß es noch eine dritte Kurve geben muß, der ebenfalls die Evolute (43) entspricht. Ihre Gleichung ist, wie man aus (34) erhält,

$$(45) \qquad (x^2 - a^2)(y^2 + b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2) + 8 a^2 b^2 x^2 y^2 = 0 .$$

Die Kurve (44) besteht aus zwei Zweigen, die zwischen den Scheiteltangenten der Hyperbel (38) liegen, diese zu Asymptoten haben und einander in A berühren. Hieraus ergibt sich, daß jede Gerade $x = c$ entweder die Hyperbel (38) oder die Kurve (44) in zwei Punkten schneidet. Diesen Schnittpunkten in $[C]$ entsprechen in $[\Gamma]$ die Schnittpunkte der Hyperbel (40) mit der Evolute (43). Ferner schneidet jede der genannten Geraden die Kurve (45) in zwei Punkten; diesen Punkten in $[C]$ entsprechen zwei Punkte in $[\Gamma]$, in denen die Hyperbel (40) die Evolute (43) berührt. Aus letzterem folgt der Satz: „*Die Evolute* (43) *ist die Einhüllende der durch die Gleichung* (40) *dargestellten Hyperbelschar.*" Weniger einfach sind die Beziehungen zwischen der Hyperbelschar (41) und der Evolute (43), wie daraus hervorgeht, daß jede der Geraden $y = d$ die Hyperbel (38) und die Kurve (44) in je zwei Punkten schneidet und außerdem noch die Kurze (45) in 2 oder 4 Punkten treffen kann.

e) Punkt C durchlaufe die gleichseitige Hyperbel $xy = \mu ab$. — Dann erhält man nach demselben Verfahren wie in II, 3e als Gleichung des Ortes von Γ

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\mu[(a\xi - \mu b\eta)^2 - (\mu a\xi + b\eta)^2]^2 \\ &- (1+\mu^2)^2(a^2+b^2)^2(a\xi - \mu b\eta)(\mu a\xi + b\eta) = 0\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt eine zentrische Kurve vierten Grades dar, die durch den Koordinatenanfangspunkt A geht und diesen zum Mittelpunkte hat. Die Kurve wird von der Geraden $\eta = \lambda\xi$ in vier Punkten geschnitten, deren Abscissen bestimmt sind durch die Gleichung

$$\xi^2\{\mu[(a-\lambda\mu b)^2-(\mu a+\lambda b)^2]^2\xi^2-(1+\mu^2)^2(a^2+b^2)^2(a-\lambda\mu b)(\mu a+\lambda b)\}=0.$$

Zwei der Schnittpunkte fallen hiernach immer mit A zusammen; auch von den beiden andern gilt dies, wenn entweder $\lambda = \frac{a}{\mu b}$ oder $\lambda = -\frac{\mu a}{b}$ ist. Demnach sind die Geraden

$$a\xi - \mu b\eta = 0 \quad \text{und} \quad \mu a\xi + b\eta = 0$$

die Tangenten der Kurve in A. Die Gerade $\eta = \lambda\xi$ schneidet die Kurve in unendlich entfernten Punkten, wenn

$$(a-\lambda\mu b)^2-(\mu a+\lambda b)^2=[(a-\lambda\mu b)+(\mu a+\lambda b)][(a-\lambda\mu b)-(\mu a+\lambda b)]=0$$

ist, d. h. wenn entweder $\lambda = \frac{a(\mu+1)}{b(\mu-1)}$ oder $\lambda = \frac{a(1-\mu)}{b(1+\mu)}$ ist. Daher haben die Geraden

$$(47)\qquad (\mu+1)a\xi - (\mu-1)b\eta = 0 \quad \text{und} \quad (\mu-1)a\xi + (\mu+1)b\eta = 0$$

einen unendlich entfernten Punkt mit der Kurve gemein; doch ist nur die zweite dieser Geraden ein Asymptote, da der unendlich entfernte Punkt der ersten Geraden ein singulärer Punkt der Kurve ist. Die Kurve schneidet die Abscissenachse außer in A noch in den Punkten, deren Abscissen $\xi = \pm\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a}$ sind; die Ordinatenachse wird außer in A in reellen Punkten nicht getroffen.

Bei veränderlichem μ hat man den Satz: *„Der Schar sämtlicher gleichseitiger Hyperbeln in [C], welche die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben, entspricht eine Schar Kurven vierten Grades in [Γ], welche den Koordinatenanfangspunkt als gemeinsamen Mittelpunkt haben. Jede dieser Kurven besteht aus zwei sich bis ins Unendliche erstreckenden Zweigen, die einander in A schneiden, und für welche die zweite der Geraden (47) gemeinsame Asymptote ist; jede der Kurven enthält außerdem den unendlich entfernten Punkt der ersten der Geraden (47) als singulären Punkt.“*

Ist die Hyperbel (38) gleichseitig, so vereinfachen sich die gefundenen Resultate. Die Hyperbeln der Schar (42) sind in diesem Falle ebenfalls gleichseitig.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **68.** (Bd. IV, S. 349) (E. N. Barisien). Die Ellipse sei durch die Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

gegeben; die Gleichungen der Asymptoten der gesuchten gleichseitigen Hyperbel seien

$$y = \lambda x + p, \quad y = -\frac{x}{\lambda} + q. \tag{2}$$

Bezeichnet man den konstanten Inhalt des Rechtecks, das durch die beiden von einem Hyperbelpunkte aus auf die Asymptoten gefällten Lote gebildet wird, mit c^2, so ergibt sich als Gleichung der Hyperbel

$$(y - \lambda x - p)(\lambda y + x - \lambda q) = (1 + \lambda^2)c^2. \tag{3}$$

Sie soll durch die Endpunkte der großen Achse der Ellipse gehen; daraus erhält man die beiden Gleichungen

$$(-\lambda a - p)(a - \lambda q) = (1 + \lambda^2)c^2; \quad (\lambda a - p)(-a - \lambda q) = (1 + \lambda^2)c^2.$$

Aus ihnen findet man $\lambda = \sqrt{\frac{p}{q}}$; $c^2 = \frac{(pq - a^2)\sqrt{pq}}{p + q}$, und durch Einsetzen dieser Werte geht (3) über in

$$x^2 + \frac{p - q}{\sqrt{pq}}xy - y^2 + (p + q)y - a^2 = 0. \tag{4}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (2) erhält man als Koordinaten des Mittelpunkts der Hyperbel (4)

$$\xi = \frac{(q - p)\sqrt{pq}}{p + q}, \quad \eta = \frac{2pq}{p + q},$$

und hieraus folgt:

$$pq = \xi^2 + \eta^2, \quad \frac{q - p}{\sqrt{pq}} = \frac{2\xi}{\eta}; \quad p + q = \frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{\eta}.$$

Setzt man dies in (4) ein, so wird die Gleichung der Hyperbel

$$x^2 - \frac{2\xi}{\eta}xy - y^2 + \frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{\eta}y - a^2 = 0. \tag{5}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit b^2 und subtrahiert von ihr Gleichung (1), so ergibt sich

$$y\left[-\frac{2b^2\xi}{\eta}x - (a^2+b^2)y + \frac{2b^2(\xi^2+\eta^2)}{\eta}\right] = 0,$$

also entweder $y = 0$, und dies bezieht sich auf die Endpunkte der großen Achse der Ellipse, oder

$$y = -\frac{2b^2\xi}{(a^2+b^2)\eta}x + \frac{2b^2(\xi^2+\eta^2)}{(a^2+b^2)\eta}, \tag{6}$$

und dies ist die Gleichung der zweiten gemeinsamen Sehne der Ellipse (1) und der Hyperbel (5). Die Bedingung dafür, daß sich beide Kurven berühren, ist die, daß die Gerade (6) gemeinsame Tangente werde, also nach bekannter Formel

$$b^2 + a^2\left[\frac{2b^2\xi}{(a^2+b^2)\eta}\right]^2 - \left[\frac{2b^2(\xi^2+\eta^2)}{(a^2+b^2)\eta}\right]^2 = 0$$

oder

$$(a^2+b^2)^2\eta^2 + 4a^2b^2\xi^2 - 4b^2(\xi^2+\eta^2)^2 = 0.$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + \frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2}y^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$r^2 = a^2\cos^2\vartheta + \frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2}\sin^2\vartheta. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion: Um den Koordinatenanfangspunkt O schlage man zwei Kreise mit den Radien a und $\frac{a^2+b^2}{2b}$; sodann ziehe man von O aus einen Strahl, der mit der Abscissenachse den beliebigen Winkel ϑ bildet und den ersten Kreis in A, den zweiten in B schneidet. Durch A lege man die Parallele zur y-Achse, durch B die zur x-Achse; der Schnittpunkt beider Parallelen sei C. Endlich trage man auf OA die Strecke $OP = OC$ ab. Dann ist P ein Punkt der Kurve (7). Eine Diskussion dieser Kurve findet man in „Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 1. Teil, 2. Auflage, Leipzig, Teubner, 1873" auf S. 83, No. 15.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **69.** (Bd. IV, S. 349) (E. N. Barisien). Die erste Behauptung gilt für jedes beliebige Dreieck; der Kreis Σ' ist der Feuerbachsche Kreis. Die zweite Behauptung folgt daraus, daß das Dreieck AMB rechtwinklig ist; die Kreise Σ und Σ' berühren einander im Punkte M.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **71.** (Bd. IV, S. 349) (K. Cwojdziński). Gegeben sei Dreieck ABC und die Gerade g. Von A, B, C aus fälle man auf g die Lote AD, BE, CF, ferner von D, E, F aus auf BC, CA, AB die Lote DG, EH, FJ. Die drei letzten Lote schneiden sich im Lotpunkte L. Fällt man nun noch von L aus auf g das Lot LK, so ist $LK = \delta$ zu bestimmen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß, wenn man die Gerade g parallel mit sich selbst verschiebt, die Punkte D, E, F ihre gegenseitige Lage beibehalten; da auch die Geraden DG, EH, FJ eine Parallelverschiebung erleiden, so bleiben die Dreiecke LEF, LFD, LDE unverändert und die Strecke δ ist also für parallele Gerade eine konstante Größe. Man kann daher die Gerade g durch eine ihr parallele Gerade g' ersetzen. Diese werde durch den Scheitelpunkt A desjenigen Dreieckswinkels gelegt, der von ihr innerlich geteilt wird; die Seite BC werde von g' in M getroffen. Konstruiert man jetzt, wie oben angegeben wurde, so fällt Punkt D mit A und die Gerade DG mit der von A ausgehenden Dreieckshöhe zusammen. Es ist dann

$$\delta = LK = AL \cdot \cos ALK = AL \cdot \cos AMG = AL \cdot \cos \varphi_1;$$

$$AL = \frac{AF \cdot \sin AFL}{\sin ALF} = \frac{AF \cdot \cos FAJ}{\sin ABC} = \frac{AF \cdot \cos \varphi_3}{\sin \beta};$$

$$AF = CA \cdot \cos CAF = 2r \sin \beta \cos \varphi_2 .$$

Mithin

$$AL = 2r \cos \varphi_2 \cos \varphi_3; \quad \delta = 2r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 .$$

Prenzlau. W. STEGEMANN.

---

2. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I, S. 993, Note 272.

Es ist kein hergebrachter *Irrtum*, sondern durchaus *sachgemäß*, die natürlichen Logarithmen als Napiersche zu bezeichnen. Wenn man Napiers ursprüngliche Logarithmen unwesentlich umformt, nämlich ein Komma hineinsetzt und, worauf Napier ausdrücklich hinweist, das Vorzeichen anders wählt, so erhält man ein Logarithmensystem, dessen Basis genau die transcendente Zahl e ist. Beschränkt man sich auf die Einsetzung des Komma, so wird die Basis allerdings $1/e$. Die beiden Zahlen e und $1/e$ sind aber als Grundzahlen von Logarithmensystemen einander völlig gleichwertig. Die Betrachtungen, durch welche Napier in der Constructio von seiner vorläufigen Basis $(1-10^{-7})^{10^7}$ zur echten Basis $1/e$ übergeht, sind genial und der höchsten Bewunderung würdig, sie werden durch die Gleichung $dy = dx/x$ genau umschrieben.

Dagegen haben Bürgis Logarithmen, nachdem sie gleichfalls durch Einsetzung eines Komma auf moderne Form gebracht sind, zur Basis die rationale Zahl $(1+10^{-4})^{10^4}$, die mit der Zahl e auf 4 Dezimalstellen übereinstimmt, theoretisch aber mit ihr nicht die geringste Verwandtschaft zeigt.

Man vergleiche Napiers Constructio, besonders auch die englische Übersetzung von William Rac Macdonald, Edinburgh u. London, 1889 und Paul Tannery, Anzeige der phototypischen Nachbildung der Constructio in Darboux Bulletin, ferner M. Koppe: Die Behandlung der

Logarithmen und der Sinus im Unterricht, und M. Koppe: Rezension zu Gravelaar, Napiers Werken, Bibl. math., 1901, **3**, 150—152.

Berlin. M. Koppe.

Es scheint der Redaktion — im wesentlichen in Übereinstimmung mit einem ihr zur Verfügung gestellten Schreiben des Herrn Professor Mehmke, des Verfassers des Encyklopädieartikels I F — daß hier weniger eine sachliche Differenz, als ein Unterschied in der Auffassung vorliegt. Herr Koppe gibt zu, daß Napiers Logarithmen wie sie uns überliefert sind, die Basis $1/e$ haben. Wenn Herr Koppe die Änderung des Vorzeichens, um auf die Basis e zu kommen, nur für eine unwesentliche Umformung hält, so ist eben darin Herr Mehmke anderer Meinung; er weist in seinem Artikel (Encyklop. I, S. 986 oben) darauf hin, daß es gar nicht üblich ist, negative Logarithmen zu schreiben. Oder um es drastisch auszudrücken, was würde man sagen, wenn bei einer Tafel der $\log \operatorname{cotg} x$ in der Überschrift $\operatorname{tg} x$ statt $\operatorname{cotg} x$ stände?

Daß bei Bürgi die Basis nicht genau, sondern nur bis auf eine gewisse Anzahl von Dezimalen gleich e ist, wie Herr Koppe angibt, ist vollkommen richtig; Herr Mehmke ist in seinem Artikel der Kürze halber nicht darauf eingegangen, da für ihn die natürlichen Logarithmen überhaupt keine wichtige Rolle spielten. Wenn Herr Mehmke die Verdienste von Bürgi besonders betont hat, so ist das geschehen, weil die Engländer jene Verdienste eben nicht haben anerkennen wollen, jedenfalls sie nicht anerkannt haben.

Anmerkung der Redaktion.

Der wahre Sachverhalt läßt sich nur aus den Quellen feststellen. Sie geben ein eindeutiges Resultat, welches für persönliche Auffassung keinen Spielraum läßt. In den modernen Handbüchern sind sie nicht ausreichend analysiert.

Der wesentlichste Punkt ist, daß Napier von der vorläufigen Basis $(1 - 10^{-7})^{10^7}$ zu der definitiven Basis $1/e$ übergegangen ist, daß er somit die von ihm erdachte Definition $y = -\int_1 \frac{dx}{x}$ genau zur Grundlage seiner ausführlichen Tabelle gemacht hat. Die vorläufige Basis war eine rationale Zahl, die mit e^{-1} auf 7 Stellen übereinstimmt. Schon Wittstein in der Einleitung seiner Logarithmen-Tafel sieht die Einsetzung des Komma und die Änderung des Vorzeichens, die ja Napier selbst schon erwähnt hat, als eine unwesentliche Modernisierung an, er glaubt aber als wesentlichen Unterschied zwischen Napierschen und natürlichen Logarithmen hervorheben zu müssen, daß jene die rationale Zahl $(1 - 10^{-7})^{10^7}$, nicht e oder $1/e$ zur Basis hätten. Diese letzte Annahme erkennt man aber gerade als falsch, wenn man nicht nur die Gebrauchsanweisung (Descriptio), sondern auch die Constructio, die theoretische Entwicklung der neuen Erfindung, zu Rate zieht. Kewitsch hat sich, wie Wittstein, mit der Descriptio begnügt, daher ist seine, von Cantor und von Mehmke ohne weiteres angenommene Formulierung nur eine Annäherung an die Wahrheit, die in einer künftigen Geschichte der Mathematik nicht mehr die erste Linie behaupten wird.

Der Hinweis auf Encykl. I, S. 986, „negative Logarithmen seien gar nicht üblich“ ist ungenau. Denn jene Stelle handelt nur von Briggischen Logarithmen. Diese werden allerdings nicht nur heute — was ja für unsere geschichtliche Frage nicht in Betracht käme — sondern wurden schon von Briggs und Wallis in folgender Weise umgewandelt

$$\log 1/\pi = -0{,}49715 = 0{,}50285 - 1.$$

Eine derartige, auf S. 986 besprochene, Umformung wäre aber für natürliche Logarithmen nicht sachgemäß, man muß nicht setzen

$$\ln 1/\pi = -1{,}14473 = 0{,}85527 - 2,$$

sondern nach Napiers Anweisung

$$\ln 1/\pi = -1{,}14473 = 1{,}15786 - 2{,}30259, \quad \text{d. h.} \quad = 1{,}15786 - \ln 10,$$

woraus $\frac{1}{\pi} = 3{,}1831 : 10$ wird. Wirklich brauchbare Tafeln — nicht Listen — natürlicher Logarithmen sind heute kaum vorhanden, ihr Numerus müßte von 1,000 bis 9,999 gehen, nicht etwa von 100,0 bis 999,9.

Wenn in einer Tafel statt der Überschrift $\log \cot x$ stände $\log \operatorname{tg} x$, so würde ich verlangen, daß auch $\log \sin x$ in $\log \operatorname{cosec} x$, $\log \cos x$ in $\log \sec x$ geändert würde. Dann ließe sich mit ihr sehr gut jede Aufgabe aus der sphärischen Trigonometrie lösen. Daß diese Tafel mit der Basis $\frac{1}{10}$ von der Briggischen wesentlich verschieden wäre, wird wohl niemand sagen.

Eine Zeile in Napiers Tafel lautet:

	Sinus	Logarithmus	Differentiae $+ \mid -$	Logarithmus	Sinus	
30° 0′	5 000 000	6 931 469	5 493 059	1 438 410	8 660 254	60° 0′

Die mittelste Kolumne enthält $\log \operatorname{tg} 30^0$ oder $\log \operatorname{tg} 60^0$ je nach der Wahl des Vorzeichens. Napier wußte also sehr wohl negative Logarithmen zu verwenden.

Berlin. M. Koppe.

Zu III 3, S. 84.

A la pag. 84 du t. III_3 on parle de ce fait, que, pour déterminer complètement la forme d'une courbe dans l'espace, il est nécessaire et suffisant de connaître les expressions de la courbure et de la torsion en fonction de l'arc. Or cette importante proposition se trouve déjà implicitement dans la *Mécanique analytique* de Lagrange; mais elle a été énoncée (sinon auparavant) par Bertrand en 1853 dans la dernière note au Chap. III de la Sect. V (1ère Partie) de cet ouvrage. On lit en effet au bas de la pag. 182 du t. XI des *Oeuvres de Lagrange* (Paris 1888): „On voit, d'après les résultats précédents, que deux courbes sont superposables lorsque les rayons de première et de seconde courbure s'expriment, dans l'une et dans l'autre, par une même fonction de l'arc. Etc.»

Gênes. Gino Loria.

Berichtigung zu I B 1 b.

S. 263, Zeile 10—26. Die Bedenken gegen die Sylvestersche Eliminationsmethode sind leicht zu heben. Nämlich bei der Anwendung auf die homogenen Gleichungen

$$z_1^n = 0, \quad z_2^n = 0, \quad z_3^n = 0$$

resp.

$$z_1^2 = 0, \quad z_2^2 = 0, \quad z_3^2 = 0, \quad z_4^2 = 0$$

gewinnt man bei der Elimination eine Determinante, in der (nach passender Anordnung der Zeilen) die Elemente der Hauptdiagonale gleich 1, die übrigen Elemente aber 0 sind. Damit ist bewiesen, daß die fraglichen Relationen von einander unabhängig sind.

Budapest. JOSEF KÜRSCHÁK.

3. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

APPELL, P., et CHAPPUIS, J., Leçons de mécanique élémentaire. Paris 1903, Gauthier-Villars. 117 S. Fr. 2.75.

APPELL, P., Traité de mécanique rationnelle. Tome troisième: Equilibre et mouvement des milieux continus. Paris 1903, Gauthier-Villars. 558 S.

ARRHENIUS, J. A., Lehrbuch der kosmischen Physik I, II. Leipzig 1903, S. Hirzel. 1026 S. M. 38.

ASTRONOMISCHER Kalender für 1903. Wien, C. Gerold. M. 2.40.

BOLTZMANN, L., Über die Prinzipien der Meckanik. Zwei akademische Antrittsreden. Leipzig 1903, S. Hirzel. 48 S. M. 1.

BOREL, E., Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris 1903, Gauthier-Villars. 112 S. Fr. 3.50.

v. BRAUNMÜHL, B., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Zweiter Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 264 S.

CANTOR, M., Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Zweite Auflage. Leipzig 1903. B. G. Teubner. 155 S.

CARVALLO, E., L'électricité déduite de l'expérience et ramenée au principe des travaux virtuels. Scientia No 19. Paris 1903, C. Naud, 91 S.

CZUBER, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. II. S. 305—594. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

ENCYKLOPÄDIE der mathematischen Wissenschaften. Band III_2. Heft 1: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Von Friedrich Dingeldey.

ENCYKLOPÄDIE der Math. W. Band V_1. Heft 1: Maß und Messen. Von C. Runge. — Gravitation. Von J. Zenneck. — Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik. Von G. H. Bryan.
Band IV_2, Heft 2: Aërodynamik. Von S. Finsterwalder. — Ballistik. Von C. Cranz.

FABRE, C., Aide-Mémoire de photographie pour 1903. (3) 8. Paris 1903, Gauthier-Villars, 340 S.

FORTSCHRITTE der Physik, dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1899, 55. Jahrgang; redigiert von R. Börnstein, K. Scheel und R. Assmann. 1. Abt. Physik der Materie. M. 26. — 2. Abt. Physik des Äthers. M. 34. — 3. Abt. Kosmische Physik. M. 20.

FRANKENBACH, W., Die den merkwürdigen Punkten des Dreiecks entsprechenden einbeschriebenen und umbeschriebenen Kegelschnitte. Eine analytische Betrachtung unter Anwendung homogener Koordinaten. Progr. Realschule Liegnitz 1903, R. Wagner. 44 S.

Güszfeldt, P., Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. Braunschweig 1903, Vieweg. 377 S. M. 10.

Gutknecht, A., Integrallogarithmus. Inaug.-Diss. Bern 1903. 55 S.

Halbmonatliches Literaturverzeichnis der Fortschritte der Physik. Dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, redigiert von K. Scheel und R. Assmann.

Humbert, G., Cours d'analyse. Tome I. Paris 1903, Gauthier-Villars. 483 S. Fr. 16.

Königsberger, L., Hermann v. Helmholtz. Zweiter und dritter Band. Braunschweig 1903, Vieweg und Sohn.

Krazer, A., Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 509 S.

Kundt, A., Vorlesungen über Experimentalphysik. Her. von K. Scheel, Braunschweig 1903, F. Vieweg. 852 S. M. 15.

Manno, R., Theorie der Bewegungsübertragung als Versuch einer neuen Grundlegung der Mechanik. Leipzig 1903, W. Engelmann. 102 S.

Martus, H., Maxima und Minima. Zweiter unveränderter Abdruck. Hamburg 1903, H. Grand. 127 S.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 18. Band 1900. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Melinat, G., Physik für deutsche Lehrerbildungsanstalten. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 479 S.

Müller, C. H., und Presler, O., Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A für Realgymnasien und Oberrealschulen. M. 4. — Ausgabe B für Gymnasien und Realschulen. M. 2.

d'Ocagne, M., Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie. (Extrait du Journal de l'Ecole Polyt. (2) 8) Paris 1903, Gauthier-Villars. 62 S.

Opitz, R. S., Über das erste Problem der Dioptrik. Progr. des Königstädt. Realgymn. Berlin 1903, Weidmann. 26 S.

Perrin, J., Traité de chimie physique. Les principes. Paris 1903, Gauthier-Villars, 299 S.

Prytz, H., Om tal til fortsaettelse af regneundervisningen. Kopenhagen 1903, Lehmann u. Stages. 32 S.

Putscher, H., Rechentafel. System Groll. Dresden.-A.

Richard, J., Sur la philosophie des Mathématiques. Paris 1903, Gauthier-Villars 244 S. 3,25 Fr.

Righi, A., und Dessau, B., Die Telegraphie ohne Draht. Braunschweig 1903, Vieweg. 481 S. M. 12.

Ruszner, Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Hannover 1903, Jänecke. 498 S.

Schilling, M., Katolog mathematischer Modelle. Halle a. S. 1903.

Thienemann, W., Die von Quadraten und gleichseitigen Dreiecken begrenzten Eulerschen Vielflache, deren Ecken dieselbe Anzahl Kanten besitzen. Progr. Gymn. Essen. 1903. 16 S.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 74. Versammlung zu Karlsbad. Erster Teil: Die allgemeinen Sitzungen, die Gesamtsitzung beider Hauptgruppen und die gemeinschaftlichen Sitzungen der naturwissenschaftlichen und der medizinichen Hauptgruppe. Leipzig 1903, W. Vogel.

Voigt, W., Thermodynamik I. Sammlung Schubert 39. Leipzig 1903, Göschen. 360 S.

Weiler, W., Physikbuch. IV: Kalorik (M. 1.50); V: Optik (M. 2.50). München 1903, Schreiber.

Weishaupt, H., Das Ganze des Linearzeichnens. Abteilung IV. Axonometrie und Perspektive. Leipzig 1903, H. Zieger. 234 S.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I. Teil: Reine Mathematik. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 416 S.

Zühlke, P., Über die Vervielfältigung von Kreisbogendreiecken nach dem Symmetriegesetze. Programm der Charlottenb. Oberrealschule. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 22 S.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

12. Sitzung am 17. Dezember 1902.

Vorsitz: Herr Kneser.
Anwesend: 33 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Fürle: Über einige Rechenblätter (s. u.).
Herr Hamburger: Über das Cauchysche Integral (s. u.).
Herr Kneser: Referat über Heft 3, Bd. 56 der Math. Annalen.
An der Diskussion beteiligen sich die Herren: Faerber, Fürle, Hessenberg, Jahnke, Kneser, Landau, Steinitz.

13. Sitzung am 28. Januar 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.
Anwesend: 39 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Lampe: Elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur (s. u.).
Herr Hessenberg: Über die projektive Geometrie (s. u.).
Herr Wallenberg: Referat über die Arbeiten von Painlevé betr. die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen.
An der Diskussion beteiligen sich die Herren: Dziobek, Hessenberg, Jahnke, Knoblauch, Koppe, Lampe, F. Müller, Skutsch, Steinitz.

Über das Cauchysche Integral.

Von M. Hamburger.

Nach dem Satze von Cauchy läßt sich jede innerhalb einer begrenzten Fläche stetige Funktion $f(x)$ für alle Punkte innerhalb der Begrenzung durch das Integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z - x} \tag{1}$$

ausdrücken, worin das Integral über alle Punkte z der Begrenzungslinie erstreckt ist. Bekanntlich können aber die Werte auf der Begrenzungslinie

nicht willkürlich vorgeschrieben werden. Sind z. B. die reellen Teile dieser Werte gegeben, so sind die imaginären Teile bis auf eine Konstante dadurch mitbestimmt. Andererseits ergibt jedoch der Integralausdruck auf der rechten Seite von (1) bei willkürlich vorgegebenen Werten in den Punkten der Begrenzung, falls sie nur so gewählt sind, daß die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt sind, eine bestimmte und zwar stetige Funktion von x. Nur ist zu erwarten, daß diese Funktion, die wir mit $F(x)$ bezeichnen wollen, an den Punkten der Grenze im allgemeinen andere als die vorgeschriebenen Werte erhalten wird. Es fragt sich, in welcher Beziehung diese Werte zu einander stehen. Mit der gefundenen Beziehung ergibt sich zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschaffenheit der gewählten Randwerte, damit eine in der Fläche stetige Funktion mit diesen Randwerten existiere. Nehmen wir zunächst als Fläche einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius R an. Setzt man $z = Re^{\vartheta i}$, so werden die Werte auf dem Kreisumfang durch eine willkürliche eindeutige Funktion von ϑ auszudrücken sein, die die Periode 2π hat. Eine solche läßt sich allgemein und nur auf eine einzige Weise durch die Reihe

$$f(Re^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_\varkappa e^{\varkappa \vartheta i} \tag{2}$$

darstellen, wobei die Koeffizienten $a_\varkappa$ durch die Integrale

$$a_\varkappa = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{\vartheta i})\, e^{-\varkappa \vartheta i} d\vartheta \tag{3}$$

eindeutig gegeben sind. Die einzige Voraussetzung, die hier gemacht wird, ist also, daß diese Integrale bestimmte Werte haben. Das zu untersuchende Integral (1) über die Kreislinie erhält bei der Substitution $z = Re^{\vartheta i}$ die Gestalt

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{\vartheta i})\, Re^{\vartheta i}\, d\vartheta}{Re^{\vartheta i} - x}. \tag{4}$$

Für alle Punkte im Innern des Kreises, wo $|x| < R$ ist, gilt die Reihenentwickelung

$$\frac{Re^{\vartheta i}}{Re^{\vartheta i} - x} = 1 + \frac{x}{R} e^{-\vartheta i} + \frac{x^2}{R^2} e^{-2\vartheta i} + \cdots,$$

und das Integral (4) wird wegen (3)

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + a_1 \frac{x}{R} + a_2 \frac{x^2}{R^2} + \cdots \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \frac{x^\varkappa}{R^\varkappa}. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man, um die Werte von $F(x)$ an den Punkten des Grenzkreises zu erhalten, $x = Re^{\vartheta i}$, so erhält man

$$F(Re^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa e^{\varkappa \vartheta i}.$$

Diese Werte unterscheiden sich von den vorgeschriebenen, durch die Reihe (2) dargestellten Werten $f(z)$ dadurch, daß die Glieder mit den negativen Potenzen von $e^{\vartheta i}$ sämtlich fortgefallen sind. Der Unterschied reduziert sich auf Null, wenn man für $f(Re^{\vartheta i})$ einen beliebigen Ausdruck von der Form $\sum_{\varkappa} a_\varkappa e^{\varkappa \vartheta i}$ nimmt, wo die endliche oder unendliche Summe nur über positive ganze Zahlen, die Null inbegriffen, erstreckt wird. Diese Form für die Randwerte ist daher die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man durch das Cauchysche Integral eine Funktion $f(x)$ erhält, die an den Punkten des Grenzkreises die Werte $f(Re^{\vartheta i})$ annimmt. $f(x)$ ist dann durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa x^\varkappa}{R^\varkappa}$$

darstellbar.

Hieraus ergibt sich leicht der Satz, daß eine Funktion im Innern des Kreises bis auf eine rein imaginäre Konstante vollkommen bestimmt ist, wenn der reelle Teil an der Grenze einen dort allenthalben beliebig gegebenen Wert annimmt. Denn, da nach dem Obigen an der Grenze $f(Re^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa e^{\varkappa \vartheta i}$ sein muß, so ist, wenn $a_\varkappa = \alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ gesetzt wird, der reelle Teil u von $f(z)$ durch die Reihe

$$u = \alpha_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (\alpha_\varkappa \cos \varkappa\vartheta - \beta_\varkappa \sin \varkappa\vartheta)$$

ausgedrückt. Nach dem Fourierschen Theorem sind aber die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ durch die Werte von u für alle ϑ eindeutig bestimmt; damit sind auch $a_1, a_2, \ldots$ und der reelle Teil von a_0 mit u bekannt. Die Funktion $f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \frac{x^\varkappa}{R^\varkappa}$ ist also bis auf die willkürlich gebliebene Konstante $\beta_0 i$ vollständig bestimmt.

Es fragt sich, welche Bedeutung die ausgelassenen Glieder mit negativen Potenzen in der die vorgeschriebenen Randwerte darstellenden Reihe $\sum a_\varkappa e^{\varkappa \vartheta i}$ für das Cauchysche Integral haben. Diese kommen in Betracht, wenn man den Wert des Integrals für Punkte x außerhalb des Kreises bestimmen will. Bezeichnen wir in diesem Falle mit $F(x)$ das Integral $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ in entgegengesetzter Richtung genommen, da für Punkte außerhalb diese Richtung als die des positiven Umlaufs zu betrachten ist, setzen wir also

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{\vartheta i})\, Re^{i\vartheta}\, d\vartheta}{x - Re^{\vartheta i}},$$

so ist, da jetzt $|x| > R$

$$\frac{Re^{i\vartheta}}{x - Re^{i\vartheta}} = \frac{Re^{\vartheta i}}{x} + \frac{R^2 e^{2i\vartheta}}{x^2} + \frac{R^3 e^{3i\vartheta}}{x^3} + \cdots,$$

und da

$$a_{-\varkappa} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{\vartheta i})\, e^{\varkappa i\vartheta}\, d\vartheta,$$

so wird

$$F(x) = a_{-1}\frac{R}{x} + a_{-2}\frac{R^2}{x^2} + a_{-3}\frac{R^3}{x^3} + \cdots$$

eine Reihe, die an der Grenze $x = Re^{\vartheta i}$ in

$$a_{-1}e^{-\vartheta i} + a_{-2}e^{-2\vartheta i} + a_{-3}e^{-3\vartheta i} + \cdots$$

übergeht. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man durch das Cauchysche Integral eine Funktion erhält, die in dem Bereiche außerhalb des Kreises stetig ist und auf der Kreislinie vorgeschriebene Werte erhält, ist demnach die, daß die nach Potenzen von $e^{\vartheta i}$ entwickelte Reihe für $f(Re^{\vartheta i})$ nur Glieder mit negativen Potenzen enthält. Die Koeffizienten a_{-1}, $a_{-2}, \ldots$ liefern dann für die Funktion auf dem betrachteten Gebiete den Ausdruck durch die Reihe

$$f(x) = a_{-1}\frac{R}{x} + a_{-2}\frac{R^2}{x^2} + a_{-3}\frac{R^3}{x^3} + \cdots$$

Diese Funktion ist, wie sich aus einer der obigen analogen Betrachtung ergibt, durch die Kenntnis der reellen Bestandteile der Randwerte vollständig (also nicht bis auf eine rein imaginäre Konstante) bestimmt. Dafür muß sie noch die Bedingung erfüllen, für $x = \infty$ zu verschwinden.

Verschwinden die Glieder mit negativen Potenzen in der die vorgeschriebenen Randwerte darstellenden Reihe $f(z)$, so wird das Cauchysche Integral $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ für jeden Punkt x außerhalb des Kreises gleich Null, wie auch umgekehrt das Verschwinden dieses Integrals für $|x| > R$ das Verschwinden der Glieder mit negativen Indices in der Reihe für die Randwerte von $f(z)$ zur Folge hat. Man kann daher die Bedingung dafür, daß das Cauchysche Integral für Punkte im Innern des Kreises eine Funktion bestimmt, die am Rande die Werte $f(z)$ annimmt, auch dahin aussprechen, daß dieses Integral für Punkte außerhalb des Kreises verschwinde. In dieser Form läßt sich die Bedingung auf Flächenteile, die von beliebigen Kurven begrenzt sind, ausdehnen. Die Wahl der Randwerte von $f(z)$ muß so geschehen, daß das über den Rand ausgedehnte Integral $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ für alle Punkte außerhalb der Begrenzung verschwindet. In der Tat ist, wenn $f(z)$ eine im Flächenteil überall stetige Funktion darstellt, $\frac{f(z)}{z-x}$, falls der Punkt x außerhalb der Begrenzung liegt, innerhalb des Flächenteiles ebenfalls überall stetig und folglich nach einem Satze von Cauchy das über den Rand ausgedehnte Integral $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x} = 0$ für jeden Punkt x außerhalb der Begrenzung.

Um für einen beliebig begrenzten Bereich T explicite die Bedingungen anzugeben, die die Randwerte einer Funktion erfüllen müssen, damit das Cauchysche Integral für die Punkte x im Innern des Bereiches T eine

Funktion von x darstellt, die am Rande die vorgeschriebenen Werte erhält, nehmen wir an, daß eine Funktion $w = \psi(z)$ bekannt ist, welche die konforme Abbildung des Bereiches T auf das Innere eines in der w-Ebene um den Punkt $w = 0$ etwa mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises vermittelt, so daß der Begrenzungslinie des Bereiches T die Peripherie des Kreises und jedem Punkte im Bereiche T nur ein Punkt im Innern des Kreises und umgekehrt entspricht. Die Existenz einer solchen Funktion ist bekanntlich für Fälle großer Allgemeinheit von Herrn H. A. Schwarz dargetan. Es ist demnach für jeden Punkt der Randkurve von T $|\psi(z)| = 1$, also $\psi(z) = e^{\vartheta i}$, $\int \frac{d\psi(z)}{\psi(z)}$ über die Randkurve erstreckt $= 2\pi i$, für jeden Punkt im Innern von T $|\psi(z)| < 1$. Ferner verschwindet $\psi(z) - \psi(x)$ für keinen Punkt z im Innern von T außer für $z = x$; denn sonst würde zwei Punkten im Innern von T derselbe Punkt w in der Kreisfläche entsprechen. Endlich muß $\frac{d\psi}{dz}$ für alle Punkte innerhalb T von Null verschieden sein, da sonst $\frac{dz}{dw}$ für einen Punkt der Kreisfläche unendlich werden müßte, also dieser Punkt ein Windungspunkt der w-Fläche wäre, was bei einer einblättrigen Kreisfläche ausgeschlossen ist. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß, wenn $f(z)$ eine im Innern des Bereiches T eindeutige und stetige Funktion ist, die Integrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z - x} \quad \text{und} \quad \int \frac{f(z)\,d\psi(z)}{\psi(z) - \psi(x)},$$

beide über den Rand von T erstreckt, einander gleich sind. Ihre Differenz

$$\int \frac{f(z)\,\{(\psi(z) - \psi(x)) - (z - x)\,\psi'(z)\}\,dz}{(z - x)\,(\psi(z) - \psi(x))}$$

ist nämlich ein über den Rand von T erstrecktes Integral einer Funktion, die für keinen Punkt innerhalb T unendlich wird. Denn $f(z)$ ist der Voraussetzung nach stetig, und der Nenner verschwindet nach dem eben Bemerkten im Innern von T nur für $z = x$, und da $\psi'(z)$ für alle Punkte von Null verschieden ist, so verschwindet der Nenner für $z = x$ nur im 2ten Grade, der Zähler aber mindestens vom 2ten Grade, folglich bleibt der Integrand auch für $z = x$ endlich, also verschwindet nach dem Cauchyschen Satze das betrachtete Randintegral.

Wir betrachten nun statt des Cauchyschen Integrals das Integral

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,d\psi(z)}{\psi(z) - \psi(x)},$$

über den Rand des Bereiches T erstreckt, und wählen für $f(z)$ eine willkürliche Funktion derart, daß sie, wenn z die Randkurve durchläuft, den Anfangswert wieder annimmt. Eine solche Funktion kann stets und nur auf eine Weise in folgende Reihe nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $\psi(z)$ entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + a_1\psi(z) \qquad &+ a_2(\psi(z))^2 + \cdots \\ + a_{-1}\psi(z)^{-1} &+ a_{-2}(\psi(z))^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

Die a sind eindeutig bestimmt; denn $\int \psi^{\varkappa-1} d\,\psi(z)$ ist, wenn $\varkappa$ von 0 verschieden ist, $= \frac{\psi(z)^\varkappa}{\varkappa}$ und also das Integral über die Randkurve gleich Null, da $\psi(z)$ im Anfangs- und Endpunkt denselben Wert hat und $\int \frac{d\,\psi(z)}{\psi(z)} = 2\pi i$. Demnach ist

$$a_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,\psi(z)^{-\varkappa-1}\,d\,\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,\psi(z)^{-\varkappa} d\log\psi(z),$$

das Integral über die Randkurve erstreckt. Nun ist

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,d\,\psi(z)}{\psi(z)-\psi(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,d\log\psi(z)}{1-\dfrac{\psi(x)}{\psi(z)}}.$$

Da $|\psi(x)| < 1$, $|\psi(z)| = 1$, so gilt die Entwickelung

$$\frac{1}{1-\dfrac{\psi(x)}{\psi(z)}} = 1 + \psi(x)\,\psi(z)^{-1} + \psi(x)^2\,\psi(z)^{-2} + \cdots,$$

und mit Berücksichtigung der Werte für $a_\varkappa$ erhalten wir $F(x)$ durch die Reihe dargestellt

$$F(x) = a_0 + a_1\,\psi(x) + a_2\,(\psi(x))^2 + \cdots$$

Die Randwerte dieser Funktion sind durch die Reihe

$$a_0 + a_1\,\psi(z) + a_2\,\psi(z)^2 + \cdots$$

gegeben, unterscheiden sich also von den vorgeschriebenen Randwerten dadurch, daß die Glieder mit den negativen Potenzen fortgefallen sind. Demnach ist die Darstellbarkeit der Randwerte in der Form

$$f(z) = a_0 + a_1\,\psi(z) + a_2\,(\psi(z))^2 + \cdots$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine eindeutige und stetige Funktion in T mit diesen Randwerten existiere. Auch hier erkennt man leicht, daß, wenn die reellen Bestandteile der Randwerte gegeben sind, die Funktion bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt ist.

Betrachten wir den Fall, daß der Bereich T die positive Halbebene in der z-Ebene ist. Hier vermittelt die Funktion

$$w = \psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

die Abbildung des Bereiches auf das Innere eines Kreises um den Ursprung. Die willkürliche Funktion $f(z)$ auf der reellen Achse, als Randkurve, hat die Bedingung zu erfüllen, daß $f(-\infty) = f(+\infty)$ ist, und ihre allgemeine Darstellung ist hier

$$f(z) = a_0 + a_1\frac{z-i}{z+i} + a_2\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \cdots + a_{-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-1} + \cdots, \qquad a_\varkappa = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa}\frac{dz}{1+z^2}.$$

Da z reell ist, so ist $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ und für $z = \pm\infty$ $\frac{z-i}{z+i} = 1$. Sollen die vorgeschriebenen Randwerte die Bedingung erfüllen, daß eine Funktion mit diesen Werten auf der reellen Achse in der positiven Halbebene existiere, so müssen die Glieder mit negativen Potenzen in Wegfall kommen, und die Reihe

$$a_0 + a_1\left(\frac{x-i}{x+i}\right) + a_2\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^2 + \cdots,$$

die für jeden Punkt x auf der positiven Halbebene konvergent ist, stellt eine Funktion dar, die auf der reellen Achse die vorgeschriebenen Randwerte hat.

Die Darstellung einer Funktion durch das Cauchysche Integral gibt auch das Mittel an die Hand, die Bedingungen für die Randwerte anzugeben, wenn die Funktion im Innern des Bereiches in gegebenen Punkten gewisse vorgeschriebene Unstetigkeiten annehmen soll. Da wir es hier nur mit eindeutigen Funktionen zu tun haben, so ist für einen solchen Punkt $z = z_0$ die Unstetigkeit der Funktion in der Gestalt

$$\varphi(z) = \frac{\alpha_1}{z-z_0} + \frac{\alpha_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern vorgeschrieben, derart, daß die Differenz zwischen der Funktion $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = z_0$ endlich und stetig ist. Nehmen wir wieder den um den Ursprung mit dem Radius R beschriebenen Kreis als den Bereich für die zu bestimmende Funktion an, und seien in demselben beispielsweise zwei Unstetigkeitspunkte $z = b$, $z = c$. Diese umgeben wir mit Kreisen vom Radius ϱ, so daß $\varrho < R$ und $< \frac{1}{2}|b-c|$ ist, dann ist nach dem Cauchyschen Satze

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^R \frac{f(Re^{\vartheta i})\,Re^{\vartheta i}\,d\vartheta}{Re^{\vartheta i} - x} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(b+\varrho e^{\vartheta i})\,\varrho e^{\vartheta i}\,d\vartheta}{x - b - \varrho e^{\vartheta i}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+\varrho e^{\vartheta i})\,\varrho e^{\vartheta i}\,d\vartheta}{x - c - \varrho e^{\vartheta i}},$$

gültig für den von dem Kreis R und den Kreisen um b und c begrenzten Bereich.

Die Randwerte an dem äußeren Kreis und den inneren Kreisen seien vorläufig beliebig gewählt, und wir bezeichnen die durch die Summe der Integrale bestimmte Funktion mit $F(x)$. Es sei

$$f(Re^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_\varkappa e^{\varkappa\vartheta i},$$

$$f(b+\varrho e^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} b_\varkappa e^{\varkappa\vartheta i}, \quad f(c+\varrho e^{\vartheta i}) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_\varkappa e^{\varkappa\vartheta i},$$

dann gibt als Beitrag zu $F(x)$ das erste Integral wie früher die Reihe

$$a_0 + a_1\frac{x}{R} + a_2\frac{x^2}{R^2} + \cdots$$

Das zweite gibt, da wegen $|x-b|>\varrho$

$$\frac{\varrho e^{\vartheta i}}{x-b-\varrho e^{\vartheta i}}=\frac{\varrho e^{\vartheta i}}{x-b}+\frac{\varrho^2 e^{2\vartheta i}}{(x-b)^2}+\cdots$$

und

$$b_{-\varkappa}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(b+\varrho e^{\vartheta i})\, e^{\varkappa \vartheta i} d\vartheta$$

ist, die Reihe

$$b_{-1}\frac{\varrho}{x-b}+b_{-2}\frac{\varrho^2}{(x-b)^2}+\cdots$$

und ebenso das dritte Integral die Reihe

$$c_{-1}\frac{\varrho}{x-c}+c_{-2}\frac{\varrho^2}{(x-c)^2}+\cdots$$

Als Randwert von $F(x)$ am äußeren Kreise $x=Re^{\vartheta i}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F(Re^{\vartheta i}) = a_0+a_1 e^{\vartheta i}+a_2 e^{2\vartheta i}+\cdots &+b_{-1}\frac{\varrho}{Re^{\vartheta i}-b}+b_{-2}\frac{\varrho^2}{(Re^{\vartheta i}-b)^2}+\cdots \\ &+c_{-1}\frac{\varrho}{Re^{\vartheta i}-c}+c_{-2}\frac{\varrho^2}{(Re^{\vartheta i}-c)^2}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Da $|b|<R$, $|c|<R,\ldots$, so geben die Entwickelungen von $b_{-\varkappa}\frac{\varrho^\varkappa}{(Re^{\vartheta i}-b)^\varkappa}$, $c_{-\varkappa}\frac{\varrho^\varkappa}{(Re^{\vartheta i}-b)^\varkappa}$ nach Potenzen von $e^{\vartheta i}$ nur negative Potenzen, so daß

$$\begin{aligned} F(Re^{\vartheta i}) &= a_0+a_1 e^{\vartheta i}+a_2 e^{2\vartheta i}+\cdots \\ &+\alpha_{-1}e^{-\vartheta i}+\alpha_{-2}e^{-2\vartheta i}+\alpha_{-3}e^{-3\vartheta i}+\cdots \end{aligned}$$

Sollen diese Randwerte mit den für die äußere Kreislinie vorgeschriebenen übereinstimmen, so muß $a_{-\varkappa}=\alpha_{-\varkappa}$ sein, während die $a_\varkappa$ mit positivem Index und a_0 beliebig sein können.

Für die Punkte auf der Kreislinie um b erhält man

$$\begin{aligned} F(b+\varrho e^{\vartheta i}) &= a_0+a_1\frac{b+\varrho e^{\vartheta i}}{R}+a_2\left(\frac{b+\varrho e^{\vartheta i}}{R}\right)^2+\cdots \\ &+b_{-1}e^{-\vartheta i}+b_{-2}e^{-2\vartheta i}+\cdots \\ &+c_{-1}\frac{\varrho}{b-c+\varrho e^{\vartheta i}}+c_{-2}\left(\frac{\varrho}{b-c+\varrho e^{\vartheta i}}\right)^2+\cdots \end{aligned}$$

Da $\varrho<|b-c|$ ist, so liefern die erste und dritte Reihe, nach Potenzen von $e^{\vartheta i}$ entwickelt, nur positive Potenzen, so daß

$$F(b+\varrho e^{\vartheta i}) = \beta_0+\beta_1 e^{\vartheta i}+\beta_2 e^{2\vartheta i}+\cdots+b_{-1}e^{-\vartheta i}+b_{-2}e^{-2\vartheta i}+\cdots$$

Sollen diese Randwerte mit den vorgeschriebenen übereinstimmen, so muß $b_\varkappa=\beta_\varkappa$ sein, während die b mit den negativen Indices beliebig sein können. Für die Punkte auf der Kreislinie um c erhält man ebenso:

$$F(c+\varrho e^{\vartheta i}) = a_0 + a_1 \frac{c+\varrho e^{\vartheta i}}{R} + a_2\left(\frac{c+\varrho e^{\vartheta i}}{R}\right)^2 + \cdots$$
$$+ b_{-1}\frac{\varrho}{c-b+\varrho e^{\vartheta i}} + b_{-2}\left(\frac{\varrho}{c-b+\varrho e^{\vartheta i}}\right)^2 + \cdots$$
$$+ c_{-1}e^{-\vartheta i} + c_{-2}e^{-2\vartheta i} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da $\varrho < |c-b|$ ist, so liefern die erste und zweite Reihe, nach Potenzen von $e^{\vartheta i}$ entwickelt, nur positive Potenzen, so daß

$$F(c+\varrho e^{\vartheta i}) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\vartheta i} + \gamma_2 e^{2\vartheta i} + \cdots + c_{-1}e^{-\vartheta i} + c_{-2}e^{-2\vartheta i} + \cdots$$

Sollen diese Randwerte mit den für den Kreis um c vorgeschriebenen übereinstimmen, so muß $c_\varkappa = \gamma_\varkappa$ sein, während die c mit den negativen Indices beliebig sein können.

Denkt man sich also die Randwerte in Reihen nach Potenzen von $e^{\vartheta i}$ entwickelt, so können für die Randwerte am äußeren Kreise die Koeffizienten der positiven Potenzen $a_\varkappa$ ($\varkappa = 0$ eingeschlossen), für die auf den Kreisen um b und c die Koeffizienten der negativen Potenzen $b_{-\varkappa}$ und $c_{-\varkappa}$ beliebig gewählt werden. Durch diese sind dann die anderen Koeffizienten vollständig bestimmt, wenn eine Funktion in dem betrachteten Bereiche mit den vorgeschriebenen Randwerten existieren soll. Die Funktion $f(x)$ ist dann in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1\frac{x}{R} + a_2\frac{x^2}{R} + \cdots$$
$$+ b_{-1}\frac{\varrho}{x-b} + b_{-2}\frac{\varrho^2}{(x-b)^2} + \cdots$$
$$+ c_{-1}\frac{\varrho}{x-c} + c_{-2}\frac{\varrho^2}{(x-c)^2} + \cdots$$

dargestellt.

Aus dem Vorstehenden ist leicht der Satz zu erweisen, daß, wenn die reellen Teile der Randwerte am äußeren Kreise und die Unstetigkeiten im Innern vorgeschrieben sind, die Funktion bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt ist. Denn da die Unstetigkeiten vorgeschrieben sind, sind neben b und c $b_{-1}\varrho$, $b_{-2}\varrho^2, \ldots,$ $c_{-1}\varrho$, $c_{-2}\varrho^2, \ldots$ bekannt und damit nach dem Vorigen a_{-1}, $a_{-2}, \ldots$ Setzt man nun $a_\varkappa = \alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$, so ist der reelle Teil u von $f(Re^{\vartheta i})$ $u = \alpha_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\{(\alpha_\varkappa + \alpha_{-\varkappa})\cos\varkappa\vartheta - (\beta_\varkappa - \beta_{-\varkappa})\sin\varkappa\vartheta\}$, also nach dem Fourierschen Satze α_0 und die Größen $\alpha_\varkappa + \alpha_{-\varkappa}$, $\beta_\varkappa - \beta_{-\varkappa}$ eindeutig bestimmt. Da nun $\alpha_{-\varkappa}$ und $\beta_{-\varkappa}$ mit $a_{-\varkappa}$ durch die vorgeschriebenen Unstetigkeiten bereits bekannt sind, so sind nunmehr auch α_0, $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ und somit auch $a_\varkappa$ und der reelle Teil von a_0 bestimmt, so daß $f(x)$ bis auf eine rein imaginäre Konstante $\beta_0 i$ vollkommen bestimmt ist.

Über einige Rechenblätter.

Von Hermann Fürle.

Die Rechenblätter sind ebene graphische Gebilde, die den arithmetischen Zusammenhang zwischen n Veränderlichen geometrisch durch Lagenbeziehungen zwischen Kurvenscharen wiedergegeben. Der Konstruktion solcher Rechenblätter liegt folgende Überlegung zu Grunde:

Jede Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ kann angesehen werden als das Ergebnis der Elimination aus einer Reihe von Gleichungen zwischen den n Variablen α und einer Anzahl neu hinzugenommener Veränderlichen. Man darf, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, daß n von diesen zur Elimination erforderlichen Gleichungen nur je eine der Größen α neben den zugenommenen Variablen enthalten, während die übrigen Gleichungen von den α frei sind. Um nun überhaupt zu geometrischen Darstellungen zu gelangen, muß man die neuen Veränderlichen als Koordinaten deuten, und weil ja die Veränderlichen α durch Kurvenscharen repräsentiert werden sollen, so ist man genötigt, diesen n Gleichungen die Form zu geben:

$$f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0, \quad f_2(u_2, v_2; \alpha_2) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(u_n, v_n; \alpha_n) = 0,$$

worin sich die n Paare u, v auf n beliebige Koordinatensysteme beziehen. Die übrigen zur Elimination nötigen Gleichungen sind dagegen von der Gestalt:

$$M_1(u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_{n+k}, v_{n+k}) = 0,$$
$$M_2(u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_{n+k}, v_{n+k}) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{1+n+2k}(u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_{n+k}, v_{n+k}) = 0.$$

Sind die n Funktionen f gewählt, so konstruiert man das Rechenblatt folgendermaßen: $f_1(u_1, v_1; \alpha_1) = 0$ ist die Gleichung einer Kurvenschar, in der α_1 die Rolle des Parameters spielt. Es werden nun für eine Reihe von Werten α_1 die Kurven der Schar wirklich ausgezeichnet, und um sie von einander zu unterscheiden, wird an jede einzelne Kurve der Parameter angeschrieben, dem sie zugehört. Auf diese selbe Weise werden die Kurvenscharen $f_2, f_3, \ldots, f_n$ hergestellt. Sind nun noch die Bedingungsgleichungen $M = 0$, denen die Koordinaten u, v genügen müssen, von solcher Beschaffenheit, daß sie geometrisch erfüllbar sind, so ist damit auch die Möglichkeit gegeben, mit Hilfe des Rechenblattes durch bloßes Ablesen ohne Rechnung eine der Größen α, z. B. α_n, aus den übrigen gegebenen α zu ermitteln, so daß die Gleichung $F = 0$ befriedigt wird.

Um diese Möglichkeit an einem Beispiel einsehen zu können, werde über die Bedingungsgleichungen $M = 0$ folgendermaßen verfügt: Die Punkte $u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_n, v_n$ sollen die Teilpunkte einer mehrfach gebrochenen Geraden sein, und zwar soll jeder Punkt von seinen beiden Nachbarpunkten konstante Abstände behalten; sonst aber sei er frei beweglich. Nur der Anfangspunkt und der Endpunkt dieser Kette von Linienstücken seien gezwungen, sich auf je einer festen Kurve zu bewegen. α_n findet man dann mit dieser Kette in folgender Weise:

Man bestimmt in der ersten Schar diejenige Kurve α_1, welche dem gegebenen Werte α_1 entspricht, in der zweiten Schar die dem gegebenen Wert α_2 entsprechende Kurve α_2 u. s. f., und endlich in der vorletzten Schar die mit α_{n-1} bezeichnete Kurve. Punkt u_1, v_1 ist der Anfangspunkt der Kette; er liegt auf der ersten festen Kurve und auf der fixierten Kurve α_1, ist also Schnittpunkt von beiden. Man legt also den Anfangspunkt der beweglichen Kette auf diesen Schnittpunkt und dreht das erste Glied der Kette um ihn, bis sein Endpunkt u_2, v_2 auf die Kurve α_2 fällt. In derselben Weise findet man durch Drehen des 2. Kettengliedes um u_2, v_2 den Punkt u_3, v_3 auf α_3 und schreitet so fort, bis man den vorletzten Punkt der Kette auf die Kurve α_{n-1} gebracht hat. Jetzt wird endlich das letzte Kettenglied so gedreht, daß der Endpunkt der ganzen Kette auf die zweite feste Kurve kommt. Durch den so bestimmten Punkt u_n, v_n geht nun eine Kurve (oder eine Anzahl von Kurven) der letzten Schar. Man liest den zugehörigen Parameter α_n ab. α_n befriedigt die Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Die Bedingungsgleichungen $M = 0$ brauchen nicht sämtliche Koordinaten u, v zu enthalten. Ist z. B. M_1 bloß Funktion von u_1, v_1, so stellt $M_1 = 0$ die Gleichung einer festen Kurve vor. Ihre Koordinaten u_1, v_1 kommen auch in der Scharengleichung $f_1 = 0$ vor; aber von den u_1, v_1 der Scharengleichung sind nur diejenigen in Betracht zu ziehen, die zugleich die Kurvengleichung $M_1 = 0$ erfüllen. Man hat es deshalb nicht nötig, die Kurven der Schar f_1 in ihrer ganzen Ausdehnung auszuzeichnen, sondern man braucht sie bloß in der Nähe der Kurven $M_1 = 0$ herzustellen.

Auf diese Weise entsteht eine Skala, deren Träger M_1 ist.

Sind im ganzen λ Gleichungen $M = 0$ so beschaffen, daß sie Funktionen nur eines Koordinatenpaares sind, so stellen sie zusammen mit den entsprechenden Kurvenscharen λ Skalen vor, so daß man sagen kann:

Ein Rechenblatt für n Variable enthält

$$n - \lambda \text{ Kurvenscharen}, \quad \lambda \text{ Skalen}, \quad 1 + n + 2k - \lambda \text{ Bedingungen},$$

worin λ alle Werte von 0 bis n haben kann.

Rechenblätter mit Skalen sind also gegenüber solchen Rechenblättern, die bloß Kurvenscharen enthalten, nichts Neues, sondern stellen sich nur als Spezialisierungen dar.

Für $n = 2$ bis $n = 6$ und $k = 0$ hat der Vortragende in der Beilage zum Jahresbericht von 1902 der 9. Realschule in Berlin untersucht, welche besonderen Typen von Rechenblättern sich hiernach ergeben, wenn man zur Verwirklichung der $1 + n - \lambda$ Bedingungen nur das Lineal und einen beweglichen Kreis von konstantem Radius zuläßt.

Für den Fall $n = 3$ und $k = 0$ ergibt sich aus den allgemeinen Betrachtungen, daß $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ sich durch Rechenblätter darstellen läßt, die entweder

3	Kurvenscharen,	0	Skalen,	4	Bedingungen	oder
2	„	1	„	3	„	„
1	„	2	„	2	„	„
0	„	3	„	1	„	enthalten.

Während in dem umfassenden Traité de Nomographie von d'Ocagne die erste und die vierte Gruppe durch zahlreiche Beispiele belegt sind, werden die zweite und die dritte Gruppe überhaupt nicht erwähnt.

Die vierte Gruppe steht zur ersten, wenn die drei Scharen nur aus Geraden bestehen, in dualer Beziehung.

Zeichnet man nämlich auf dem Rechenblatte mit den drei Geradenscharen einen beliebigen Kegelschnitt, so kann man jede Gerade als Polare in Beziehung auf ihn ansehen. Wird dann zu jeder Polare ihr Pol angegeben und ebenso genannt wie die zugehörige Polare, so entspricht der Geradenschar eine Folge von Punkten, eine Skala. Den 4 Bedingungen, welchen auf dem ursprünglichen Rechenblatte die Koordinaten u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 genügen müssen, entspricht in der polarisierten Figur eine einzige Bedingung zwischen 3 Geraden, die beziehungsweise durch die Skalenpunkte α_1, α_2, α_3 gehen. Sind z. B. auf dem ursprünglichen Rechenblatte die 4 Bedingungen $u_1 = u_2 = u_3$, $v_1 = v_2 = v_3$ erfüllt, d. h. gehen die 3 Geraden, welche zusammengehörigen [die Gl. $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ befriedigenden] Werten entsprechen, durch denselben Punkt, so müssen auf dem Rechenblatte mit 3 Skalen die Punkte, welche 3 zusammengehörigen Werten α_1, α_2, α_3 entsprechen, in einer geraden Linie liegen (fluchtrechte Punkte bilden).

Da die Wahl des zuzuordnenden Kegelschnittes beliebig ist, der Kegelschnitt aber durch 5 Punkte und jeder Punkt durch 2 Koordinaten bestimmt ist, so hat man eine zehnfach unendliche Willkür bei der Polarisierung eines Rechenblattes mit 3 Geradenscharen.

d'Ocagne findet zu jedem Rechenblatte mit 3 Geradenscharen ein ganz bestimmtes Rechenblatt mit 3 Skalen, indem er die Gleichungen, welche in kartesischen Koordinaten die 3 Scharen von Geraden definieren, ungeändert läßt, aber die Bedeutung der Koordinaten wechselt.

Zur Erläuterung der 4 möglichen Gruppen von Rechenblättern dreier Variablen legt der Verfasser vor:

Für die 1. Gruppe: 1 Rechenblatt für Dreiecksberechnung, 1 Rechenblatt für Hygrometrie, 1 Rechenblatt zur Lösung der Gleichung $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$.

" " 2. " 1 Rechenblatt zur Lösung der quadratischen Gleichung und zum Multiplizieren.

" " 3. " 1 Rechenblatt zur Multiplikation.

" " 4. " 1 Rechenblatt zum Multiplizieren mit 2 wagerechten und 10 schrägen Skalen, das 1 Stelle mehr liefert als 1 Rechenstab von gleicher Länge und 1 Rechenblatt zur Lösung der Gleichung $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$.

Ferner erläutert der Vortragende ein besonderes für die Photographie verwendbares Rechenblatt[1]) mit 5 Skalen und einer beweglichen Schar von Parallelen zur Bestimmung der Beziehung zwischen den optischen Weiten und den Größen von Gegenstand und Bild.

Zum Schluß weist der Vortragende an 2 Skizzen nach, wie die von Hrn. Adler in der März-Sitzung 1902 der B. M. G. vorgetragene Cremonasche Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung mit Hilfe zweier beweglichen rechten Winkel sich als besonderer Fall eines allgemeineren Rechenblattes mit 5 Scharen und zwei festen Kurven charakterisiert.

---

1) Im Buchhandel erschienen bei Mayer und Müller, Berlin.

Elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur.

Von E. Lampe.

Der folgende Artikel ist ein Auszug aus einem Aufsatze, der vor 21 Jahren niedergeschrieben wurde. Das in ihm zur Herleitung der Formeln der mechanischen Quadratur dienende Verfahren benutzt neben den elementaren Hilfsmitteln nur die Formel $\int_0^h x^n dx = \frac{h^{n+1}}{n+1}$ für die niedrigsten ganzzahligen Werte von n, und dieser Ausdruck läßt sich ja mit Hilfe der Summenformeln für $1^n + 2^n + \cdots + m^n$ auf bekannte Weise ohne Kenntnis der Integralrechnung ermitteln. Ich beabsichtigte mit dieser Methode, die ich zu wiederholten Malen im Unterricht erprobte, meinen damaligen Schülern in der ersten Klasse der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin einen flüchtigen Einblick in die Entstehung der bezüglichen Formeln zu geben. Der Grundgedanke ist derselbe, den Gauß am Anfange seiner Abhandlung „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" (Werke **3**, 165—196) verwertet hat. Verschiedene Beobachtungen, die ich in den letzten Jahren gemacht habe, scheinen darauf hinzudeuten, daß auch jetzt noch die Veröffentlichung des Artikels nicht überflüssig ist. — Der Gang, den ich bei meinen Vorträgen auf der Königlichen Kriegsakademie und auf der Technischen Hochschule zu nehmen pflege, wenn ich eine Übersicht über die möglichen Formeln der mechanischen Quadratur gebe, ist in der kurzen Notiz „Zur mechanischen Quadratur" angedeutet, die ich nach einem Vortrage auf der Naturforscherversammlung zu Nürnberg 1893 in den Verhandlungen dieser Gesellschaft und im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **3**, 102—106 veröffentlicht habe. Wenn die folgenden Entwickelungen etwas schwerfällig erscheinen, so wolle man berücksichtigen, daß es sich um folgerichtige Durchführung eines einzigen Grundgedankens handelt, daß aber die leicht erreichbare größere Eleganz der Darstellung den Schüler von jenem Grundgedanken hätte ablenken können. Der Kürze wegen bediene ich mich hier der Ausdrucksweise und der Bezeichnungsweise der Integralrechnung.

Ist $f(x)$ eine Funktion von x, die sich innerhalb des Intervalles $(0 \ldots h)$ in eine konvergente Potenzreihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ entwickeln läßt, so ist:

$$\text{(I)} \qquad J = \int_0^h f(x)dx = h[c_0 + \tfrac{1}{2}c_1 h + \tfrac{1}{3}c_2 h^2 + \tfrac{1}{4}c_3 h^3 + \cdots].$$

Für die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, wo $0 \overline{\gtrless} x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \overline{\gtrless} h$, seien die Werte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ gegeben. Dann hat das Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x:

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} f(x_2)$$

$$+ \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) = \varphi(x)$$

die Eigenschaft, für die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von x die zugehörigen Werte von $f(x)$ anzunehmen; das Polynom $\varphi(x)$ stellt daher in dem Intervalle $(0 \ldots h)$ die Funktion $f(x)$ *angenähert* dar (Interpolation durch Parabeln höherer Ordnung). Ist $f(x)$ ein Polynom von nicht höherem Grade als $n-1$, so fällt $\varphi(x)$ mit $f(x)$ zusammen. Setzt man in (I) $\varphi(x)$ an Stelle von $f(x)$, so erhält man

$$\text{(II)} \qquad J' = \int_0^h \varphi(x)\,dx,$$

und J' wird im allgemeinen ein angenäherter Wert von J sein. Die Differenz $J - J'$ gibt den Fehler, der begangen wird, wenn man J' für J setzt. Je nach dem Grade von $\varphi(x)$ erhält man verschiedene Annäherungsformeln von J'. Da die Formeln auch für prismatische Körper gelten müssen, bei denen $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = c_0$ ist, so muß die Summe der Koeffizienten dieser Funktionswerte in J' der Einheit gleich sein. Beim Unterricht wird man natürlich mit den folgenden einfachsten Fällen beginnen.

1. $\varphi(x)$ sei vom *ersten* Grade, oder:

$$\varphi(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Daher ergibt sich

$$\text{(1)} \qquad J' = h\left[\frac{\frac{1}{2}h - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{\frac{1}{2}h - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\right].$$

Die Formel (1) stellt J genau dar, wenn $f(x) = c_0 + c_1 x$ ist; sonst ist J' ein angenäherter Wert von J. Ist also z. B. der Querschnitt eines zwischen zwei parallelen Grenzebenen liegenden Körpers in einer zu diesen Ebenen parallelen Ebene eine lineare Funktion des Abstandes der schneidenden Ebene von einer zu den Grenzebenen parallelen Ebene, so läßt sich das Volumen des Körpers durch zwei beliebige parallele Querschnitte des Körpers ausdrücken. Man vergleiche hierzu die Notiz von F. Rudio: „Zur Kubatur des Rotationsparaboloides" in der Zeitschrift für Mathematik und Physik **47**, 126—127, 1902.

Wählt man x_1 so, daß $\frac{1}{2}h - x_1 = 0$ ist, so geht die Formel (1) über in

$$\text{(1a)} \qquad J' = h f(\tfrac{1}{2}h),$$

die erste der Gaußschen Formeln.

2. $\varphi(x)$ sei vom *zweiten* Grade, oder:

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3).$$

Man setze $Z_1 = \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{2}h(x_2 + x_3) + x_2 x_3$, $Z_2 = \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{2}h(x_1 + x_3) + x_1 x_3$, $Z_3 = \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{2}h(x_1 + x_2) + x_1 x_2$, so folgt durch Integration von $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen 0 und h:

$$\text{(2)} \quad J' = h\left[\frac{Z_1 f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{Z_2 f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{Z_3 f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right].$$

J' gibt einen genauen Ausdruck für J, wenn $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, also ein Polynom zweiten Grades ist. In diesem Falle ist demnach J durch drei beliebige Werte der Funktion $f(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen ausdrückbar. Nun kann man aber auch x_1 und x_2 so wählen, daß $Z_3 = 0$ wird, nämlich:

$$(\alpha) \qquad 0 = \tfrac{1}{3}h^2 - \tfrac{1}{2}h(x_1 + x_2) + x_1 x_2.$$

Subtrahiert man die Gleichung (α) von den Gleichungen für Z_1 und Z_2, so erhält man

$$Z_1 = (x_1 - x_3)(\tfrac{1}{2}h - x_2), \quad Z_2 = (x_2 - x_3)(\tfrac{1}{2}h - x_1).$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (2) entfällt x_3 aus J', und der Ausdruck (2) geht in die Form (1) über.

Die Formel (1) gilt also auch als exakter Ausdruck für J, wenn $f(x)$ ein Polynom zweiten Grades ist, vorausgesetzt, daß x_1 und x_2 durch die Beziehung (α) mit einander verbunden sind.

Wünschte man nun aus (1) auch noch den Funktionswert $f(x_2)$ fortzuschaffen, indem man wie in Nr. **1** $x_1 = \frac{1}{2}h$ setzte, so ergäbe sich aus (α) der zugehörige Wert von x_2 unendlich groß. Eine Reduktion der Formel (2) auf eine geringere Anzahl von Gliedern als 2 ist also nicht zu ermöglichen.

Von hierher gehörigen Aufgaben seien folgende erwähnt. A. Sollen in Formel (1) die Koeffizienten von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ einander gleich sein, so ergibt sich $h = x_1 + x_2$. Verbindet man diese Beziehung mit (α), so folgt $x = \frac{1}{2}h \pm \frac{1}{6}h\sqrt{3}$, oder aber

$$(2\text{a}) \qquad J' = \tfrac{1}{2}h[f(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{6}h\sqrt{3}) + f(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{6}h\sqrt{3})],$$

die zweite Gaußsche Formel. B. Sollen in Formel (2) alle drei Koeffizienten gleich sein, so leitet man unschwer ab $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}h$ und $x_1 x_3 = x_2^2 - \frac{3}{2}hx_2 + \frac{5}{8}h^2$. Für $x_2 = \frac{1}{2}h$ berechnet man hieraus $x_{1,3} = \frac{1}{2}h \pm \frac{1}{4}h\sqrt{2}$ und hiermit:

$$(2\text{b}) \qquad J' = \tfrac{1}{3}h[f(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{4}h\sqrt{2}) + f(\tfrac{1}{2}h) + f(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{4}h\sqrt{2})],$$

eine der Formeln, die als Tschebyschewsche aufgezählt zu werden pflegen.

3. $\varphi(x)$ sei vom *dritten* Grade, oder:

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} f(x_1) + 3 \text{ ähnlichen Gliedern.}$$

Setzt man $Z_1 = \frac{1}{4}h^3 - \frac{1}{3}h^2(x_2 + x_3 + x_4) + \frac{1}{2}h(x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) - x_2 x_3 x_4$ und analog Z_2, Z_3, Z_4 mit entsprechender Vertauschung der Indices, so erhält man durch Integration von $\varphi(x)$:

$$(3) \qquad J' = h\left[\frac{Z_1 f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \cdots + \frac{Z_4 f(x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}\right].$$

J' enthält also *vier* Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_4)$. Soll die Formel (3) nur *drei* Funktionswerte aufweisen, so setze man z. B. $Z_4 = 0$, d. h.:

$$(\beta) \qquad 0 = \tfrac{1}{4}h^3 - \tfrac{1}{3}h^2(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{2}h(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3.$$

Indem man diese Gleichung von der für Z_1 abzieht, findet man:

$$Z_1 = (x_1 - x_4)[\tfrac{1}{3}h^2 - \tfrac{1}{2}h(x_2 + x_3) + x_2 x_3].$$

Entsprechende Werte ergeben sich für Z_2 und Z_3; durch Einsetzung derselben in (3) entfällt x_4 aus dieser Formel, und diese verwandelt sich in (2). Mithin gilt die Formel (2) auch dann noch exakt für ein Polynom $f(x)$ vom dritten Grade in x, wenn zwischen x_1, x_2, x_3 die Bedingungsgleichung (β) besteht. Dies findet z. B. im Falle $x_2 = \frac{1}{2}h$, $x_3 = h - x_1$ immer statt. Man erhält daher leicht folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
J_1' &= \tfrac{1}{6}h[\ f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + f(h)],\\
J_2' &= \tfrac{1}{96}h[25f(\tfrac{1}{10}h) + 46f(\tfrac{1}{2}h) + 25f(\tfrac{9}{10}h)],\\
J_3' &= \tfrac{1}{98}h[27f(\tfrac{1}{9}h) + 44f(\tfrac{1}{2}h) + 27f(\tfrac{8}{9}h)],\\
J_4' &= \tfrac{1}{27}h[\ 8f(\tfrac{1}{8}h) + 11f(\tfrac{1}{2}h) + 8f(\tfrac{7}{8}h)],\\
J_5' &= \tfrac{1}{150}h[49f(\tfrac{1}{7}h) + 52f(\tfrac{1}{2}h) + 49f(\tfrac{6}{7}h)],\\
J_6' &= \tfrac{1}{8}h[\ 3f(\tfrac{1}{6}h) + 2f(\tfrac{1}{2}h) + 3f(\tfrac{5}{6}h)],\\
J_7' &= \tfrac{1}{54}h[25f(\tfrac{1}{5}h) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + 25f(\tfrac{4}{5}h)],\\
J_8' &= \tfrac{1}{3}h[\ 2f(\tfrac{1}{4}h) - f(\tfrac{1}{2}h) + 2f(\tfrac{3}{4}h)], \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Bildet man für alle diese Formeln, die für Polynome $f(x)$ vom dritten Grade exakte Werte von J geben, die Differenzen $J - J'$, so erhält man als erstes Glied:

$$\begin{aligned}
J - J_1' &= -\tfrac{1}{120}c_4h^5, & J - J_2' &= -\tfrac{1}{1200}c_4h^5, & J - J_3' &= -\tfrac{1}{9720}c_4h^5,\\
J - J_4' &= +\tfrac{1}{1280}c_4h^5, & J - J_5' &= +\tfrac{11}{5880}c_4h^5, & J - J_6' &= +\tfrac{7}{2160}c_4h^5,\\
J - J_7' &= +\tfrac{1}{200}c_4h^5, & J - J_8' &= +\tfrac{7}{960}c_4h^5.
\end{aligned}$$

Somit ist das Fehlerglied gerade in der bekanntesten unter diesen Formeln, nämlich in J_1', am größten. Berechnet man mit Hilfe dieser Formeln

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}693\,147,$$ so hat man $h = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ zu setzen.

Man findet:

$$\begin{aligned}
J_1' &= 0{,}694\,444, & J_2' &= 693\,248, & J_3' &= 0{,}693\,137, & J_4' &= 0{,}693\,004,\\
J_5' &= 0{,}692\,843, & J_6' &= 692\,641, & J_7' &= 0{,}692\,387, & J_8' &= 0{,}692\,063.
\end{aligned}$$

Da der Raum nicht gestattet, auf weitere Beispiele einzugehen, so soll jetzt die allgemeine Erörterung des vorliegenden Falles fortgesetzt werden.

Die Formel (2), welche unter der Voraussetzung der Relation (β) für $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ exakt gilt, läßt sich, wie in Nr. 2 gezeigt ist, durch Einführung der Bedingung (α) zwischen x_1 und x_2 auf die Form (1) reduzieren. Nun kann man (β) so schreiben:

$$x_3[\tfrac{1}{3}h^2 - \tfrac{1}{2}h(x_1 + x_2) + x_1x_2] = h[\tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{3}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}x_1x_2].$$

Da der Koeffizient von x_3 nach (α) verschwindet, so folgt für x_1 und x_2 die neue Gleichung:

$$(\beta^*) \qquad \tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{3}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}x_1 x_2 = 0.$$

Aus (β^*) und aus (α) bestimmt man sofort $x_1 + x_2 = h$, $x_1 x_2 = \frac{1}{6}h^2$, also $x_{1,2} = \frac{1}{2}h \pm \frac{1}{6}h\sqrt{3}$. Mit diesen Werten geht aber (1) über in

$$(2\text{a}) \qquad J' = \tfrac{1}{2}h[f(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{6}h\sqrt{3}) + f(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{6}h\sqrt{3})],$$

welche Formel in Nr. 2 schon erhalten war. Hier hat sich also herausgestellt, daß diese zweite Gaußsche Formel diejenige ist, welche als einzige Formel mit *zwei* Funktionswerten das exakte Integral J darstellt, wenn $f(x)$ ein Polynom vom dritten Grade ist.

4. $\varphi(x)$ sei vom *vierten* Grade, oder:

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)} f(x_1) + \cdots,$$

wo noch vier analoge Glieder folgen. Versteht man unter $C_k^{(4)}(i)$ die Summe der Kombinationen von vier solchen Elementen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 zur Klasse k, unter denen x_i fehlt, so kann man die durch Integration von $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen 0 und h folgende Formel schreiben:

$$(4) \qquad J' = h\left[\frac{\frac{1}{5}h^4 - \frac{1}{4}h^3 C_1^{(4)}(1) + \frac{1}{3}h^2 C_2^{(4)}(1) - \frac{1}{2}h C_3^{(4)}(1) + C_4^{(4)}(1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)} f(x_1) + \cdots\right].$$

In (4) sind die $x_1, \ldots, x_5$ ganz beliebig. Soll der Koeffizient von $f(x_5)$ in (4) verschwinden, so muß man haben:

$$(\gamma) \qquad 0 = \tfrac{1}{5}h^4 - \tfrac{1}{4}h^3 C_1^{(4)}(5) + \tfrac{1}{3}h^2 C_2^{(4)}(5) - \tfrac{1}{2}h C_3^{(4)}(5) + C_4^{(4)}(5) = 0.$$

Bezeichnet man den Zähler des Koeffizienten von $f(x_1)$ in (4) mit Z_1 und subtrahiert (γ) von Z_1, so ergibt sich unter Berücksichtigung von:

$$C_1^{(4)}(5) - C_1^{(4)}(1) = x_1 - x_5, \quad C_2^{(4)}(5) - C_2^{(4)}(1) = (x_1 - x_5)(x_2 + x_3 + x_4),$$
$$C_3^{(4)}(5) - C_3^{(4)}(1) = (x_1 - x_5)(x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4),$$
$$C_4^{(4)}(5) - C_4^{(4)}(1) = (x_1 - x_5)x_2 x_3 x_4,$$

daß Z_1 die Form annimmt:

$$Z_1 = (x_1 - x_5)[\tfrac{1}{4}h^3 - \tfrac{1}{3}h^2(x_2 + x_3 + x_4) + \tfrac{1}{2}h(x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) - x_2 x_3 x_4].$$

In gleicher Weise rechne man die Zähler Z_2, Z_3, Z_4 der Koeffizienten von $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ in (4) um. Durch Einsetzung dieser Werte in (4) geht diese Formel dann über in (3); somit ist J' nach Formel (3) auch in dem Falle, daß $f(x)$ ein Polynom vierten Grades in x ist, noch der genaue Wert von J, wenn die Abscissen x_1, x_2, x_3, x_4 nicht unabhängig von einander sind, sondern der Gleichung (γ) genügen. Soll in (3) auch der Koeffizient von $f(x_4)$ verschwinden, so muß zwischen x_1, x_2, x_3 wieder die Bedingung (β) bestehen. Nun aber läßt sich (γ) in der Form schreiben:

$$x_4[\tfrac{1}{4}h^3 - \tfrac{1}{3}h^2(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{2}h(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3]$$
$$= h[\tfrac{1}{5}h^3 - \tfrac{1}{4}h^2(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{3}h(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - \tfrac{1}{2}x_1 x_2 x_3].$$

Der Koeffizient von x_4 ist nach (β) gleich Null; also reduziert sich (γ) auf die Gleichung:

$$(\gamma^*) \quad \tfrac{1}{5}h^3 - \tfrac{1}{4}h^2(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{3}h(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3 = 0.$$

Genügen x_1, x_2, x_3 dieser Bedingung (γ^*), sowie der Bedingung (β), so stellt die Formel (2) das Integral J bis zur vierten Potenz von $f(x)$ einschließlich exakt dar.

Wollte man nun noch den Koeffizienten von $f(x_3)$ in (2) zum Verschwinden bringen, d. h. nach (α) $0 = \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{2}h(x_1 + x_2) + x_1x_2$ setzen, so hätte man unter Berücksichtigung der folgenden Formen von (β) und (γ^*):

$$x_3[\tfrac{1}{3}h^2 - \tfrac{1}{2}h(x_1 + x_2) + \phantom{\tfrac{1}{2}}x_1x_2] = h[\tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{3}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}x_1x_2],$$
$$x_3[\tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{3}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}x_1x_2] = h[\tfrac{1}{5}h^2 - \tfrac{1}{4}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{3}x_1x_2]$$

folgende drei Gleichungen für x_1 und x_2:

$$(\alpha) \qquad \tfrac{1}{3}h^2 - \tfrac{1}{2}h(x_1 + x_2) + \phantom{\tfrac{1}{2}}x_1x_2 = 0,$$
$$(\beta^*) \qquad \tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{3}h(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}x_1x_2 = 0,$$
$$(\gamma^{**}) \qquad \tfrac{1}{5}h^2 - \tfrac{1}{4}h(x_1 + h_2) + \tfrac{1}{3}x_1x_2 = 0.$$

Diese drei Gleichungen lassen aber keine Lösungen für die zwei Unbekannten $x_1 + x_2$ und x_1x_2 zu. Eine Zurückführung der Formel (4) auf weniger als drei Funktionswerte ist also unausführbar.

5. $\varphi(x)$ sei vom *fünften* Grade, oder:

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_1 - x_6)} f(x_1) + \cdots,$$

wo noch fünf analoge Glieder folgen. Man setze

$$Z_1 = \tfrac{1}{6}h^5 - \tfrac{1}{5}h^4C_1^{(5)}(1) + \tfrac{1}{4}h^3C_2^{(5)}(1) - \tfrac{1}{3}h^2C_3^{(5)}(1) + \tfrac{1}{2}hC_4^{(5)}(1) - C_5^{(5)}(1),$$

so ergibt sich durch Integration:

$$(5) \qquad J' = h\left[\frac{Z_1 f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_1 - x_6)} + \cdots\right].$$

Die Bedingung für das Verschwinden von Z_6 ist:

$$(\delta) \quad \tfrac{1}{6}h^5 - \tfrac{1}{5}h^4C_1^{(5)}(5) + \tfrac{1}{4}h^3C_2^{(5)}(5) - \tfrac{1}{3}h^2C_3^{(5)}(5) + \tfrac{1}{2}hC_4^{(5)}(5) - C_5^{(5)}(5) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Formel reduziert sich Z_1 auf:

$$Z_1 = (x_1 - x_6)[\tfrac{1}{5}h^4 - \tfrac{1}{4}h^3C_3^{(4)}(1) + \tfrac{1}{3}h^2C_4^{(4)}(1) - \tfrac{1}{2}hC_3^{(4)}(1) + C_4^{(4)}(1)],$$

entsprechend Z_2, Z_3, Z_4, Z_5. Durch Einsetzung dieser Werte in (5) geht Formel (5) daher in (4) über. Nun läßt sich (δ) auch schreiben:

$$x_5[\tfrac{1}{5}h^4 - \tfrac{1}{4}h^3C_1^{(4)}(5) + \tfrac{1}{3}h^2C_2^{(4)}(5) - \tfrac{1}{2}hC_3^{(4)}(5) + C_4^{(4)}(5)]$$
$$= h[\tfrac{1}{6}h^4 - \tfrac{1}{5}h^3C_1^{(4)}(5) + \tfrac{1}{4}h^2C_2^{(4)}(5) - \tfrac{1}{3}hC_3^{(4)}(5) + \tfrac{1}{2}hC_4^{(4)}(5)].$$

Ist daher die Beziehung (γ) in Nr. **4** erfüllt, so geht (δ) über in

$$(\delta^*) \quad \tfrac{1}{6}h^4 - \tfrac{1}{5}h^3C_1^{(4)}(5) + \tfrac{1}{4}h^2C_2^{(4)}(5) - \tfrac{1}{3}hC_3^{(4)}(5) + \tfrac{1}{2}hC_4^{(4)}(5) = 0.$$

Dadurch wird dann die Formel (5) auf Formel (3) reduziert, vorausgesetzt, daß die Bedingungen (γ) und (δ^*) zwischen x_1, x_2, x_3, x_4 bestehen. Tritt

nun ferner die Relation (β) der Nr. **3** zwischen x_1, x_2, x_3 in Kraft, so vereinfachen sich die Relationen (γ) und (δ^*) durch die Umrechnungen in Nr. **3**, und man erhält, wenn man noch zur Vereinfachung $x_1+x_2+x_3=s_1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=s_2$, $x_1x_2x_3=s_3$ setzt, folgende drei Gleichungen für s_1, s_2, s_3:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}h^3 - \tfrac{1}{3}h^2 s_1 + \tfrac{1}{2}h s_2 - \phantom{\tfrac{1}{2}} s_3 &= 0, \\ \tfrac{1}{5}h^3 - \tfrac{1}{4}h^2 s_1 + \tfrac{1}{3}h s_1 - \tfrac{1}{2} s_3 &= 0, \\ \tfrac{1}{6}h^3 - \tfrac{1}{5}h^2 s_1 + \tfrac{1}{4}h s_1 - \tfrac{1}{3} s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus ihnen berechnet man $s_1 = \frac{3}{2}h$, $s_2 = \frac{3}{5}h^2$, $s_3 = \frac{1}{20}h^3$. Folglich sind x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$x^3 - \tfrac{3}{2}hx^2 + \tfrac{3}{5}h^2x - \tfrac{1}{20}h^3 = 0.$$

Dieselbe hat eine Wurzel $\frac{1}{2}h$; die beiden anderen folgen aus der quadratischen Gleichung $x^2 - hx + \frac{1}{10}h^2 = 0$, d. h. $x_{1,3} = \frac{1}{2}h \pm \frac{1}{2}h\sqrt{0,6}$. Setzt man diese Werte in (3) ein, so erhält man

$$J' = \tfrac{1}{18}h\left[5f\left(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}h\sqrt{0,6}\right) + 8f\left(\tfrac{1}{2}h\right) + 5f\left(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}h\sqrt{0,6}\right)\right],$$

die einzige in (3) enthaltene Formel, welche J bis zur fünften Potenz von x in $f(x)$ genau darstellt. Dies ist die dritte Gaußsche Formel.

Aus dem Gegebenen ist die Möglichkeit der Ausdehnung der Betrachtungen auf die folgenden Fälle des sechsten, siebenten, . . . Grades von $\varphi(x)$ ersichtlich. Wegen der Knappheit des zur Verfügung stehenden Raumes wird hier abgebrochen. Aus demselben Grunde muß die Mitteilung von Beispielen, welche zur Veranschaulichung der verschiedenen Fälle dienen, die Berechnung der Fehlerglieder in diesen Fällen, sowie die Belegung der allgemeinen Ergebnisse durch wirklich berechnete Zahlenwerte von Integralen unterbleiben.

Über die projektive Geometrie.

Von Gerhard Hessenberg.

I.

1. Die in neuerer Zeit vielfach aufgestellten, durch das Fehlen gewisser Axiomgruppen ausgezeichneten, künstlichen Geometrieen, wie die nichteuklidische, nichtarchimedische, nichtpascalsche u. s. f., verfolgen den Zweck, die logische Abhängigkeit gewisser hervorragender Sätze von den Axiomen klarzustellen. Sie konstatieren entweder den axiomatischen Charakter eines Satzes, — so die nichteuklidische den des bekannten Parallelenaxioms, — und damit seine Unbeweisbarkeit überhaupt; oder sie stellen die Abhängigkeit eines Satzes von gewissen Axiomgruppen fest, — so die nichtpascalsche Geometrie die Unmöglichkeit, den projektiven Fundamentalsatz unter gleichzeitiger Vermeidung der Kongruenz und der Stetigkeit nachzuweisen. Im ersten Falle wird die Frage nach der *Strenge* eines Beweises, im zweiten die nach seiner *Reinheit* erledigt: Der Parallelensatz ist nicht streng, der Fundamentalsatz streng, aber nicht rein zu beweisen.

2. Ob die hier getroffene Unterscheidung allgemein durchführbar ist, bleibe dahingestellt. Jedenfalls ist im Falle der Unmöglichkeit eines reinen Beweises die Frage berechtigt, in welchen Beziehungen der zu beweisende Satz zu anderen Gebieten stehe, die, seinem Inhalte anscheinend fremd, bei seinem Beweise gleichwohl unentbehrlich sind. Diese Frage ist beispielsweise für den Desarguesschen Satz so beantwortet worden, daß er die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß die ihn enthaltende ebene Geometrie als Teil einer räumlichen aufgefaßt werden kann. Der Beweis dieses ebenen Schnittpunktsatzes durch räumliche Betrachtungen enthält nach dieser Erkenntnis nichts Unbefriedigendes mehr. Ähnlich kann man den in neuerer Zeit als „Pascalschen" bezeichneten Satz[1]) als notwendige und hinreichende Bedingung dafür ansehen, daß die ihn enthaltende Geometrie als Teil einer Geometrie von konstanter Krümmung aufgefaßt werden kann. Insofern erscheint die Heranziehung der Kongruenzsätze bei seinem Beweise in einem durchaus natürlichen Lichte.

3. Aus dem Desarguesschen und Pascalschen Satze kann der projektive Fundamentalsatz und damit jeder ebene Schnittpunktsatz bewiesen werden. Beim Aufbau der Geometrie der reinen Schnittpunktsätze spielen aber auch Fragen der Anordnung eine gewisse Rolle; so beim Nachweis, daß harmonische Punktepaare sich trennen, oder daß eine Involution bei Gegenläufigkeit der involutorischen Punktreihen Doppelelemente besitzt, bei Gleichläufigkeit nicht. Nach Einführung imaginärer Elemente verschwinden aber diese Fragen gänzlich. Alle Involutionen erhalten Doppelelemente; von jedem Punkte, auch im Innern eines Kegelschnittes, gibt es Tangenten an denselben. Damit kann die Frage nach der Reinheit der mit Anordnungssätzen

1) Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Gegenseitenpaare in Punkten einer Geraden.

durchsetzten Beweismethode aufgeworfen werden und soll im folgenden beantwortet werden. Bekannt ist über die Frage folgendes:

I. Der Beweis des Pascalschen Satzes in unserer gewöhnlichen Geometrie erfordert die Anordnungsaxiome, da sie für die Formulierung des Streckenbegriffes in den Kongruenzsätzen wie für die Formulierung der Begriffe „größer“ und „kleiner“ im Archimedischen Axiom in gleicher Weise unentbehrlich sind.

II. Der Beweis des Desarguesschen Satzes kann auf Grund der Verknüpfungsaxiome und des Parallelenaxioms ohne Anwendung der Anordnungsaxiome geführt werden.

III. Um irgend einen ebenen Schnittpunktsatz aus dem Desargues und Pascal herzuleiten, sind die Anordnungsaxiome nicht erforderlich.

Danach sind für den *Beweis* eines Schnittpunktsatzes Anordnungsfragen nicht aufzuwerfen, sofern sie von vornherein beim Beweis des Pascalschen Satzes erledigt wurden. Demgegenüber soll nun folgendes nachgewiesen werden:

IV. *Der anschauliche Inhalt und damit die Tragweite eines Schnittpunktsatzes für unsere gewöhnliche Geometrie kann nur unter Zuhilfenahme der Anordnungsaxiome erkannt werden.*

II.

4. Es bedeute Π ein Zahlensystem im Sinne Hilberts[1]) mit folgenden Eigenschaften: Es möge zwei kommutativ-associative Operationen geben, die wir Addition und Multiplikation nennen, und die durch das distributive Gesetz mit einander verknüpft sind. Die Addition möge für alle Elemente eindeutig umkehrbar sein, d. h. es möge stets zu zwei Elementen a, b ein und nur ein drittes $c = a - b$ geben, so daß $b + c = a$ ist. Das Element $a - a (= b - b)$ möge mit 0 bezeichnet sein. Ebenso möge es stets ein und nur ein Element d geben, so daß $bd = a$ ist, ausgeschlossen den dem distributiven Gesetz widersprechenden Fall $b = 0$. Das Element $a : a$, welches gleich $b : b$ wird, sei mit 1 bezeichnet.

5. Aus einem Zahlensystem Π können wir ein neues $\Pi(t)$ von den gleichen Eigenschaften herstellen. t sei ein Buchstabe, mit dessen Hilfe wir Reihen von der Form $P = p'_m t^m + p_{m+1} t^{m+1} + p_{m+2} t^{m+2} + \cdots$ mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl bilden. m sei eine positive oder negative (endliche) ganze Zahl; $p_m, p_{m+1}, \ldots$ seien Zahlen des Systems Π. Wir addieren zwei solche Reihen durch Addition der zu gleichen Potenzen von t gehörigen Koeffizienten. Wir multiplizieren sie formal nach dem distributiven Gesetz, setzen $p_\mu t^\mu \cdot q_\nu t^\nu = (p_\mu q_\nu) \cdot t^{\mu + \nu}$ und fassen alle Glieder mit gleichen Potenzen von t wieder additiv zusammen. Man überzeugt sich mühelos von der Eindeutigkeit der Umkehrung der Addition und Multiplikation, der Existenz der 0 und der 1 $(1 = 1 \cdot t^0,\ 0 = \Sigma 0 \cdot t^m)$, wobei die Eindeutigkeit der Division

1) D. h. ein System von Dingen, zwischen denen gewisse formale Gesetze des zahlenmäßigen Rechnens gültig sind.

in der Unzulässigkeit unendlich vieler negativer Potenzen von t wurzelt. Also bilden alle Reihen der Form P wieder ein System $\Pi(t)$ mit den in **4.** angeführten Eigenschaften.

6. Sind x, y, a, b, $c \ldots$ Zahlen eines Systems Π, so nennen wir das Paar x, y einen Punkt, das Tripel a, b, c eine Gerade. Wir betrachten zwei Punkte (x, y), (x', y') als identisch, wenn $x = x'$, $y = y'$ ist, zwei Gerade (a, b, c), (a', b', c'), wenn $a : a' = b : b' = c : c'$ ist. Ein Punkt x, y gilt als in der Geraden (a, b, c) liegend, wenn $ax + by + c = 0$ ist.

In einer so konstruierten ebenen Geometrie gelten der Desarguessche und der Pascalsche Satz, mithin sämtliche ebenen Schnittpunktsätze. Dies übersieht man ohne weiteres, wenn man bedenkt, daß bei den gewöhnlichen analytischen Beweisen ebener Schnittpunktsätze von dem System der gewöhnlichen Zahlen, dem die Koordinaten angehören, keine anderen Eigenschaften gebraucht werden, als die in **4.** genannten. Zur bequemen und ausnahmslosen Formulierung der Sätze kann auch hier durch Einführung einer fingierten Zahl ∞ und fingierter unendlichferner Elemente das Parallelenaxiom formal beseitigt und jedem Geradenpaare ein Schnittpunkt beigelegt werden.

7. Die umgekehrte Deutung des Kalkuls durch die Geometrie der Schnittpunktsätze ist folgende[1]): Man projiziere von zwei idealen Punkten aus jeden Punkt der Ebene auf ein und dieselbe Gerade g, nach x und nach y. Die Punkte dieser Geraden sind die Zahlen des Systems Π. Zwischen ihnen wird ein Kalkul folgendermaßen hergestellt: ∞ sei der ideale Punkt, 0 und 1 seien zwei beliebige wirkliche Punkte auf g. Zu zwei weiteren wirklichen Punkten a, b konstruieren wir die Punkte $c = a + b$, $e = ab$ mittelst des vollständigen Vierecks. Gehen zwei Gegenseiten durch ∞, zwei weitere durch a und b und vom dritten Paare eine durch 0, so geht die letzte durch c. Gehen zwei Gegenseiten durch ∞, 0, zwei weitere durch a und b, vom dritten Paare eine durch 1, so geht die letzte durch c. Das kommutative Gesetz der Multiplikation folgt aus dem Pascalschen Satze, alle anderen Gesetze einschließlich der Eindeutigkeit der Operationen aus dem Desarguesschen.

III.

8. Ein spezielles System Π_p bilden wir aus den Resten einer Primzahl p, mit denen wir modulo p rechnen. Einem solchen System entspricht eine *endliche* Geometrie, mit p wirklichen, also $p + 1$ allgemeinen Punkten in jeder Geraden, $p + 1$ wirklichen Geraden durch jeden wirklichen Punkt und p wirklichen und der einen idealen Geraden durch jeden idealen Punkt. Nach Staudts Abzählung ist die Anzahl der Punkte und der Geraden einschließlich der idealen insgesamt je $P = p^2 + p + 1$. Im Sinne unserer gewöhnlichen Geometrie ist eine solche endliche Geometrie eine nicht kon-

1) Eine ausführliche Darstellung vom Verfasser erscheint demnächst in den Acta mathematica unter dem Titel: Über einen geometrischen Kalkul.

struierbare Konfiguration (P_p, P_p). Für $p = 2$ erhält man insbesondere sieben Punkte, die Ecken eines vollständigen Vierecks und seines Diagonaldreiecks. Die drei letzteren liegen in einer Geraden. Es sind nämlich allgemein die Punkte ∞, 1 harmonisch zu 0 und $1 + 1$, nach 7. Da hier $1 + 1 \equiv 0$ (mod. 2), fällt der vierte harmonische mit dem zweiten zusammen, was obige Konfiguration $(7_3, 7_3)$ ergibt.

Es kann also ohne Anordnungssätze allein aus dem Desarguesschen und Pascalschen Satze nicht entschieden werden, ob die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes einen vernünftigen Sinn hat. Überhaupt ist in jeder endlichen Geometrie die Anzahl der Schnittpunktsätze endlich, so daß die fortgesetzte Folgerung neuer Sätze nur neue logische Formulierungen für dieselben Tatsachen liefert. Beispielsweise gibt es in der aus Π_2 fließenden Geometrie nur den einen Schnittpunktsatz:

S_2. *„Die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks liegen in einer Geraden.“*

Das dualistische Korollar: *„Die Diagonalen eines vollständigen Vierseits laufen durch einen Punkt“*, beschreibt bereits keine neue Figur mehr. Alle weitergehenden Schnittpunktsätze sind zwar gültig, aber banal.

9. Allgemein läßt sich über eine endliche Geometrie folgendes leicht erkennen: Bei endlicher Punktezahl muß das Verfahren $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ einmal wieder zu 0 führen. Ist p die kleinste Zahl der Summanden, die 0 ergibt, so ist allgemein auch $a + a + a + \cdots$ p-mal gesetzt gleich 0, weil die Wahl des Punktes 1 beliebig und die Konstruktion $a + a + a + \cdots$ projektivisch zu $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ mit den Doppelelementen 0 und ∞ ist.[1]) Zugleich ist auch für $a + a + a + \cdots$ die kleinste Summandenanzahl, welche 0 ergibt, gleich p.

Mithin bilden die wirklichen Punkte eine Gruppe mit der Addition als Operation und der 0 als Einheitselement, in der alle Elemente vom gleichen Grade p sind. Danach ist dieser eine Primzahl und auf Grund des Sylowschen Satzes der Grad der Gruppe selbst eine Potenz derselben. Der Fall, daß p der Grad der Gruppe selbst ist, ist in **8.** behandelt. Ist der Grad gleich p^2, so besteht das Zahlensystem aus allen Zahlen von der Form $a + b\sqrt{n}$, wobei a, b Reste von p und n quadratischer Nichtrest von p ist.[2])

10. Es ist wesentlich, daß auch in einer unendlichen Geometrie ganze Reihen von Schnittpunktsätzen degenerieren können, daß also die Annahme unendlich vieler Punkte auf einer Geraden die Lücke nicht auszufüllen vermag, die durch die Ausschaltung der Anordnungssätze entsteht. Als Beispiel seien die Geometrieen angeführt, die aus den Zahlensystemen $\Pi_p(t)$ entstehen, welche nach dem Verfahren des § 5 aus Π_p gebildet werden können. *Speziell sind in der aus $\Pi_2(t)$ fließenden unendlichen Geometrie*

---

1) Auch auf Grund des distributiven Gesetzes $a(1 + 1 + 1 + \cdots) = a + a + + a \cdots$

2) Die Untersuchungen von Weierstraß Gött. Nachr. 1884. Nr. 10. machen es wahrscheinlich, daß weitere endliche Geometrien nicht existieren.

alle Sätze banal, die mit harmonischer Teilung zusammenhängen, da in ihr der Satz S_2 gilt.[1])

11. Hiermit ist die Behauptung IV am Ende des Abschnittes I näher erläutert und ihre Richtigkeit mit Hilfe einer künstlichen Geometrie nachgewiesen: Für den Beweis eines reinen Schnittpunktsatzes sind die Anordnungsaxiome überflüssig, für das Verständnis seines Inhaltes dagegen unentbehrlich.

---

1) Man könnte sie eine *Nicht-Staudtische* Geometrie nennen, weil in ihr Staudts Versuch, den projektiven Fundamentalsatz zu erweisen, undenkbar ist; oder eine *Nicht-Hilbertsche*, weil in ihr Herrn Hilberts Satz nicht gilt, daß jeder ebene Schnittpunktsatz aus dem Pascalschen und Desarguesschen hergeleitet werden kann; denn dies trifft für den Satz S_2 nicht zu.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

14. Sitzung am 25. Februar 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 34 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kötter: Über eine mechanische Aufgabe aus dem Gebiete der Markscheidekunst.

Herr Wallenberg: Referat über neuere Literatur: Über die Zusammensetzung und Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke [Arbeiten von E. Landau, Journ. f. Math. **124**; A. Loewy, Leipz. Ber. 1902, Gött. Ber. 1902, Math. Ann. **56**; G. Wallenberg, Arch. d. Math. u. Ph. (3) **4**].

An der Diskussion beteiligen sich die Herren: Knoblauch, Kötter, Rothe, Schneider Skutsch.

15. Sitzung am 25. März 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 35 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rothe: Über den Invariantenbegriff in der Differentialgeometrie (s. u.).

Herr Reichel: Über die Definition des Irrationalen.

Herr Zühlke: Über die symmetrische Wiederholung von Kreisbogendreiecken. (Vgl. Programmbeilage der Oberrealschule zu Charlottenburg, Ostern 1903: P. Zühlke, Über die Vervielfältigung von Kreisbogendreiecken nach dem Symmetriegesetze).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren: Faerber, Hessenberg, Kneser, Knoblauch, Reissner, Reichel, Rothe.

16. Sitzung am 29. April 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 30 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kötter: Der Satz von Castigliano und seine Bedeutung für die Elastizitätstheorie.

Herr Steinitz: Zur Determinantentheorie (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren: Hessenberg, Kneser, Kötter, Rothe, Schur, Steinitz.

17. Sitzung am 27. Mai 1903.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 28 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jahnke: Eine einfache Anwendung der Vektorenrechnung auf die Optik (s. nächstes Heft).

Herr Koppe: Die Bestimmung von Näherungsbrüchen bei John Wallis (1685) (s. nächstes Heft).

Herr Jahnke verliest eine Erklärung von Herrn v. Lilienthal zur Note von Herrn Knoblauch: Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln. Herr Knoblauch antwortet auf diese Erklärung (s. Archiv (3) **5,** 289—291).

Herr Jahnke widmet dem jüngst verstorbenen Ernest Duporcq Worte des Nachrufs.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Koppe, F. Müller.

Über den Invariantenbegriff in der Differentialgeometrie.

Von Rudolf Rothe.

In der Differentialgeometrie werden unter der gemeinsamen Bezeichnung „Invariante" eine Anzahl wesentlich verschiedener Begriffe behandelt, welche, wie es scheint, nicht immer mit der wünschenswerten Reinheit erklärt werden. Die nachstehende Notiz soll nur einen Versuch zu einer systematischen Gruppierung derselben geben.

1. Die Betrachtungen mögen von Anfang an auf einen Raum von n Dimensionen ausgedehnt werden; ein Stück dieses Raumes $(\mathfrak{R})$ werde, wie üblich, definiert durch die Gesamtheit aller Werte eines Bereiches, welche n reelle Veränderliche x_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$, die „Koordinaten", annehmen können. Sind diese nicht von einander unabhängig, sondern etwa durch r $(< n)$ unabhängige Parameter u_i $(i = 1, \ldots, r)$ funktional ausdrückbar, so soll die Gesamtheit der durch die n Gleichungen $x_\alpha = x_\alpha\,(u_1, \ldots, u_r)$ verbundenen Werte x_α ein r-fach ausgedehntes Gebilde (X) des Raumes $(\mathfrak{R})$ genannt werden. Durch die Parameter u_i wird die analytische *Darstellung* des Gebildes (X), durch die Koordinaten x_α seine *Lage* im Raume $(\mathfrak{R})$ definiert. Seine *Metrik* ist durch die des Raumes $(\mathfrak{R})$ gegeben; nach Riemanns Vorgang sei ihr eine definite positive Differentialform $A = \Sigma\Sigma\, A_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ zu Grunde gelegt, in der die $A_{\alpha\beta}$ gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, und die längs des Gebildes (X) die Gestalt $A = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ annimmt, unter a_{ik} Funktionen von $u_1, \ldots, u_r$ verstanden.

Invariante der Darstellung. — Werden an Stelle der u_i neue Parameter t_k $(k = 1, \ldots r)$ in die Funktionen x_α eingeführt, so ergibt sich eine neue Darstellung des Gebildes (X). Sei Φ eine nicht beständig konstante Funktion, deren Argumente die Koordinaten x_α und ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial u_k}, \cdots$ bis zu einer gewissen Ordnung sind. Sie

heißt eine Invariante der Darstellung oder „Differentialinvariante des Gebildes", wenn sie bei Einführung beliebiger neuer Parameter t_k, wie dieselben auch gewählt werden mögen, in die formal gleichgebildete Funktion der Argumente $\bar{x}_\alpha(t_1, \ldots, t_r) \equiv x_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$, $\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial t_k}, \ldots$ übergeht; mit anderen Worten, wenn ihre Gestalt von der willkürlich anzunehmenden Darstellung des Gebildes unabhängig ist.

Außer der Voraussetzung $r < n$ ist für die Existenz solcher Differentialinvarianten nur die Annahme notwendig, daß die Funktionen $x_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$ mit Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung behaftet und von einander funktional unabhängig sind.

Invariante der Bewegung. — Der Begriff der Lagenänderung (Bewegung) des Gebildes (X) im Raume $(\mathfrak{R})$ bedarf besonderer Definitionen, welche mit den Voraussetzungen eng verknüpft sind, die der Geometrie von $(\mathfrak{R})$ zu Grunde gelegt werden. Man kann die Bewegung definieren durch eine funktional vorgeschriebene Koordinatentransformation $x_\alpha = \varphi_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; c_1, c_2, \ldots)$, wo die φ_α *gegebene* Funktionen ihrer Argumente, $x'_1, \ldots, x'_n$ die neuen Koordinaten des Gebildes (X) und $c_1, c_2, \ldots$ von den Koordinaten, aber nicht notwendig von einander unabhängige Bewegungsparameter sind; einem bestimmten Wertsystem der letzteren entspricht eine bestimmte Lagenänderung des Gebildes. Eine Funktion Φ der oben angegebenen Argumente heißt, ihre Existenz vorausgesetzt, eine Invariante der Bewegung, wenn sie bei Einführung neuer Koordinaten $x'_1, \ldots, x'_n$ vermöge der vorstehenden Gleichungen, wie auch die Werte der Bewegungsparameter gewählt werden mögen, in die formal gleichgebildete Funktion der Argumente x'_α, $\frac{\partial x'_\alpha}{\partial u_i}, \ldots$ übergeht; mit anderen Worten, wenn ihre Gestalt von der willkürlich anzunehmenden Lage des Gebildes unabhängig ist.

Solche Invarianten der Bewegung existieren nur bei spezieller Wahl der Funktionen φ_α, im besondern, wenn der Bewegung die linearen Gleichungen $x_\alpha = c_\alpha + \sum_\beta c_{\alpha\beta} x'_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ zu Grunde gelegt werden, unter $c_{\alpha\beta}$ n^2 Koeffizienten einer orthogonalen Substitution verstanden. Auf Gleichungen dieser Form ist bekanntlich die allgemeinste Bewegung der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes zurückzuführen.

Invariante der metrischen Kongruenz. — Ist $\mathsf{A} = \sum_i \sum_k a_{ik}\, du_i\, du_k$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ die Differentialform der Metrik eines im Raume $(\mathfrak{R})$ gelegenen Gebildes (X), so soll ein Gebilde $(\mathfrak{X})$ desselben Raumes als metrisch kongruent mit (X) bezeichnet werden, wenn es sich so darstellen läßt, daß seine Differentialform der Metrik mit A identisch ist. Eine Funktion Φ der oben angegebenen Argumente heißt dann eine Invariante der metrischen Kongruenz, wenn sie bei Einführung neuer Funktionen $\mathfrak{x}_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$ an Stelle von $x_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$, wofern jene nur ein metrisch kongruentes Gebilde darstellen, ihren Wert für jedes Wertsystem $u_1, \ldots, u_r$ beibehält; mit anderen Worten, wenn ihr Wert von der willkürlich anzunehmenden Wahl des Gebildes unter allen metrisch kongruenten unabhängig ist. Invarianten der metrischen Kongruenz existieren stets.

2. Nach Festsetzung der verschiedenen Begriffe „Invariante" ist es für jeden der drei genannten Fälle notwendig, auf die Aufgabe der Bestimmung *aller* Invarianten einzugehen.

Wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ irgend r verschiedene der Zahlen $1, \ldots, n$ bedeuten und $D(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r}) = \frac{\partial (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r})}{\partial (u_1, \ldots, u_r)}$ irgend eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante r^{ten} Grades der Ableitungen erster Ordnung, so ist

$$\Theta(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r}) = \frac{D(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r})}{\sqrt{\Sigma D^2 (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r})}}$$

eine Differentialinvariante erster Ordnung (Θ-Invariante), worin die Summe Σ über alle verschiedenen Funktionaldeterminanten erster Ordnung sich erstreckt. Jede Differentialinvariante *erster* Ordnung ist als Funktion von Θ-Invarianten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als homogene Funktion nullter Dimension der Funktionaldeterminanten $D(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r})$ darstellbar.[1]) *Jede* Differentialinvariante läßt sich durch wiederholte Bildung der invarianten Θ-Operation darstellen; dabei können die Argumente $x_1, \ldots, x_n$ in beliebiger Weise auftreten.[2])

Die Bestimmung aller Invarianten einer Bewegung ist naturgemäß nur für spezielle Bewegungen geleistet. Durch die Untersuchungen Lies sind insbesondere alle Invarianten der Bewegungen in Räumen konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes bestimmt. Wenn $\xi_1, \ldots, \xi_n$ den $x_1, \ldots, x_n$ hinsichtlich dieser Bewegungen kogredient sind, welche der Einfachheit wegen als euklidisch angenommen werden mögen, und $y_\alpha = x_\alpha - \xi_\alpha$ gesetzt wird, so ist jede Funktion von $\varrho = y_1^2 + \cdots + y_n^2$ eine Invariante der euklidischen Bewegung, und umgekehrt jede nur von $y_1, \ldots, y_n$ abhängige Invariante der euklidischen Bewegung ist als Funktion von ϱ darstellbar.[3])

---

1) Beim Beweise dieses Satzes (Crelles Journal Bd. 125, S. 241 ff.) ist von den Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix Gebrauch gemacht und dabei auf eine darauf bezügliche Arbeit des Herrn Vahlen (ebendas. Bd. 112, S. 306 ff.) verwiesen worden. Es finden sich diese Relationen aber schon eine Reihe von Jahren früher vollständig entwickelt in einer Abhandlung des Herrn Hamburger (ebendas. Bd. 100, S. 390 ff.), eine Tatsache, deren Kenntnis ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Hamburger verdanke.

2) Ein spezieller Fall (für $r = 1$ und falls ($\mathfrak{R}$) ein euklidischer Raum ist) dieses Satzes ist der von Herrn Zermelo gefundene, nach welchem sich alle Differentialinvarianten („Osculationsinvarianten" in der Bezeichnung des Herrn Zermelo) einer Kurve als Funktionen der Argumente $x_\alpha, \frac{dx_\alpha}{ds}, \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2}, \ldots$ ausdrücken lassen.

3) Der Liesche Beweis dieses Satzes verlangt, daß die n^2 Drehungsparameter $c_{\alpha\beta}$ vermittels der von Euler und Cayley angegebenen Formeln durch $\frac{1}{2} n(n-1)$ Größen rational ausgedrückt werden. Von dieser Bedingung wird man frei, wenn man beachtet, daß durch das Bestehen der beiden Relationen

$$y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} y'_\beta, \qquad y'_\beta = \sum_\alpha c_{\alpha\beta} y_\alpha$$

Ist η_α irgend ein dem System y_α hinsichtlich der Drehung kogredientes System und $\sigma = y_1\eta_1 + \cdots + y_n\eta_n$, $\tau = \eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2$, so ist jede Funktion der Argumente ϱ, σ, τ und nur eine solche eine Invariante der euklidischen Bewegung. Die Größen $\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i}$, $\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial u_k}$, ... haben die Eigenschaft der Kogredienz mit y_α. Wenn also eine Invariante Φ der euklidischen Bewegung die Argumente x_α, $\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i}$, ..., aber keine mit x_α kogredienten Größen enthält, so ist sie von $x_1, \ldots, x_n$ überhaupt unabhängig und nur eine Funktion der Größen $E_{ik} = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}$, ... Das Entsprechende gilt von den Invarianten der nichteuklidischen Bewegung.

Alle Invarianten der metrischen Kongruenz erhält man, weil die metrisch kongruenten Gebilde eine gemeinschaftliche Differentialform der Metrik $\mathsf{A} = \Sigma\Sigma a_{ik} du_i du_k$ besitzen, als Funktionen der Koeffizienten a_{ik} dieser Form und der Ableitungen derselben.

3. Es kann der Fall eintreten, daß eine Funktion Φ der angegebenen Argumente gleichzeitig zwei oder alle drei der im vorstehenden auseinandergesetzten Invarianteneigenschaften besitzt. Für die Räume konstanten Krümmungsmaßes sind sogar die Invarianten der metrischen Kongruenz allemal Invarianten der Bewegung.

Nun sei zunächst Φ eine Differentialinvariante der metrischen Kongruenz, d. h. gleichzeitig eine Invariante der Darstellung und der metrischen Kongruenz. Zu solchen Invarianten gelangt man bei Einführung des Begriffs der Biegung. Ist $\mathsf{A} = \Sigma\Sigma A_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_\alpha dx_\beta = \Sigma\Sigma a_{ik}(u_1, \ldots, u_r)\, du_i du_k$ die Differentialform der Metrik eines im Raume $(\mathfrak{R})$ gelegenen Gebildes (X), so wird ein Gebilde $(\mathring{X})$ desselben Raumes als Biegungsgebilde von (X) — metrisch äquivalent mit (X) — bezeichnet, wenn seine Differentialform der Metrik mit A äquivalent ist. Die Aufgabe, alle Systeme von je n Funktionen $\mathring{x}_\alpha(t_1, \ldots, t_r)$ der Art zu bestimmen, daß die Differentialform $\mathring{\mathsf{A}} = \Sigma\Sigma A_{\alpha\beta}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)\, d\mathring{x}_\alpha d\mathring{x}_\beta = \Sigma\Sigma \mathring{a}_{ik}(t_1, \ldots, t_r)\, dt_i dt_k$ mit A

---

die Bedingung der Orthogonalität des Systems $c_{\alpha\beta}$ genau ausgedrückt ist. Wenn nun $f(y_1, \ldots, y_n)$ eine Invariante ist, so folgt aus dem Bestehen der Gleichung $f(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1', \ldots, y_n')$ und den vorstehenden Relationen die Gleichung

$$\sum_\beta c_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\beta'} y_\alpha - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} y_\beta'\right) = 0$$

und wegen der vorauszusetzenden Stetigkeit der Bewegung die infinitesimale

$$\sum_\beta \delta c_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\beta} y_\alpha - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} y_\beta\right) + \cdots = 0,$$

wo die fortgelassenen Glieder mit der Annäherung von y_α' an y_α von höherer als der ersten Ordnung verschwinden, eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn der Klammerausdruck für jeden Wert von α und β verschwindet, d. h. wenn $f(y_1, \ldots, y_n)$ eine willkürliche Funktion des Arguments $\varrho = y_1^2 + \cdots + y_n^2$ ist.

äquivalent ist, wird als das Biegungsproblem bezeichnet. Eine Funktion Φ der oben angegebenen Argumente heißt eine Biegungsinvariante, wenn sie bei Einführung neuer Funktionen $\mathring{x}_\alpha(t_1, \ldots, t_r)$ an Stelle von $x_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$, wie dieselben auch den Bedingungen des Biegungsproblems entsprechend gewählt werden mögen, in die formal gleichgebildete Funktion der Argumente $\mathring{x}_\alpha(t_1, \ldots, t_r)$, $\frac{\partial \mathring{x}_\alpha}{\partial t_i}$, ... übergeht; mit anderen Worten, wenn ihre Gestalt von der willkürlichen Wahl des Gebildes (X) unter allen Biegungsgebilden unabhängig ist. Weil die Differentialform $\mathsf{A} = \Sigma\Sigma A_{\alpha\beta}\, d x_\alpha\, d x_\beta$ die Eigenschaften einer Differentialinvariante besitzt, so fällt der Begriff der Biegungsinvarianten nach dem Vorstehenden zusammen mit dem formentheoretischen Begriff der Invarianten einer quadratischen Differentialform. Bekanntlich gibt es keine eigentlichen Biegungsinvarianten erster Ordnung, sondern nur Kovarianten, d. h. Funktionen invarianten Charakters, welche außer den Koordinaten und ihren Ableitungen noch mindestens eine willkürliche Funktion $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ und deren Ableitungen enthalten.[1] Die einfachste Biegungsinvariante ist von zweiter Ordnung und die Gaußsche Invariante der Form. Hat der Raum $(\mathfrak{R})$ konstantes Krümmungsmaß, so ist die Gaußsche Invariante der Differentialform der Metrik des Gebildes (X) gleichzeitig Invariante der Darstellung, der metrischen Kongruenz und der Bewegung.

Zweitens sei Φ eine Differentialinvariante der Bewegung. Wenn das Krümmungsmaß des Raumes $(\mathfrak{R})$ konstant ist, so kann mindestens für die erste und zweite Ordnung stets je eine quadratische Differentialform konstruiert werden, deren Koeffizienten Invarianten der Bewegung sind und die den Charakter einer Differentialinvariante besitzt; daher ist auch unter der gemachten Annahme der Begriff der Differentialinvariante der Bewegung von dem formentheoretischen Begriff der Invariante einer quadratischen Form oder der Simultaninvariante mehrerer Formen nicht verschieden. Die Invarianten *einer* Form sind den Biegungsinvarianten gleich oder gleichgebild[illegible].

Diese übliche formentheoretische Methode der Untersuchung für die Differentialinvarianten der Bewegung hat aber, worauf nochmals hingewiesen sei, die Konstanz des Krümmungsmaßes des Raumes $(\mathfrak{R})$ zur Voraussetzung. Ob die Methode auch für andere Räume anwendbar ist, bedarf einer besonderen Untersuchung und wird wesentlich von der Definition der Bewegung abhängen.

Charlottenburg.

---

1) Die Bezeichnung Biegungsinvariante wird Herrn Weingarten verdankt, die entsprechende Biegungskovariante Herrn Knoblauch.

Über die linearen Transformationen, welche eine Determinante in sich überführen.

Von Ernst Steinitz.

Sind u_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ n^2 unabhängige Veränderliche, so ist die Determinante $|u_{ik}|$ eine Form $n$ten Grades derselben. Werden die n^2 Elemente einer linearen Transformation mit konstanten Koeffizienten und nicht verschwindender Determinante unterworfen

$$(1) \qquad u_{ik} = \sum_{lm} c_{lm}^{(ik)} \cdot v_{lm}, \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

so geht die Form in eine Form $n$ten Grades der Veränderlichen v_{ik} über. Es sollen nun aus der Gesamtheit aller Transformationen (1) diejenigen aufgesucht werden, welche die Determinante $|u_{ik}|$, abgesehen von einem konstanten Faktor, in sich transformieren, d. h. die Gleichung

$$(2) \qquad |u_{ik}| = \varrho\, |v_{ik}|$$

nach sich ziehen, worin ϱ eine Konstante bedeutet. Dabei sollen zwei Transformationen, deren Koeffizienten sich nur um einen konstanten, d. i. von i, k, l, m unabhängigen Faktor unterscheiden, nicht als verschieden angesehen werden.

Das Multiplikationstheorem der Determinanten führt auf derartige Transformationen. Sind nämlich v_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ unabhängige Variable, a_{ik} und b_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ Konstanten, sind ferner die Determinanten $|a_{ik}| = A$ und $|b_{ik}| = B$ von Null verschieden, und bildet man nach der gewöhnlichen Kompositionsregel für quadratische Systeme

$$(a_{ik}) \cdot (v_{ik}) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot v_{lk}\right), \quad (v_{ik}) \cdot (b_{ik}) = \left(\sum_{m=1}^{n} b_{mk} \cdot v_{im}\right),$$

so ist, wenn noch

$$(3) \qquad u_{ik} = \sum_{l} a_{il} \cdot v_{lk}$$

bezw. $\qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$

$$(4) \qquad u_{ik} = \sum_{m} b_{mk} \cdot v_{im}$$

gesetzt wird,

$$|u_{ik}| = A \cdot |v_{ik}| \quad \text{bezw.} \quad |u_{ik}| = B \cdot |v_{ik}|,$$

d. h. die Transformationen (3) und (4) führen die Determinante $|u_{ik}|$ in sich über. Daß ferner die Determinanten der Transformationen (3) und (4) von Null verschieden sind, erkennt man aus der Auflösbarkeit dieser Gleichungen nach den v_{ik}, auch sieht man leicht, daß diese Determinanten die Werte A^n und B^n haben.

Die Gesamtheit aller Transformationen (3) bildet eine Gruppe G', ebenso die Gesamtheit aller Transformationen von der Form (4) eine Gruppe

G''. G' und G'' erzeugen eine größere Gruppe G von Transformationen der Determinante in sich. Jede Transformation von G hat die Form

$$u_{ik} = \sum_{lm} a_{il} \cdot b_{mk} \cdot v_{lm} \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

und ergibt sich durch Zusammensetzung einer Transformation (3) mit einer Transformation (4). Dabei können zwei verschiedene Zusammensetzungen nicht zu derselben Transformation (5) führen. Denn sollen die Transformationen

$$u_{ik} = \sum_{lm} a_{il} \cdot b_{mk} \cdot v_{lm} \quad \text{und} \quad u_{ik} = \sum_{lm} a'_{il} \cdot b'_{mk} \cdot v_{lm}$$

mit einander identisch sein, also Gleichungen von der Form

$$a_{il} \cdot b_{mk} = \varrho \cdot a'_{il} \cdot b'_{mk} \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

bestehen, und sind etwa die Elemente a_{pq} und b_{rs} von Null verschieden, so folgt aus den letzten Gleichungen, wenn noch

$$\varrho \cdot \frac{a'_{pq}}{a_{pq}} = \sigma, \quad \varrho \cdot \frac{b'_{rs}}{b_{rs}} = \tau$$

gesetzt wird,

$$b_{mk} = \sigma \cdot b'_{mk}, \quad a_{il} = \tau \cdot a'_{il}, \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

wo σ und τ von i, k, l, m unabhängig sind.

Mit den Transformationen (5) sind aber (für $n > 1$) nicht alle Transformationen erschöpft, welche die Determinante invariant lassen. Offenbar nämlich gehört zu den letzteren auch die Transformation

$$u_{ik} = v_{ki}, \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

und man erhält, wenn man jede Transformation (5) mit ihr zusammensetzt, noch die Transformationen

$$u_{ik} = \sum_{lm} a_{im} \cdot b_{lk} \cdot v_{lm}. \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Dieselben sind von den Transformationen (5) durchaus verschieden. Die Identität zweier Transformationen $u_{ik} = \sum_{lm} a_{il} \cdot b_{mk} \cdot v_{lm}$ und $u_{ik} = \sum_{lm} a'_{im} \cdot b'_{lk} \cdot v_{lm}$ würde sich nämlich in den Gleichungen

$$a_{il} \cdot b_{mk} = \varrho \cdot a'_{im} \cdot b'_{lk} \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

aussprechen, und man könnte, weil $|a_{il}| \neq 0$, $|b'_{lk}| \neq 0$ ist, für irgend ein beliebiges l noch i und k so bestimmen, daß $a_{il} \neq 0$, $b'_{lk} \neq 0$ wird. Dann würde für ein $j \gtrless i$ aus

$$a_{il} \cdot b_{mk} = \varrho \cdot a'_{im} \cdot b'_{lk} \quad \text{und} \quad a_{jl} \cdot b_{mk} = \varrho \cdot a'_{jm} \cdot b'_{lk} \quad (m = 1, \ldots, n)$$

folgen:

$$a'_{jm} = \frac{a_{jl}}{\varrho \cdot b'_{lk}} \cdot b_{mk} = \frac{a_{jl}}{\varrho \cdot b'_{lk}} \cdot \frac{\varrho \cdot b'_{lk}}{a_{il}} \cdot a'_{im}$$

also

$$a'_{jm} = \frac{a_{jl}}{a_{il}} \cdot a'_{im}, \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

was mit der Annahme $|a'_{ik}| \neq 0$ unvereinbar ist.

Wir werden aber zeigen, daß durch (5) und (6) alle Transformationen dargestellt werden, welche die Determinante in sich überführen:

Theorem: Wenn eine Transformation von nicht verschwindender Determinante

(1) $$u_{ik} = \sum_{lm} c_{lm}^{(ik)} \cdot v_{lm} \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

die Gleichung

(2) $$|u_{ik}| = \varrho \, |v_{ik}|$$

zur Folge hat, so sind die Koeffizienten entweder von der Form

(7) $$c_{lm}^{(ik)} = a_{il} \cdot b_{mk}$$

oder von der Form

(8) $$c_{lm}^{(ik)} = a_{im} \cdot b_{lk}.$$

Bevor wir den Beweis allgemein führen, geben wir für den Fall $n = 2$ eine geometrische Interpretation. Deutet man in diesem Falle u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} als homogene Koordinaten der Punkte des Raumes, so stellt die Determinante $u_{11} \cdot u_{22} - u_{12} \cdot u_{21}$, gleich Null gesetzt, eine allgemeine Fläche zweiten Grades F dar, und die Transformationen, welche die Determinante invariant lassen, werden zu Kollineationen, welche die Fläche in sich überführen. Es seien R_1 und R_2 die beiden Regelscharen von F. Eine einfache Überlegung zeigt alsdann, daß durch die Gruppe G' der Kollineationen (3) unter den Strahlen der einen Regelschar, etwa R_1, alle möglichen projektiven Vertauschungen hervorgerufen werden, während jeder Strahl der Schar R_2 an seinem Platze bleibt. Bei den Kollineationen (4) (Gruppe G'') verhält es sich natürlich umgekehrt. Daraus folgt dann, daß die aus G' und G'' kombinierte Gruppe der Kollineationen (5) alle Kollineationen umfaßt, welche jede der Regelscharen R_1, R_2 in sich überführen. Außer diesen kann es aber nur noch solche Kollineationen geben, welche R_1 mit R_2 vertauschen; und da alle diese Kollineationen sich durch die Kombination *einer* von ihnen mit den sämtlichen früheren ergeben, so müssen sie alle durch (6) dargestellt werden. Damit wäre der Beweis für $n = 2$ geführt.

Es liegt nahe, auch den Beweis des allgemeinen Falles in geometrisches Gewand zu kleiden, doch ziehen wir eine algebraische Behandlung vor.

1. Wenn irgend eine homogene Form U von Variabelen u durch lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante in eine homogene Form V von Variabelen v übergeführt wird, so werden die nach den v genommenen partiellen Ableitungen einer bestimmten Ordnung r der Form V homogene lineare Funktionen der nach den u genommenen partiellen Ableitungen derselben Ordnung der Form U; und umgekehrt. Wenn also für

irgend ein Wertsystem u bezw. v alle partiellen Ableitungen r ter Ordnung von U bezw. V verschwinden, so müssen für das entsprechende Wertsystem v bezw. u alle partiellen Ableitungen r ter Ordnung von V bezw. U verschwinden. Wir wenden diese Überlegung auf unseren Fall an, in welchem $U = |u_{ik}|$, $V = \varrho \cdot |v_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ ist. Hier sind nun die partiellen Ableitungen r ter Ordnung von U bezw. V nichts anderes als die Subdeterminanten $(n-r)$ ten Grades aus dem System (u_{ik}) bezw. die mit ϱ multiplizierten Subdeterminanten $(n-r)$ ten Grades aus dem System (v_{ik}). Wenn also für ein Wertsystem (u_{ik}) alle Subdeterminanten eines bestimmten Grades verschwinden, so verschwinden für das entsprechende Wertsystem (v_{ik}) alle Subdeterminanten desselben Grades; und umgekehrt. Es gilt also der

Hilfssatz I. Wenn eine Transformation (1) *die Gleichung* (2) *nach sich zieht, so haben je zwei einander vermöge der Transformation entsprechende Systeme* (u_{ik}) *und* (v_{ik}) *gleichen Rang.*

2. Wir fassen nun alle und nur die Systeme (v_{ik}) ins Auge, deren Rang gleich Eins ist. Wir erreichen diesen Zweck, indem wir

$$v_{ik} = v_i' \cdot v_k'' \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

setzen, wo die v' und v'' unabhängige Variabele sind mit der einzigen Einschränkung, daß weder alle v' noch alle v'' gleichzeitig verschwinden. Denn nicht nur ist jedes System $(v_i' \cdot v_k'')$ vom Range Eins, sondern es kann auch umgekehrt jedes System vom Range Eins in dieser Form dargestellt werden. Vermöge (1) und (9) werden jetzt die u_{ik} bilineare Formen der v' und v'' nämlich

$$u_{ik} = \sum_{lm} c_{lm}^{(ik)} \cdot v_l' \cdot v_m'' . \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

Aus Hilfssatz I folgt erstens, daß die durch die Gleichungen (10) in Abhängigkeit von einander gesetzten u_{ik} nur mehr fähig sind, quadratische Systeme vom Range Eins darzustellen, aber auch zweitens, daß sie fähig sind, *jedes* quadratische System vom Range Eins darzustellen. Aus dem zweiten Umstande ergibt sich, daß keine der n^2 Bilinearformen u_{ik} identisch verschwindet, und daß je zwei von ihnen wesentlich, d. h. nicht nur um einen konstanten Faktor, verschieden sind.

Es sei $i \neq j$, $k \neq l$. Da das System (u_{ik}) der durch (10) definierten Bilinearformen vom Range Eins ist, so folgt

$$\begin{vmatrix} u_{ik} u_{il} \\ u_{jk} u_{jl} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad u_{ik} \cdot u_{jl} = u_{il} \cdot u_{jk} .$$

Die bilineare Form u_{ik} kann nicht irreduzibel sein: denn sonst müßte sie zufolge der letzten Gleichung in u_{il} oder in u_{jk} aufgehen, also mit u_{il} oder u_{jk}, von einem konstanten Faktor abgesehen, übereinstimmen. Wir erhalten demnach:

Hilfssatz II. Wenn die Transformation (1) *die Gleichung* (2) *nach sich zieht, so sind die durch* (10) *definierten bilinearen Formen* u_{ik} *sämtlich zerlegbar.*

3. Eine zerlegbare Bilinearform der Variabelensysteme v' und v'' ist das Produkt aus einer linearen Form der v' und einer linearen Form der v''; diese Formen sind bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Es stelle

$$u_{11} = u_1' \cdot u_1''$$

die Zerlegung von u_{11} dar, dergestalt, daß u_1' Linearform der v', u_1'' Linearform der v'' wird. Aus $u_1' \cdot u_1'' \cdot u_{22} = u_{11} \cdot u_{22} = u_{12} \cdot u_{21}$ folgt, daß von den beiden Linearformen u_1', u_1'' die eine in u_{12}, die andere in u_{21} aufgehen muß. Es sind also zwei Fälle möglich:

Erster Fall: u_1' geht in u_{12}, u_1'' in u_{21} auf.

Zweiter Fall: u_1' geht in u_{21}, u_1'' in u_{12} auf.

Wir behandeln den ersten Fall. Hier können wir setzen:

$$u_{12} = u_1' \cdot u_2'', \quad u_{21} = u_2' \cdot u_1'',$$

wo u_2'' und u_2' lineare Formen der v'' bezw. v' und von u_1'' bezw. u_1' wesentlich verschieden sind, weil u_{11} von u_{12} und u_{21} wesentlich verschieden ist. Aus den letzten beiden Gleichungen und aus $u_{11} = u_1' \cdot u_1''$ folgt alsdann noch

$$u_{22} = u_2' \cdot u_2''.$$

Betrachtet man nun für $i > 2$, $k > 2$ die Gleichungen $u_{11} \cdot u_{i2} = u_{12} \cdot u_{i1}$ und $u_{11} \cdot u_{2k} = u_{21} \cdot u_{1k}$, welche nach Division durch u_1' bezw. u_1'' die Form $u_1'' \cdot u_{i2} = u_2'' \cdot u_{i1}$ bezw. $u_1' \cdot u_{2k} = u_2' u_{1k}$ annehmen, so folgt, daß u_{i1} durch u_1'', u_{1k} durch u_1' teilbar ist, und man kann

$$u_{i1} = u_i' \cdot u_1'', \quad u_{1k} = u_1' \cdot u_k'' \qquad (i, k = 3, \ldots, n)$$

setzen, wo u_i' und u_k'' lineare Formen der v' bezw. der v'' sind. Endlich hat man $u_1' \cdot u_1'' \cdot u_{ik} = u_{11} \cdot u_{ik} = u_{i1} \cdot u_{1k} = u_i' \cdot u_1'' \cdot u_1' \cdot u_k''$ und somit ganz allgemein die Gleichung

$$u_{ik} = u_i' \cdot u_k''. \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

Da (u_{ik}) jedes System vom Range Eins darstellen kann, so sind

$$u_{11} = u_1' \cdot u_1'', \quad u_{21} = u_2' \cdot u_1'', \; \ldots\ldots \; u_{n1} = u_n' \cdot u_1''$$

und daher auch

$$u_1', \quad u_2', \; \ldots, \; u_n'$$

beliebiger n Werte fähig. Es sind daher die Linearformen u_1', u_2', ..., u_n' und aus gleichem Grunde die Linearformen u_1'', u_2'', ..., u_n'' von einander unabhängig. Ist also

$$u_i' = \sum_l a_{il} v_l', \quad u_k'' = \sum_m b_{mk} v_m'', \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

so sind die Determinanten $|a_{ik}|$ und $|b_{ik}|$ von Null verschieden. Aus (11) und (12) folgt

$$u_{ik} = \sum_{lm} a_{il} b_{mk} v_l' v_m'', \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

und die Vergleichung von (10) und (13) ergibt, daß die Koeffizienten $c_{lm}^{(ik)}$ die unter (7) angegebene Form haben.

Ganz ebenso erhält man in dem zweiten der oben angegebenen Fälle Gleichungen von der Form

$$u_{ik} = u_k' \cdot u_i'', \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

wo die u' und u'' dieselbe Bedeutung haben wie oben. Hier hat man nun

$$u_k' = \sum_l b_{lk} \cdot v_l', \quad u_i'' = \sum_m a_{im} \cdot v_m'' \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

zu setzen, um aus (14) und (15)

$$u_{ik} = \sum_{lm} a_{im} \cdot b_{lk} \cdot v_l' \cdot v_m'' \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

zu erhalten und aus der Vergleichung von (10) und (16) die unter (8) angegebene Form der Koeffizienten zu konstatieren.

Damit ist der Nachweis des Theorems erbracht.

Beim Durchsuchen der Literatur fand ich das Theorem nur von S. Kantor (Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse d. Akad. d. Wiss. zu München 1897, S. 370) angegeben mit der Bemerkung, es sollte auf den ersten Seiten jedes Lehrbuches der Determinanten stehen. J. Schur machte mich darauf aufmerksam, daß es auch bei Frobenius (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1897, S. 1011) vorkommt.

Vordergrund des modernen Lebens getreten. Ich glaube kaum, daß man sich anderwärts darüber in so gedrängter Kürze Auskunft verschaffen kann wie hier. Bei manchen von den behandelten Gegenständen ist eine Beziehung auf das binnen kurzem in Rechtskraft tretende Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich erforderlich. Ich erfülle eine mir angenehme Pflicht, indem ich meinen Sohn, Rechtsanwalt Dr. Otto Cantor in Karlsruhe, als meinen kundigen Ratgeber und Mitarbeiter nach dieser Richtung nenne. Logarithmisches Rechnen ist nicht jedermanns Sache. In einem Anhange finden sich ausgerechnete Tafeln von $1{,}0p^n$ und $1{,}0p^{-n}$ für die drei gegenwärtig üblichsten Zinsfüße 3, $3\frac{1}{2}$ und 4 Prozent über sämtliche Jahre von $n = 1$ bis $n = 100$, so daß Logarithmen fast überall entbehrlich werden. Ein solcher Inhalt rechtfertigt vielleicht meine oben ausgesprochene Vermutung.

Zweierlei Bedingungen waren allerdings zu erfüllen, wenn mein Buch seinem erweiterten Zwecke sollte genügen können. Es mußte lesbar geschrieben, es mußte zu verhältnismäßig niedrigem Preise käuflich sein. In letzterer Beziehung hat das Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung wohl das überhaupt Mögliche geleistet. Darüber zu entscheiden, ob ein lesbares Buch vorliegt, ist Sache des Lesers, nicht des Verfassers. Ich kann nur sagen, daß ich mir redliche Mühe gegeben habe, verständlich zu bleiben, wenn der Gegenstand es auch mit sich brachte, daß mathematische Formeln nicht überall vermieden werden konnten. Eingestreute Beispiele dienen zu deren Erläuterung, so daß sie, wie ich hoffe, dem nichtmathematischen Leser kein unübersteigliches Hindernis bieten werden. Überdies besteht zwischen den einzelnen Kapiteln ein verhältnismäßig loser Zusammenhang, so daß man über Unverstandenes hinwegeilend bald wieder zu leichteren Gegenständen gelangt. Mathematische Leser aber, Lehrer an Mittelschulen z. B., welche in der Lage sind, mit ihren Schülern Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu behandeln, werden die verhältnismäßige Breite meiner Darstellung sowie die nicht überall vollkommene strenge Beweisführung zu entschuldigen haben. Alle Leser zu befriedigen ist unmöglich, und darum glaubte ich eine Vermittlung zwischen einander vielfach widerstreitenden Neigungen anstreben zu müssen.

Heidelberg, Oktober 1898.

Wenn ich dem Gebrauche folgend auch der zweiten Auflage dieses kleinen Buches ein Vorwort vorausschicke, so kann ich mich verhältnismäßig kurz fassen. Der Zweck des Buches ist der gleiche geblieben wie in der ersten Auflage und wird mit den gleichen Mitteln wie damals gegen Ende 1898 angestrebt.

Allerdings sind im einzelnen manche Veränderungen eingetreten. Nicht nur, daß verschiedene Zahlenirrtümer Verbesserung fanden, haben neue landesgesetzliche und reichsbehördliche Anordnungen eine Umarbeitung einzelner Paragraphen nötig gemacht. Ich erinnere an das Badische Feuerversicherungsgesetz, an die Erhöhung der Börsenumsatzsteuer, an die Vereinheitlichung der Deutschen Börsenübungen von 1899. Eine ähnliche Folge hatte der zur gleichen Zeit vollzogene Übergang der großen Deutschen Lebensversicherungsanstalten von den mit $3\frac{1}{2}\%$ Verzinsung berechneten Tarifen zu solchen, welche nur 3% in Rechnung bringen, nebst anderen Satzungsänderungen der Karlsruher Lebensversicherungsanstalt, für deren liebenswürdige Mitteilung ich Herrn Emil Walz meinen besonderen Dank auszusprechen habe.

Es entspricht der Natur des Gegenstandes, daß ein Buch wie das vorliegende immer nur einen Anspruch auf allgemeine Richtigkeit des Inhaltes befriedigen kann, während Einzelheiten ohne Verschulden des Verfassers der Abänderung ausgesetzt bleiben. Als ein sprechendes Beispiel erwähne ich die in den §§ 9, 19, 29 vorkommende Österreichische $4\frac{1}{5}\%$ Silberrente. Sie sieht, wie während des Druckes der letzten vier Druckbogen bekannt wurde, baldiger Einziehung entgegen, und sobald diese erfolgt ist, wird es notwendig sein, die Rechnungen der erwähnten Paragraphen für andere Anlehen auszuführen.

Leider ist auch auf S. 107, Zeile 17 ein sinnentstellender Druckfehler stehen geblieben. Anstatt „das Alter von h Jahren" ist zu lesen „das Alter von $h+1$ Jahren".

Was die Ausstattung des Buches betrifft, so werden die Käufer gewiß ebenso wie der Verfasser es dankbar anerkennen, daß die Verlagshandlung zu einem für die Augen angenehmeren Druck übergegangen ist, ohne den sehr mäßigen Preis zu erhöhen.

Heidelberg, Februar 1903.

Moritz Cantor.

Inhalt.

Erstes Kapitel.
Einfacher Zins.
Nr. 1—30. S. 1—37.

Zweites Kapitel.
Zusammengesetzter Zins.
Nr. 31—49. S. 37—57.

Drittes Kapitel.
Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Nr. 50—68. S. 57—80.

Viertes Kapitel.

Von den Lotterieanlehen.

Nr. 69—76. S. 80—92.

Fünftes Kapitel.

Versicherungswesen.

Nr. 77—83. S. 92—99.

Sechstes Kapitel.

Sterblichkeitstafeln.

Nr. 84—96. S. 100—114.

Siebentes Kapitel.

Einfache Lebensversicherung und sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung.

Nr. 97—106. S. 114—130.

Achtes Kapitel.

Dividendenberechnung.

Nr. 107—113. S. 130—139.

Neuntes Kapitel

Weniger einfache Versicherungsarten auf Grundlage der Sterblichkeit.

Nr. 114—127. S. 139—153

Anhang.

Gesichtspunkten aus entworfenes Rechenbuch zu schaffen. Bardey kam jedoch nicht dazu, diesen Anregungen Folge zu geben, und die wenigen Anhaltspunkte, welche sich in seinem Briefwechsel mit der Verlagshandlung vorfinden, lassen nicht mit Sicherheit erkennen, ob er ernstlich mit dem Plane umging, ein Rechenbuch für die unteren Klassen zusammenzustellen, und ob nur sein Hinscheiden ihm die Verwirklichung einer dahinzielenden Absicht unmöglich machte. Als es nach seinem Tode der Verlagshandlung gelungen war, die Herren Proff. Pietzker-Nordhausen und Presler-Hannover für eine Neubearbeitung seiner Aufgabensammlung zu gewinnen, wandte sich ihr Interesse von neuem der geplanten Vervollständigung der Bardeyschen Übungsbücher zu.

Fast gleichzeitig mit der Pietzker-Preslerschen Neubearbeitung begann das Erscheinen des mathematischen Unterrichtswerks von Professor Müller-Charlottenburg, in dessen Plan auch ein Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten vorgesehen war. Da die Müller-Kutnewskysche Sammlung mit der neuen Bearbeitung der Bardeyschen in den Zielen übereinstimmte, so lag für die Verlagshandlung der Wunsch außerordentlich nahe, zu den beiden Sammlungen einen **gemeinsamen Unterbau** herauszugeben, der die methodischen Vorzüge des Bardeyschen Werkes mit der Reichhaltigkeit und anregenden Vielseitigkeit der Müller-Kutnewskyschen Sammlung in sich vereinigte, und zur Freude der Verlagshandlung kam zwischen den Herren Proff. Pietzker und Müller eine Einigung zur Ausführung des Planes zu stande.

Dem Ergebnis der gemeinsamen Arbeit der beiden Herren Verff. beehrt sich die Verlagshandlung die folgenden Geleitworte mit auf den Weg in die Öffentlichkeit beizugeben:

Ein für den Unterricht an höheren Schulen bestimmtes Rechenbuch wird besonders dreierlei Gesichtspunkte zu berücksichtigen haben:

1. Erzielung einer gewissen Geläufigkeit im praktischen Rechnen, wie sie bei den Gebildeten unserer Tage nur zu häufig vermißt wird.
2. Vertrautheit mit der Anwendung dieser Rechenfertigkeit auf die Verhältnisse des bürgerlichen Lebens.

3. Eindringendes Verständnis für die Rechenoperationen, die man dabei zur Anwendung zu bringen hat — ein Verständnis, das zugleich dem späteren Unterricht in der Arithmetik vorarbeitet.

Dem ersten Gesichtspunkt wird das vorliegende Rechenbuch zunächst durch seinen Aufbau gerecht. Es beginnt mit scharfer Betonung der verschiedenen Stufen in unseren dekadischen Zahlengrößen und dieser Abschnitt findet später seine Fortsetzung in dem Abschnitt über Dezimalzahlen, die als Erweiterung der dekadischen Zahleinheiten aufgefaßt und beim Abschluß mit den gemeinen Brüchen innerlich verknüpft werden. Bemerkenswert ist ferner die Abgrenzung der beiden ersten Hauptabschnitte, von denen der erste das Rechnen mit unbenannten und einfach-benannten Zahlen und der zweite das Rechnen mit mehrfach-benannten Zahlen zum Gegenstand hat. In der Tat ist ja zwischen der Behandlung der einfach-benannten und der unbenannten, d. h. jeder Benennung fähigen Zahlen kein innerlicher Unterschied, und die Verbindung beider ermöglicht es, von Anbeginn an die Aufgaben mit anschaulichem, das Interesse wach haltendem Inhalt zu erfüllen.

Dies leitet hinüber zu der Art, wie der zweite Gesichtspunkt zur Geltung gebracht wird. Hier dürfte das vorliegende Rechenbuch durch die Fülle und Vielseitigkeit der für das Übungsmaterial herangezogenen Verhältnisse und Vorkommnisse allen anderen Rechenbüchern weit überlegen sein. Lauter Aufgaben aus dem praktischen Leben, die zugleich dazu dienen, den Gesichtskreis des Lernenden und seine Kenntnis der Wirklichkeit zu erweitern, von Beispielen für Handwerkerrechnungen und Aufgaben aus dem Verkehrswesen bis hinauf zu statistischem Material aus dem Großbetrieb aller möglichen Art, Wohlfahrtseinrichtungen in Staat und Gemeinden u. s. w.! Direkt diesem Zweck dient der Abschnitt V, der im übrigen eine weise Beschränkung übt und außer der Prozentrechnung (in 2 Abschnitten: Allgemeine Prozentrechnung und Prozentrechnung mit Berücksichtigung der Zeit) nur noch einfache Aufgaben der Mischungsrechnung bringt. Das hierbei verwandte Zahlenmaterial wurde durch zahlreiche Umfragen bei Vertretern der Landwirtschaft, der Gewerbe und Industrie und durch direkte Messungen gewonnen; seine

Benutzung wird daher dazu führen, den Schüler nach und nach mit den augenblicklichen Lebens-, Verkehrs- und Erwerbsbedingungen bekannt zu machen. Überall sind die erforderlichen Sacherklärungen vorangestellt, um das Verständnis für die behandelten Verhältnisse vorbereiten zu helfen.

Dem innerlichen Verständnis dient gleichzeitig die Einteilung, die stets vom leichteren zum schwereren fortschreitend die Begriffe im Schüler erwachen und zum Besitz werden läßt. Ganz besonders tritt dies bei der Bruchrechnung zu Tage, die zunächst durch die Behandlung der Division als Umkehrung der Multiplikation im ersten Hauptabschnitt und dann im zweiten Hauptabschnitt (Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen) zur Geltung kommt. Hier wird Wert darauf gelegt, die Bruchrechnung als Rechnung mit neuen Einheiten aufzufassen, deren Einführung durch die Sache selbst zur Notwendigkeit geworden ist. Innerhalb der einzelnen Abschnitte ist das ausgedehnte Material nach dem Vorgang der Müller-Kutnewskyschen Sammlung stets so angeordnet, daß mit leichteren, für das Kopfrechnen bestimmten Übungen begonnen wird und dann eine Fülle von schwierigeren Aufgaben zur schriftlichen Behandlung folgt, und diese Anordnung ist zur raschen Orientierung des Lehrers auch äußerlich kenntlich gemacht worden. Den Schluß bilden leichtere „Denkübungen", die dazu dienen werden, in der inneren Verknüpfung der verschiedenen Rechenoperationen Sicherheit und Fertigkeit erzielen zu helfen.

Die einzelnen, durch Zahlenbeispiele erläuterten Regeln sind überall in klaren, leicht einprägbaren Sätzen zusammengefaßt, bei deren Fassung zugleich auf logische Schärfe besonderes Gewicht gelegt worden ist.

Bei der Bearbeitung des dritten Hauptabschnittes (VI. Vorübungen zur Arithmetik, nur in Ausgabe B aufgenommen) waren einige Schwierigkeiten zu überwinden, für welche die kurzen, hierher gehörigen Vorschriften der neuen Lehrpläne sehr wenig Anhalt boten; denn diese beschränken sich darauf, dem Unterricht in der Quarta der Oberrealschulen die Anfangsgründe der Buchstabenrechnung anzugliedern und im übrigen für den Rechenunterricht auf allen höheren Schulen zu verlangen, daß er unbeschadet seiner eigentlichen Aufgabe doch zugleich dem späteren arithmetischen Unterricht vorarbeite.

Dieser Sachverhalt bedingte im allgemeinen eine Beschränkung des Stoffes auf die Gebiete, die an sich im Rechenunterricht selbst auftreten, und daraus erwuchs die Gefahr vielfacher Wiederholungen. In der Tat bringt es auch die Sache mit sich, daß die im Abschnitt VI auftretenden Aufgaben sich inhaltlich häufig mit den in den früheren Abschnitten behandelten Aufgaben eng berühren. Dennoch besteht ein gewisser Unterschied. Kam es im eigentlichen Rechenunterricht vorzugsweise darauf an, möglichst schnell und sicher zur Lösung der gestellten Aufgabe zu gelangen, stand also dort das Ergebnis im Mittelpunkt des Interesses, so dreht es sich bei den Aufgaben des Abschnittes VI vorzugsweise um den Weg der Lösung. Nicht das Ergebnis selbst, sondern die Art seiner Erlangung ist hier die Hauptsache; es gilt hier, sich der eigentümlichen Art des Lösungsweges bewußt zu werden und diese Art des Lösungsweges als eine allgemein gültige Regel zum Ausdruck zu bringen.

Daraus entstand aber sofort die zweite Gefahr, die des Übergreifens in das Gebiet des eigentlichen, den Mittelklassen vorbehaltenen arithmetischen Unterrichts. Hier schien es zweckmäßig, dieser Gefahr dadurch zu begegnen, daß überall auf die Form der Lösungswege und damit zugleich namentlich auch auf die Form der zu behandelnden Ausdrücke der Hauptwert gelegt wurde. Die strenge Begründung der arithmetischen Gesetze bleibt dann dem eigentlichen arithmetischen Unterricht vorbehalten, dem aber hierbei dadurch vorgearbeitet wird, daß schon vorher der Blick des Schülers sich gewöhnt, die Art der bei der Bedeutung der arithmetischen Gesetze auftretenden Ausdrucksformen rasch zu erkennen, so daß er mit größerer Leichtigkeit dem Gang der arithmetischen Beweisführung folgen kann. Nach einer andern Richtung hin war diesem arithmetischen Unterricht zugleich dadurch vorzuarbeiten, daß das Bewußtsein für den konkreten Inhalt der abstrakten, in der eigentlichen Arithmetik verwandten Zeichen aufrecht erhalten und möglichst gestärkt wurde. Für die Erfüllung dieser Aufgabe erschien es zweckmäßig, die einzelnen arithmetischen Formeln, wo es immer ging, an speziellen Zahlenbeispielen zu erläutern und dann erst durch Benutzung der Buchstaben in ihre allgemein gültige Fassung zu bringen.

Diesem Bestreben, den Zusammenhang zwischen den theoretischen Formen der Arithmetik und dem praktischen Inhalt des in diesen Formen behandelten Stoffes fortwährend festzuhalten, entspringt auch die Hinzufügung des Schlußkapitels über die relativen Zahlen, die sich vielleicht auch schon durch die Erwägung rechtfertigt, daß für einen verständnisvollen Gebrauch von Ausdrucksformen, wie sie jedem Kinde schon durch die täglichen Temperaturangaben geläufig sind, ein gewisses Bedürfnis bereits auf den unteren Stufen der höheren Unterrichtsanstalten besteht. Für die Befriedigung dieses Bedürfnisses erschien es aber zugleich auch ausreichend, wenn bei den in Betracht gezogenen Operationen mit negativen Zahlen nicht über die Addition und Subtraktion hinausgegangen wurde.

Die beiden Ausgaben stimmen in den Abschnitten I—V völlig überein; für ihre Trennung war der Wunsch entscheidend, den Schülern der Gymnasien das Rechenbuch nicht unnötig zu verteuern.

---

ilun

Nicht der Erfolg kann für den Wert unserer Handlungen maßgebend sein, sondern die Gesinnung, durch die sie veranlaßt wird. Die Gesinnungsethik allein bietet in dem pflichtmäßigen Handeln einen sicheren Maßstab der Beurteilung. Diese von Kant zuerst tiefer begründete Lehre verteidigt der Verfasser gegen die inzwischen erhobenen Einwürfe. Er betont dabei nachdrücklich, daß die landläufige Unterscheidung zwischen Egoismus und Altruismus, zwischen Handeln zum eigenen Vorteil und Handeln im Interesse des Nächsten oder der Gesamtheit von keiner Bedeutung für die sittliche Beurteilung ist, da beides ebenso gut pflichtgemäß wie nicht pflichtgemäß sein kann. Das Nichtpflichtgemäße ist außersittlich; böse wird es durch Handeln gegen das Pflichtbewußtsein.

Das ethische Handeln wird also als die eigenste Angelegenheit der Persönlichkeit dargestellt, aber der modernen Lehre vom unbeschränkten Recht des Individuums gegenüber wird mit aller Schärfe darauf hingewiesen, daß die Gesellschaft in Recht und Sitte Zwangsnormen zur Verfügung hat, die sie den Verletzern dieser Satzungen gegenüber aufrecht zu erhalten berechtigt und verpflichtet ist. Das Verhältnis zwischen Persönlichkeit und Gesellschaft führt auf die Bedeutung der Kultur für das sittliche Handeln. Mit fortschreitender Kultur werden die Möglichkeiten des sittlichen wie die des unsittlichen Handelns größer: durch die Kultur erlangen wir eine Spannkraft und Schwingungsweite des Handelns, wie sie dem Naturmenschen vollständig abgeht.

Zum Schluß hebt der Verfasser die Bedeutung des religiösen Lebens hervor, das über die Grenzen der wissenschaftlichen Erkenntnis hinaus den Abschluß des ethischen Systems zu einer ethischen Weltanschauung ermöglicht.

Je dringender die Gegenwart eine Auseinandersetzung mit den verschiedenen geistigen Strömungen fordert, je mehr die Persönlichkeit wieder nach festen Normen des Handelns verlangt, um so mehr Aufmerksamkeit wird man diesem Buche schenken müssen, das diese Fragen in klarer und ansprechender Weise behandelt.

INHALTSVERZEICHNIS.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.

In den vorliegenden Büchern wird der Versuch gemacht, die gesamte stereometrische Projektionslehre, soweit sie für höhere Schulen in Betracht kommen kann, zur Darstellung zu bringen. Wir sind der Ansicht, daß die Schüler aller höheren Lehranstalten beim Übergang zur Hochschule befähigt sein müssen, nicht allein die wichtigsten projektivischen Bild-Darstellungen in ihren geometrischen Grundlagen zu verstehen, sondern auch zu entwerfen. Hierbei fassen wir zunächst nur die Darstellung projektivischer (perspektivischer) Bilder der reinen Stereometrie ins Auge, soweit sie mit elementaren Hilfsmitteln zu erreichen ist. Dann aber berücksichtigen wir in den Anwendungen das gesamte Gebiet der exakten Schulfächer, insbesondere die Krystallkunde, sowie die mathematische Erd- und Himmelskunde. Bei diesem außergewöhnlichen Umfange des Anwendungs- und Übungsgebietes mußte notwendigerweise gleichzeitig eine Einschränkung des Stoffes nach der Richtung eintreten, daß allgemeinere und schwierigere Lagen der Projektionsgebilde fast durchweg dann vermieden wurden, wenn sie sich nicht durch einfache Transformation (Drehung und dergl.) aus einfachen Lagen erzeugen ließen. Wir glauben, durch dieses Verfahren ein wesentliches Ziel erreicht zu haben, insofern als auf verhältnismäßig kleinem Raume ein schulmäßig gründlicher Einblick in die Projektionslehre geboten wird.

Der Leitfaden hat ferner die Absicht, für Lehrer und Schüler die Wege zu ebnen zur Durchführung der neuen Lehrpläne (von 1901) auf dem großen Gebiete des stereometrischen Unterrichtes, sei es in den hierfür pflichtmäßig festgesetzten Stunden, sei es in allen hiermit in äußerem oder innerem Zusammenhange stehenden Unterrichtsfächern, also z. B. auch im Linear-Zeichnen. Die Lehrpläne schreiben folgendes für das humanistische Gymnasium vor:

Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde (in Prima), ferner in den methodischen Bemerkungen: Besonders ist im stereometrischen Unterrichte, ganz abgesehen vom Betriebe der darstellenden Geometrie, das Verständnis projektivischen Zeichnens vorzubereiten und zu unterstützen.

Auch für Realanstalten gilt die vorstehende methodische Bemerkung, insbesondere der Hinweis auf die darstellende Geometrie; denn in den Lehrplänen für Realanstalten sind ausdrücklich vorgeschrieben: Grundlehren der darstellenden Geometrie.

metrie,
vorgeschr

In erster Linie wendet sich daher unsere „Projektionslehre“ an den eigentlichen mathematischen Unterricht und bezweckt eine innige Durchdringung von Theorie und Praxis auf dem Gebiete der stereometrischen Konstruktion. Wir wollen damit wesentlich den Wünschen der Lehrpläne gerecht werden, die folgenden Ausdruck gefunden haben: Dem Übelstande, daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt, wird sich durch Fortsetzung der Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion steuern lassen. Ferner: Auf allen Anstalten ist schon von III ab der Übung im Konstruieren die sorgfältigste Pflege zu widmen; sie muß bis in die oberste Klasse neben den dort behandelten Gebieten fortgesetzt werden.

Daneben hoffen wir, daß auch die Lehrer des Linear-Zeichnens, der Physik, Chemie, Mineralogie, Erdkunde und Biologie die Bücher mit Nutzen gebrauchen werden.

Ein weiterer Antrieb zur Abfassung eines schulmäßigen Leitfadens der Projektionslehre war die mit großer Mehrheit erfolgte Annahme folgender Thesen auf dem Mathematiker-Tage zu Gießen (1901):

1) An allen Lehranstalten ist die korrekte Herstellung der im mathematischen, insbesondere im stereometrischen Unterricht benutzten Figuren zu lehren und zu üben. Der mathematische Unterricht hat diese Aufgabe unter Zurückstellung anderer zu erfüllen.

2) Es ist notwendig, daß auf dem humanistischen Gymnasium den Schülern die Möglichkeit gegeben wird, sich die Elemente der darstellenden Geometrie anzueignen. Diese Elemente sind dem stereometrischen Unterricht der Prima einzuflechten.

3) Der Unterricht in der darstellenden Geometrie ist für die drei obersten Klassen des Realgymnasiums und der Oberrealschule obligatorisch. Er ist in wöchentlich zwei Stunden von einem Mathematiker zu erteilen. Das freie Handzeichnen in den genannten Klassen ist als wahlfreies Fach beizubehalten.

4) Das propädeutische Linearzeichnen in Tertia und Untersekunda der Realanstalten soll dadurch keine Beeinträchtigung erfahren und ist, besonders in Untersekunda, wenn möglich in die Hand des Mathematikers zu legen.

5) Für die Einzelgestaltung der Lehrpläne in der darstellenden Geometrie sind die in den „Unterrichtsblättern“ (VI Nr. 6, 1900) veröffentlichten Berichte und Gutachten als wertvolles Material zu benutzen.

Man sieht, daß die Vorschriften der Behörden und die Wünsche der deutschen Mathematiker einander entgegenkommen, und unser

Leitfaden hofft eine solide Vermittelung zwischen „Wunsch“ und „Vorschrift“ hergestellt zu haben.

Die genannten Thesen bildeten den Niederschlag einer Bewegung, an deren Spitze Männer wie Brill, Krumme, Holzmüller, Richter-Wandsbeck, Hauck, Felix Klein u. a. standen. Es handelte sich bekanntlich zunächst darum, dem mathematischen Unterrichte ein reicheres Übungsfeld zu geben und daher, unbeschadet der Selbständigkeit der Mathematik als Lehrfach, ein Hauptgewicht auf die Anwendungen zu legen. Dann aber mußte der vielfach unmäßigen Arithmetisierung des mathematischen Unterrichts, namentlich in den oberen Klassen, Einhalt geboten werden. Nach beiden Richtungen hin will unser Leitfaden, der zugleich ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie sein soll, helfend eingreifen. Das Lehrhafte tritt bescheiden zurück zu Gunsten eines möglichst vielseitigen Anwendungsgebietes; das Problem ist fast stets in den Vordergrund gerückt. Skelettartige Aufgaben, wie sie früher die Regel bildeten, dienen hier nur zur ersten Einführung; alsbald tritt dem Schüler die praktische Aufgabe mit Fleisch und Blut entgegen, aus der er nun mit der Sonde des analysierenden Geistes das mathematische Skelett herausfühlen muß. An der Hand unseres Buches wird es möglich sein, den bisherigen ausgedehnten rechnerischen Betrieb der Stereometrie zurückzudrängen und dem stereometrischen Konstruieren wieder zu seinem Rechte zu verhelfen. Was der Planimetrie recht ist, muß der Stereometrie billig sein. Zudem ist die Stereometrie, wie Reuschle sagt, nicht allein der reichere Teil der gesamten geometrischen Wissenschaft, sondern auch derjenige Teil, mit welchem sie sozusagen erst reell und konkret wird gegenüber den Abstraktionen der Planimetrie. Die Projektionslehre aber ist ohne Zweifel das wichtigste Übungsgebiet der konstruierenden Stereometrie, womit wir übrigens die bekannten, verdienstvollen Vorschläge Thiemes auf diesem Gebiete nicht zurückweisen wollen.

Der Hauptinhalt ist folgendermaßen gruppiert:

I. Schräge Parallelprojektion (schiefe Parallelperspektive) in elementar-propädeutischer Behandlung.

II. Normalprojektion (senkrechte oder orthogonale Projektion, Normalperspektive).

III. Zentralprojektion (Zentralperspektive, Malerperspektive) im Anschluß an die Normalprojektion, nebst einigen zentralen Kartenprojektionen als Anhang.

Die Einrichtung ist so getroffen, daß der Lehrer aus diesen 3 Abschnitten beliebig auswählen kann. So ist es z. B. am humanistischen Gymnasium möglich, Abschnitt I sehr gründlich, dagegen von

3 Abs
schen G

Abschnitt II nur die Grundlagen durchzunehmen und Abschnitt III wegzulassen. An anderen Gymnasien wird man Abschnitt I nur in den Grundlagen durchnehmen, dagegen den Nachdruck auf Normalprojektion legen wollen. Endlich ist es auch recht wohl denkbar, daß man in der Gymnasial-Prima von den Abschnitten I und II nur die Grundlagen behandelt, um der wichtigen Zentralprojektion (Abschnitt III) besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Allen diesen Richtungen wird Rechnung getragen durch den Aufbau des Buches, indem es lediglich an der Hand passend gewählter, ziemlich breit ausgeführter Aufgaben in den Stoff einführt.

Da nun offenbar die Ausgabe A des Leitfadens zur Einführung an humanistischen Gymnasien und sechsstufigen Real-Anstalten zu umfangreich ist, so haben die Verfasser unter freundlichem Entgegenkommen der Verlagshandlung eine zweite Ausgabe B veranstaltet, deren Einführung bei sehr niedrigem Preise kaum auf Widerstand stoßen dürfte.*) In der Hand der Lehrer aber müßte stets die Ausgabe A sein, schon wegen des Übungsstoffes und mannigfacher Exkurse. Übrigens bietet auch der wahlfreie Zeichen-Unterricht in den Ober-Klassen des Gymnasiums Raum zur Weiterbildung für einzelne Schüler. Um leicht den Zusammenhang der beiden Ausgaben zu erkennen, sind den laufenden Nummern der Ausgabe B diejenigen aus Ausgabe A in Klammern beigefügt. Es steht zu hoffen, daß sich allmählich die Elemente der Projektionslehre in die humanistischen Gymnasien einbürgern werden, nachdem Männer wie Brill, Böttcher, Gerland, Hauck, C. Hildebrand, Holzmüller, Wiener u. a. entschieden ihre Aufnahme empfohlen haben. Der eine der Verfasser hat die Möglichkeit seit mehr als 10 Jahren an einem kgl. Gymnasium dargetan und sogar Abiturienten-Aufgaben aus diesem Gebiete gestellt.

Für den Gebrauch der Ausgabe A an den Voll-Realanstalten bedarf es keiner besonderen Angaben. Diejenigen Lehrer, die eine besondere Vorliebe für eine allgemeinere Behandlung der Probleme haben, werden unsere Leitfäden leicht aus den bekannten Werken von Holzmüller, August Schmidt u. a. ergänzen können. Die Verfasser sind allerdings der Ansicht, daß solche ausgedehntere Übungen für die Hochschule, also für die darstellende Geometrie im rein wissenschaftlichen Sinne aufzusparen sind; wir

---

*) Bei der Auswahl für Ausgabe B haben wir uns auf die elementarsten Gebiete der schrägen und normalen Parallel-Projektion (mit einem kurzen Anhang über Zentral-Projektion) beschränkt. — Bei den ministeriell genehmigten mathematischen und neusprachlichen Nebenkursen an manchen humanistischen Gymnasien wird dagegen Ausgabe A wohl verwendbar sein.

haben daher auch für unsere Bücher den bescheidenen Titel „Projektionslehre" gewählt.

Von den bereits zahlreich vorhandenen Darstellungen der Projektionslehre genügte uns keine inbezug auf Auswahl und Verarbeitung des Stoffes. Die meisten gehen weit über die Grenzen dessen, was wir für die mathematische Erziehung der Schüler als ersprießlich halten, sie enthalten eben zuviel reine darstellende Geometrie. Von älteren Werken war uns die nunmehr vergriffene „Konstruktive Zeichenlehre" des bekannten Physikers Johannes Müller noch am sympathischsten. Aber schon der hohe Preis hält dies Buch von der Schule fern. Von den neueren schien uns die sonst so verdienstvolle Einführung Holzmüllers in das stereometrische Zeichnen mehr für die Hand des Lehrers bestimmt. So kamen wir auf den Gedanken, unsere Ansichten und Erfahrungen in der vorliegenden Form niederzulegen. Von besonderem Nutzen waren uns dabei die Traditionen des kgl. Real-Gymnasiums in Wiesbaden, der ältesten realistischen Lateinschule Preußens überhaupt. Dann aber müssen wir noch der mannigfachen Anregungen aus den zahlreichen Schriften Holzmüllers gedenken. Dieser Mann ist ganz besonders auf dem Gebiete des stereometrischen Unterrichts bahnbrechend hervorgetreten.*) Zu lebhaftem Danke sind wir ihm schon deswegen verpflichtet, weil er uns die Benutzung einer Anzahl von musterhaften Figuren erlaubt hat. Daß wir die bekannten Werke von Wiener, Weishaupt und Schlotke zu Rate gezogen haben, bedarf kaum einer besonderen Erwähnung.

Was nun den Aufbau des Werkes im einzelnen betrifft, so müssen wir auf die mit Absicht in großer Zahl beigegebenen Anmerkungen (Anhang II) verweisen, die auch die eingehenderen Literatur-Nachweise bringen. Hier folgen nur einige allgemeinere Bemerkungen. Die elementar-propädeutische Auffassung des ersten Abschnittes (schräge Parallelperspektive) hat es mit sich gebracht, daß nicht überall die streng logischen Beweismittel herangezogen, sondern vielfach einfache Anschauungs-Beweise zu Grunde gelegt wurden. Immerhin ist, um auch strengeren Anforderungen zu genügen, durchgängig auf ein Verzeichnis von Erklärungen und Lehrsätzen der Stereometrie (Anhang I) verwiesen. Dazu kommt noch die theoretische Ergänzung durch § 11.

---

*) Vergl. in bezug auf die Entwickelung der einschlägigen Fragen die in Anmerkung 67, Anhang II, Ausgabe A erwähnten Schriften der Verfasser. Unser Bestreben hat, abgesehen von mehreren wohlwollenden Rezensionen, auch Beachtung gefunden in dem bekannten Buche: Felix Klein und Riecke, Über angew. Math. u. Phys., Teubner 1900 (hierin Schilling, Über darst. Geometrie, S. 44).

hat,
dem beka
1900 (hieri

Wir heben weiterhin hervor, daß die §§ 8—10 der Ausgabe A mit ihren Anwendungen aus den verschiedenen naturwissenschaftlichen Schulfächern nur als Anregungen betrachtet werden mögen. Diese Übungen können beliebig ausgedehnt oder eingeschränkt werden; sie haben den Zweck, dem künftigen Physiker, Chemiker, Mineralogen, Biologen, Arzte, Archäologen und Juristen eine Anleitung zum Skizzieren zu geben; für den Techniker ist natürlich das Ganze von Bedeutung.

Bei den Zeichnungen aus der Krystallkunde hat uns besonders Kopp's Einleitung in die Krystallographie gute Dienste geleistet. Einige wichtige Aufgaben sind nach verschiedenen Methoden gelöst worden, so z. B. die mit Recht beliebte Konstruktion der Sonnenuhr (§§ 9, 16, 17). Wenn wir im zweiten Abschnitte (senkrechte Parallel-Projektion) mehrfach auf die schräge Parallel-Projektion zurückgegriffen und die Umsetzung der Normalbilder in Schrägbilder hervorgehoben haben, so wird man dies Verfahren billigen, da es den Einblick in den Zusammenhang der verschiedenen Projektionsarten außerordentlich fördert. Wir verweisen in dieser Richtung auf die wertvolle Abhandlung von M. Richter über „Das geometrische Zeichnen in der Realschule" (Programm-Abh. der I. Realschule zu Leipzig, Ostern 1901). Man wird bis zuletzt (§§ 19, 20) erkennen, daß auf diesen Zusammenhang besonderes Gewicht gelegt worden ist.

Die Lehre von den unbegrenzten Geraden und Ebenen haben wir so kurz als möglich behandelt; die hübschen Bergwerks-Aufgaben aus Gerland's Abriß der darstellenden Geometrie sollen zur Belebung dieses schwierigen Paragraphen dienen. — Die Lehre von der Zentralprojektion erscheint zwar nur als Zugabe, ist aber absichtlich in drei Stufen entwickelt. Die erste (Aufg. 188—197) arbeitet mit den einfachsten Mitteln, mit Augenpunkt und Distanzpunkt; bei der zweiten Stufe wird der Begriff des Fluchtpunktes auch im weiteren Sinne entwickelt (Aufg. 198—200), und zuletzt soll von dieser fruchtbaren Betrachtungsweise ein weitgehender Gebrauch gemacht werden (Aufg. 201—207). Man hat es nun in der Hand, je nach der verfügbaren Zeit oder dem Standpunkte der Klasse, beliebig weit vorzudringen.

Die zentralen Kartenprojektionen und die von diesen abgeleiteten Kartenentwürfe durften in einem Buche mit den im Eingange ausgesprochenen Grundsätzen nicht fehlen; hierbei haben wir mehrfach den methodischen Schulatlas von Sydow-Wagner berücksichtigt und benutzt. Man wird sehen, daß es gar nicht schwer ist, zum Verständnis des vielgebrauchten Bonne'schen Entwurfes, der bekanntlich Merkator angehört, vorzudringen. Besonders ist es

interessant, den Übergang der wirklich geometrischen Projektion zum willkürlichen, konventionellen Kartenentwurfe zu verfolgen. Die nicht zentralen Kartenentwürfe sind überall da eingeflochten, wo sie sich am natürlichsten angliedern, also in den §§ 9 und 15. Wir hoffen, daß es uns geglückt ist, selbst von der schwierigen Merkator-Karte im engeren Sinne mit elementaren Mitteln eine klare Vorstellung zu geben (§ 15, Aufg. 146 und 147).

In der methodischen Behandlung der einzelnen Aufgaben haben wir den üblichen fragend-entwickelnden Gang festgehalten und daher auch bei schwierigeren Verhältnissen auf sorgfältige Trennung von Analyse und Konstruktion gehalten. Die Breite der Darstellung ist daraus zu rechtfertigen, daß wir ein leicht lesbares Buch liefern wollten. Der Stoff ist bekanntlich infolge der früheren und zum teil auch jetzt noch üblichen Organisation des Hochschulstudiums in der Mathematik nicht jedem Fachkollegen recht geläufig. Es mußte daher in dieser Zeit des Übergangs zu einer mundgerechten Form gegriffen werden. Daß längere theoretische Auseinandersetzungen (abgesehen von § 11) im Interesse des Ganzen vermieden wurden, haben wir bereits bemerkt. Trotzdem wird die Reihenfolge der Aufgaben zeigen, daß sich ein vollständiger, methodisch geordneter Lehrgang wie ein roter Faden hindurchzieht. Namentlich ist es überall die geometrische Analyse, in der sich theoretische Erörterungen untergebracht finden. Die Redeform ist nicht kühl und abstrakt, sondern im wärmeren Unterrichtstone gehalten. Bei der Auswahl der Konstruktions-Methoden wurde nicht immer die eleganteste, sondern diejenige bevorzugt, die didaktisch am wertvollsten erschien. In den Anmerkungen (Anhang II) ist vielfach auf solche Koordinaten-Rechnungen (der Ebene und des Raumes) hingewiesen, die sich leicht an die Projektionen anschließen lassen. Hier findet man auch Andeutungen über den Anschluß der Lehren der synthetischen Geometrie, die für die Prima der Realanstalten von Wichtigkeit ist.

Übungsaufgaben in ungelöster Form sind genug vorhanden, um mehrfach wechseln zu können. Sie sind im engen Anschluß an die Hauptaufgaben gestellt, wobei der Zusammenhang nicht selten noch besonders hervorgehoben ist. Was nun die Ausführung der Zeichnungen betrifft, so muß sie nach Art der betreffenden höheren Schulen verschieden ausfallen. Das humanistische Gymnasium wird sich im eigentlichen mathematischen Unterrichte mit scharfgezeichneten Bleistift-Skizzen in Großquart-Heften begnügen; die Figuren sind in etwa doppelter Größe des Leitfadens zu entwerfen; durch passende Veränderung der Maße und Lagen ist dem so verbreiteten sinnlosen Kopieren sorgfältig vorzubeugen. Einige beson-

ders eifrige Schüler ziehen die Skizze wohl mit Tusche und farbigen Tinten aus, vornehmlich solche, die am wahlfreien Zeichenunterricht teilnehmen. Diese werden auch unter der Leitung des Fach-Zeichenlehrers und an der Hand der Ausgabe A unseres Leitfadens größere Entwürfe auf dem Reißbrette oder dem jetzt vielfach üblichen Zeichenblocke liefern. — Bei Realanstalten, seien sie nun vollständig oder unvollständig, muß die genaue Ausführung des Reißbrett-Entwurfs die Regel für den Fach-Zeichenunterricht (Linear-Zeichnen) bilden. Anders steht es mit den Entwürfen, die im eigentlichen mathematischen Unterricht geliefert werden sollen. Liegt in erwünschter Weise mathematischer Unterricht und Fach-Zeichenunterricht in einer Hand, so regelt sich die Frage von selbst. Anderenfalls wird es der Mathematiker vorziehen, die Zeichnungen in Quartheften scharf mit Lineal und Zirkel skizzieren zu lassen und die technisch vollendete Ausführung auf dem Brette in einzelnen Fällen dem Fach-Zeichnen überlassen.

In den „Anmerkungen" ist mehrfach auf Modelle verwiesen. Übrigens sind diese nur sparsam zu verwenden, denn gerade darin besteht der Wert der Projektionslehre, daß man die schwerfälligen Modelle entbehren lernt, indem man sie durch die bequeme und exakte Zeichnung ersetzt. — Die Gelegenheit zur Aneignung der Zeichentechnik ist jetzt reichlicher als früher vorhanden. Einmal bei den Ferienkursen und an Hochschulen und dann auch an den zahlreichen mittleren technischen Fachschulen; es bietet sich hier den Kollegen die Möglichkeit, auf einfache und rasche Art in die Technik des Zeichnens einzudringen.

Die Einführung der Ausgabe A des Buches paßt vorzugsweise für die Ober-Klassen der Voll-Realanstalten, während die Ausgabe B für die oberen Klassen der unvollständigen Realanstalten bezw. für die Prima des Gymnasiums eingerichtet ist. Diese Ausgabe B dem Bedürfnisse beider Anstaltsarten anzupassen, war nicht schwer, da für beide die Stoffauswahl dieselbe ist: die Elemente der schrägen und normalen Parallelprojektion. Doch ist darauf Rücksicht genommen, daß für den gereifteren Standpunkt des Gymnasial-Primaners schwierigere Übungen dargeboten sind. (Vergl. Vorwort zu Ausgabe B).

Daneben betrachten wir die Bücher von Sekunda ab auf allen Schulen als einen nützlichen Begleiter für alle Fächer, in denen exakte, geometrische Zeichnungen gefordert werden. Der Mineralog, Geograph, Physiker, Chemiker wird sich wiederholt darauf beziehen können. Nur nebenbei wollen wir seine Brauchbarkeit zum Selbststudium hervorheben.

Es ist uns wohl bekannt, daß die Ansichten über die Art und Weise der Aufnahme der Projektionslehre in den mathematischen Unterricht mehrfach aus einander gehen. Viele wollen diese Elemente nur ganz nebenbei treiben oder gar einem (fakultativen) Nebenkursus überweisen und nicht dem mathematischen Unterrichte einverleiben. Wir haben uns aus natürlichen Gründen auf den Standpunkt des Mathematiker-Tages gestellt (siehe obige Thesen). Für beide Richtungen aber sind beide Ausgaben A und B zu gebrauchen.

Man wird überall finden, daß die Verlagshandlung keine Mühe gescheut hat, um das Buch würdig auszustatten und namentlich die Figuren in klarer und exakter Ausführung dem Texte einzufügen. Herrn Oberlehrer Oskar Lesser an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. schulden wir besonderen Dank für seine bereitwillige Hilfe bei der Anfertigung einiger verwickelter Zeichnungen.

So hoffen wir denn, daß unser Leitfaden einen nicht unerwünschten Beitrag zur Durchführung der neuen Lehrpläne liefern möge. Besitzen wir bereits für die rechnerischen Gebiete vortreffliche Lehrmittel, nicht minder auch für die konstruktive Planimetrie, so war doch das Feld der konstruktiven Stereometrie noch spärlich angebaut, und hier möge unser Buch einsetzen.

Jeder Mathematiker wird erkennen, daß er geometrische, insbesondere stereometrische Verhältnisse nur dann genau sieht, wenn er den Stift ergreift und die im Geiste erschauten Gebilde zu zeichnen versucht. Das mathematische Zeichnen ist eben eine Sprache, mit der man schneller und klarer reden kann als mit dem Wort. Wir berufen uns hier auf die Worte des großen Gauß (in einer Besprechung der klassischen Géometrie descriptive von Monge): „Ich muß das Studium derselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neueren sonst manchmal vermißten geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann."

Frankfurt a. M. und Hannover, im März 1903.

C. H. Müller. O. Presler.

selbst gerichtet wird, anstatt auf die mit ihnen verknüpften Zahlen, gewinnen die Denkoperationen an Kraft, Lebendigkeit und Anschaulichkeit.

Hierzu kommt noch ein anderer Vorzug. Die Symbolik der Vektoranalysis ist eine überraschend einfache und übersichtliche. Operationen, welche bei Verwendung von kartesischen Methoden verwickelt und schwierig erscheinen, werden kurz und einfach, wenn sie in ihre Äquivalente in der Sprache der Vektorenrechnung übersetzt werden, ohne dabei an umfassender Bedeutung und Bestimmtheit einzubüßen. Die Vorbereitung eines elementaren, spieziell für Physiker bestimmten Werkchens über Vektoranalysis bedarf daher wohl keiner besonderen Apologie, zumal es bisher an einem solchen in deutscher Sprache verfaßten und separat ausgegebenen Werke gefehlt hat.

Bei der Ausarbeitung der Elemente der Vektoranalysis ließ sich der Verfasser hauptsächlich von praktischen Erwägungen leiten. Es lag ihm weniger daran, eine erschöpfende Abhandlung über den Gegenstand zu schreiben, als vielmehr den Studierenden der Physik sobald wie möglich in den Stand zu setzen, die vektoriellen Methoden zur Lösung und Bewältigung physikalischer Fragen anzuwenden und ihn vor allem dazu anzuregen, sich dieser Methoden auch allgemein beim „physikalischen Denken“ zu bedienen. Er wird sich so bald des Vorteils bewußt werden, den ein Operieren mit sinnfälligen räumlichen Beziehungen über ein solches mit reinen Abstraktionen besitzt.

In der Form der Darstellung hat sich der Verfasser im großen und ganzen Heaviside angeschlossen und sich dabei derselben Symbole bedient, wie A. Föppl in seiner vorzüglichen, im selben Verlage erschienenen 'Einführung in die Maxwellsche Theorie'. Gleichwohl hat er es für zweckmäßig gehalten, die von Graßmann herrührende Zuordnung von Flächen zu Vektoren ausgiebig zu verwerten. Die Ableitung mancher Theoreme gewinnt dadurch an Einfachheit. Angesichts des eigentlichen Zweckes dieses Buches und seines elementaren Charakters glaubte der Verfasser davon absehen zu müssen, in funktionen-theoretische Erörterungen einzugehen, und hat

sich demgemäß hauptsächlich darauf beschränkt, solche physikalische Vektoren der Untersuchung zu unterziehen, denen eine stetige Verteilung im Raume zukommt.

In der Wahl der Beispiele hat er sich von der Absicht leiten lassen, ein möglichst vielseitiges Bild von der Anwendbarkeit der vektoranalytischen Methoden zu geben. Eine Anzahl von Beispielen wurde besonders für diesen Zweck ausgearbeitet und gelangt zum erstenmal zur Veröffentlichung.

Inhaltsverzeichnis.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Einführung

in das

Studium der theoretischen Physik,

insbesondere in das der analytischen Mechanik.

Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis

von

P. Volkmann,

Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr.

(VI u. 370 S.) gr. 8. 1900. geh. ℳ 9.—, in Leinwand gebunden ℳ 10.20.

Die Darstellungen, welche die Mechanik in den letzten Jahrzehnten gefunden hat, wandten die Aufmerksamkeit wiederholt den Grundprinzipien der Disziplin zu und wiesen auf innere Unklarheiten derselben hin. Auch die vorstehend als Einführung in das Studium der theoretischen Physik angekündigte Bearbeitung der Mechanik will sich mit Vorliebe der Klarstellung der Grundprinzipien zuwenden, erblickt aber, nachdem die letzten Jahre noch einige sehr willkommene mathematische Präcisierungen gebracht haben, für die dabei zu überwindenden Schwierigkeiten das Bedürfnis zur Zeit mehr in einer erkenntniskritischen Klärung als in dem Versuch einer weiteren mathematischen Präcisierung.

Der wissenschaftlich vertiefte Erfahrungsbegriff, der alle naturwissenschaftlichen Disziplinen und damit auch die Mechanik dauernd zu befruchten hat, legt hier zunächst ein eingehendes Studium der geschichtlichen Entwickelung der Mechanik nahe, wie ein solches die nach vielen Richtungen vortreffliche Darstellung von E. Mach erleichtert. Wenn neuerdings von anderer beachtenswerter Seite die Darstellung der Mechanik in ihrer alten klassischen Form als Ziel hingestellt wurde, dann dürfte aber doch dagegen zu bemerken sein, daß Newton, Euler, Lagrange die Mechanik unter wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten behandelt und dargestellt haben.

Die Stellungnahme des Autors zur Mechanik und zu ihren Grundprinzipien nimmt ihren Ausgangspunkt wesentlich von Newton und dürfte dahin kurz zu charakterisieren sein, daß die Mechanik, wie jede naturwissenschaftliche Disziplin, mehr ein gegenseitiges Bezugssystem mit rückwirkender Verfestigung der einzelnen Teile gegeneinander ist und als solches dargestellt sein will, als ein einseitiges Bezugssystem, aufgeführt nach dem Muster einer mathematischen Disziplin, bei der alles auf die Festigkeit der Fundamente ankommt, und bei der die Teile des Gebäudes ziemlich unabhängig von einander darauf aufgeführt werden können, ohne daß die gegenseitige Stützung eine sonderliche Rolle spielt.

Bei der Auffassung des Autors fällt die Beurteilung des Newtonschen Systems der Mechanik wesentlich günstiger aus, als sie sich z. B. bei E. Mach gestaltet. Die üblichen Darstellungen der Mechanik nach Art eines mathematischen Systems, dessen Stärke in der Konsequenz und Strenge der Deduktion liegt, bilden bei dieser Stellungnahme nicht höchsten Zweck und höchstes Ziel, aber sie bieten sich als ein sehr willkommenes Mittel dar, die Mechanik als Muster eines naturwissenschaftlichen Systems darstellen zu können, dessen Stärke in der innigen Durchdringung von Induktion und Deduktion besteht und stets bestehen wird.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN HANNOVER.

Preis für den Band von 4 Heften *M.* 20.—.

Die Zeitschrift sucht die gesamte angewandte Mathematik durch Veröffentlichung wissenschaftlich bedeutender Original-Arbeiten zu fördern. Sie berücksichtigt außer den verschiedenen Gebieten der *Mechanik*, hauptsächlich der *technischen Mechanik*, die *theoretische Physik* und *Chemie*, *Geodäsie* und *Astronomie*, die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* mit ihren Anwendungen auf *Ausgleichungsrechnung*, *Statistik*, *Biologie* und *Versicherungswesen*, die *darstellende Geometrie* mit Einschluß der *Schattenkonstruktionen*, *Perspektive* und *Photogrammetrie*, das *graphische Rechnen*, das *numerische Rechnen*, die *empirischen Formeln*, die *Näherungsrechnung* („Approximations-Mathematik"), ferner die bei der Ausübung der Mathematik notwendigen technischen Hilfsmittel, wie *numerische* und *graphische Tafeln*, *Rechen-Apparate* und *-Maschinen*, *Meß-* und *Zeichen-Werkzeuge*. Außerdem bringt die Zeitschrift *kleinere Mitteilungen* von allgemeinerem Interesse, auch aus der *Geschichte* der *angewandten Mathematik*, *Anfragen* aus dem Leserkreis und *Auskünfte*, *Besprechungen* und Verzeichnisse neu erschienener Bücher, endlich sehr ausführliche *Verzeichnisse* der in mehr als 400 Zeitschriften zerstreuten *Abhandlungen* aus der angewandten Mathematik im weitesten Sinne.

Inhalt des 48. Bandes.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben für 1904.

Preisaufgaben für 1905.

Auskünfte.

Anfragen.

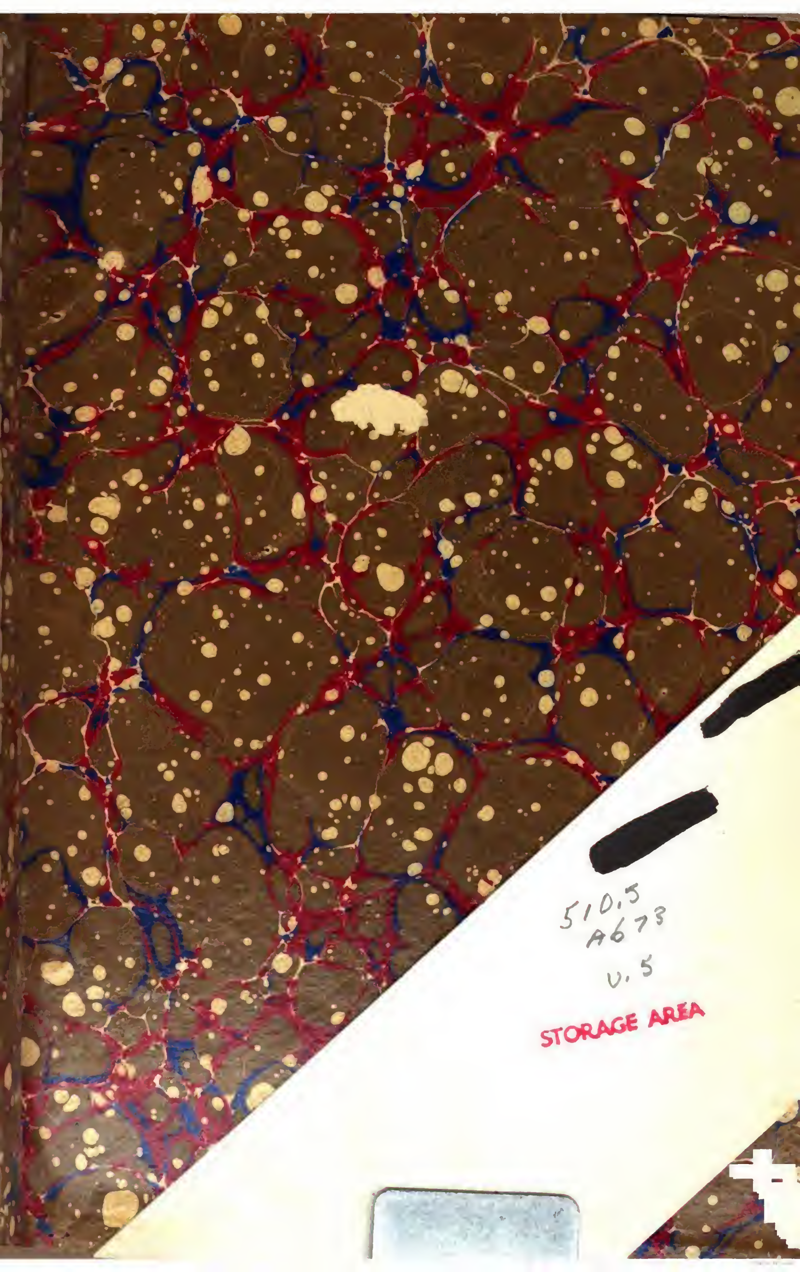
Bücherschau.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
M. Bauer, Fr. Daniëls, E. Eckhardt, G. Espanet, F. Fitting, M. Großmann, R. Güntsche, T. Hayashi, G. Hessenberg, C. Heumann, E. Jahnke, Ed. Janisch, S. Kantor, L. Klug, C. Köhler, P. Kokott, J. Kraus, H. Kühne, F. London, Ph. Maennchen, E. Malo, E. Meyer, Fr. Meyer, P. Milan, N. Nielsen, E. Rehfeld, L. Saalschütz, Schonte, D. Sintzow, H. Stahl, W. Thienemann, W. Velten, E. v. Weber, A. Wendler, G. Zemplén.

Berichtigungen zum Doppelheft V, 1/2.

Seite 9, Zeile 7 von unten muß es heißen: das statt den Dreikant;
Seite 12, Zeile 13, 14 von oben muß es heißen: K_2 statt K_1, K_1 statt K_2;
Seite 14, Zeile 19 von oben muß es heißen: $B <$ statt $> ACD + 90^\circ$;
Seite 14, Zeile 19 von unten muß es heißen: $C >$ statt $< 90^\circ$.




510.5
A673
v. 5
STORAGE AREA

